MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

SERIE SECONDA
TOMO XXXVI.

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze
MDCCCLXXXV

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XXXVI.

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze
MDCCCLXXXV

INDICE

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 1° GENNAIO MDCCCLXXXV

Presidente

Fabretti (Ariodante), Professore di Archeologia greco-romana nella Regia Università, Direttore del Museo di Antichità, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio della Reale Accademia dei Lincei, Membro Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia di Archeologia, Letteratura e Belle Arti di Napoli, della R. Accademia della Crusca, dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, e dell'Istituto di Corrispondenza archeologica, Professore Onorario dell'Università di Perugia, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Uffiz. ✠, Comm. ⊜; ✠, Cav. della Leg. d'O. di Francia, e C. O. R. del Brasile.

Vice-Presidente

N. N.

Tesoriere

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Membro Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠ e Comm. ⊜.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

N. N.

Segretario Perpetuo

Sobrero (Ascanio), Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore emerito di Chimica docimastica nella Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino, Membro del Collegio di Scienze fisiche e matematiche della Regia Università, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, dell'Ateneo di Venezia, dell'Ateneo di Brescia, della Società di Agricoltura Storia naturale ed Arti utili di Lione, della Società di Farmacia di Parigi, Socio onorario della Società degl' Ingegneri ed Industriali di Torino, ecc., Comm. ❋; ✠, Uffiz. ⊜.

ACCADEMICI RESIDENTI

Sobrero (Ascanio), *predetto*.

Genocchi (Angelo), Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Comm. ❋, Uffiz. ⊜; ✠.

Lessona (Michele), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore e Direttore de' Musei di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Torino, Socio delle RR. Accademie di Agricoltura e di Medicina di Torino, Uffiz. ❋, e Comm. ⊜.

Dorna (Alessandro), Professore d'Astronomia nella R. Università, e di Meccanica razionale nella R. Militare Accademia di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Torino, ✻, Uffiz. ⊜.

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova-York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, e della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, dell'*American Ornithologist's Union*, Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, e Membro del Comitato ornitologico internazionale ⊜.

Cossa (Alfonso), Dottore in Medicina, Professore di Chimica docimastica nella R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Socio della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, e dell'Accademia Gioenia di Catania, Comm. ✻, ⊜, e dell'O. d'I. Catt. di Sp.

Bruno (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e Professore di Geometria descrittiva nella R. Università di Torino, ✻.

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano, e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Comm. ✻, ⊜, dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

Curioni (Giovanni), Professore di Costruzioni e Vice-Direttore della Scuola d'Applicazione degli Ingegneri, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Lucca, Socio Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo, Comm. ✻, ⊜.

Siacci (Francesco), Maggiore nell'Arma d'Artiglieria, Professore di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, e di Matematiche applicate nella

Scuola d'Applicazione delle Armi di Artiglieria e Genio, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✠, Uffiz. ✇.

Bellardi (Luigi), Conservatore delle collezioni paleontologiche presso il Museo di Geologia della R. Università di Torino, Prof. di Storia naturale al Liceo *Gioberti*, Uffiz. ✠, Cav. ✇, e dell'O. di Cristo del Portogallo, Membro di varii Istituti scientifici, ecc.

Basso (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche e matematiche, Prof. di Fisica matematica nella R. Università di Torino, ✇.

D'Ovidio (Dott. Enrico), Prof. Ordinario d'Algebra e Geometria analitica, incaricato di Geometria superiore, e Rettore della R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e Socio dell'Accademia Pontaniana, ecc., ✠, Comm. ✇.

Bizzozero (Giulio), Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia dei Lincei, delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio Corrispondente del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ecc., ✠, ✇.

Ferraris (Galileo), Ingegnere, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Prof. di Fisica tecnica nel R. Museo Industriale Italiano, e di Fisica nella R. Scuola di Guerra ✠, ✇.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Socio Corrispondente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, ✇.

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Prof. di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia de' Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, e Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠, ✇.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia, e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ✇.

Gibelli (Giuseppe), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Botanica, e Direttore dell'Orto botanico della R. Università di Torino, ✇.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

S. E. Ménabréa (Conte Luigi Federigo), Marchese di Val Dora, Senatore del Regno, Professore emerito di Costruzioni nella R. Università di Torino, Dottore in Leggi nella R. Università di Oxford e di Cambridge, Luogotenente Generale, Ambasciatore di S. M. a Parigi, Primo Aiutante di campo Generale Onorario di S. M., Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia de' Lincei, Membro Onorario del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ecc.; C. O. S. SS. N., Gr. Cr. e Cons. ✠, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cr. ✠, ✠, dec. della Med. d'oro al Valor Militare e della Medaglia d'oro Mauriziana; Gr. Cr. dell'O. Supr. del Serafino di Svezia, dell'O. di S. Alessandro di Newski di Russia, di Dannebrog di Dan., Gr. Cr. dell'O. di Torre e Spada di Portogallo, dell'O. del Leone Neerlandese, di Leop. del Belg. (Categ. Militare), della Probità di Sassonia, della Corona di Wurtemberg, e di Carlo III di Sp., Gr. Cr. dell'O. di S. Stefano d'Ungheria, dell'O. di Leopoldo d'Austria, di quelli della Fedeltà e del Leone di Zöhringen di Baden, Gr. Cr. dell'Ordine del Salvatore di Grecia, Gr. Cr. dell'Ordine di S. Marino, Gr. Cr. degli Ordini del Nisham *Ahid* e del Nisham *Iftigar* di Tunisi, Comm. dell'Ordine della L. d'O. di Francia, di Cristo di Portogallo, del Merito di Sassonia, ecc., ecc.

Brioschi (Francesco), Senatore del Regno, Professore d'Idraulica, e Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Geometria), e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, ecc., Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio delle Società Matematiche di Londra e di Parigi, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, ecc., Gr. Uffiz. ✠, ✠; ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Govi (Gilberto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, Membro del Comitato internazionale dei Pesi e delle Misure, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze e dell'Accademia Pontaniana di Napoli, della R. Accademia d'Agricoltura di Torino, Uffiz. ✠; ✠, Comm. ✠, e della L. d'O. di Francia.

Moleschott (Jacopo), Senatore del Regno, Professore di Fisiologia nella R. Università di Roma, Professore Onorario della Facoltà Medico-Chirurgica della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Medicina di Roma,

dell'Accademia Cesarea Leopoldino-Carolina germanica dei Naturalisti, Socio Corrispondente delle Società per le Scienze mediche e naturali a Hoorn, Utrecht, Amsterdam, Batavia, Magonza, Lipsia, Cherbourg, degli Istituti di Milano, Modena, Venezia, Bologna, delle Accademie Medico-Chirurgiche in Ferrara e Perugia, Socio Onorario della R. Accademia di Medicina di Torino, della *Medicorum Societas Bohemicorum* a Praga, della *Société médicale allemande* a Parigi, della Società dei Naturalisti in Modena, dell'Accademia Fisio-medico-statistica di Milano, della *Pathological Society* di S. Louis, della *Sociedad antropolojica Española* a Madrid, Socio dell'Accademia Veterinaria Italiana, del Comitato Medico-Veterinario Toscano, della *Société R. des Sciences Médicales et Naturelles de Bruxelles,* Socio Straniero della Società Olandese delle Scienze a Harlem, Socio fondatore della Società Italiana d'Antropologia e di Etnologia in Firenze, Comm. ✻, ⊜ e dell'Ordine Vandalico di Casa Mecklenburg, Cav. dell'Ordine del Leone Neerlandese.

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della Reale Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Uffiz. ⊜; ✠.

Betti (Enrico), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Pisa, Direttore della Scuola normale superiore, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Gr. Uffiz. ⊜; ✠.

Scacchi (Arcangelo), Senatore del Regno, Professore di Mineralogia nella R. Università di Napoli, Presidente della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, Presidente del R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Segretario della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, Socio della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, Gr. Uffiz. ⊜; ✠.

Ballada di S. Robert (Conte Paolo), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei.

Schiaparelli (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroborgo, di Stockolma, di Upsala, della Società de'Naturalisti di Mosca, e della Società astronomica di Londra, Comm. ✻, ⊜; ✠; Comm. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

ACCADEMICI STRANIERI

Helmholtz (Ermanno Luigi Ferdinando), Professore nella Università di Berlino, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Fisica generale).

Dana (Giacomo), Professore di Storia naturale a New Haven, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia.

Hofmann (Guglielmo Augusto), Prof. di Chimica, Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della Società Reale di Londra, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Chimica).

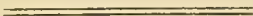
Chevreul (Michele Eugenio), Membro dell'Istituto di Francia, Gr. Cr. della L. d'O. di Francia, ecc.

Hermite (Carlo), Membro dell'Istituto di Francia, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

Joule (James) Prescott, della Società Reale di Londra.

Weierstrass (Carlo), Professore di Matematica nell'Università di Berlino.

Thomson (Guglielmo), dell'Istituto di Francia, Professore di Filosofia naturale nell'Università di Glasgow.

Gegenbaur (Carlo), della R. Accademia Bavarese delle Scienze, Professore di Anatomia nell'Università di Heidelberg.

CORRISPONDENTI

SEZIONE

DI MATEMATICA PURA E ASTRONOMIA

De Gasparis (Annibale), Professore d'Astronomia nella R. Università di . . . . *Napoli*

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di . . . . *Genova*

Boncompagni (D. Baldassare), dei Principi di Piombino . *Roma*

Cremona (Luigi), Professore di Matematiche superiori nella R. Università di . . . . *Roma*

Cantor (Maurizio), Professore di Matematica nell'Università di . . . . *Heidelberg*

Schwarz (Ermanno A.), Professore di Matematica nell'Università di . . . . *Gottinga*

Klein (Felice), Professore di Matematica nell'Università di . . . . *Lipsia*

Fergola (Emanuele), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Beltrami (Eugenio), Professore di Fisica matematica e di Meccanica superiore nella R. Università di . . . . . *Pavia*

Casorati (Felice), Professore di Calcolo infinitesimale e di Analisi superiore nella R. Università di . . . . . . *Pavia*

Dini (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . *Pisa*

Tacchini (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano . . . . *Roma*

Battaglini (Giuseppe), Professore nella R. Università di . *Roma*

Catalan (Eugenio), Professore emerito dell'Università di . *Liegi*

SEZIONE

DI MATEMATICA APPLICATA

E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

Colladon (Daniele), Professore di Meccanica . . . . *Ginevra*

Liagre (J. B.), Segretario Perpetuo della R. Accademia delle Scienze del Belgio; alla Scuola militare *à la Cambre* *Ixelles* (Bruxelles)

Turazza (Domenico), Professore di Meccanica razionale nella R. Università di . . . . *Padova*

Narducci (Enrico), Bibliotecario della Biblioteca Alessandrina di . . . . *Roma*

Pisati (Giuseppe), Professore di Fisica tecnica nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in . . . . . . *Roma*

Sang (Edoardo), Socio e Segretario della Società di Scienze ed Arti di . . . . *Edimborgo*

Clausius (Rodolfo), Professore nella Università di . . *Bonn*

Fasella (Felice), Dirett., della Scuola navale Superiore di *Genova*

SEZIONE

DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

Weber (Guglielmo), della Società Reale delle Scienze di *Gottinga*

Fechner (Gustavo Teodoro) . . . . *Lipsia*

Wartmann (Elia), Professore nell'Univerità di . . . *Ginevra*

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Roma*

Kohlrausch (Federico), Professore nell' Università di . *Würtzburg*

Jamin (Giulio Celestino), dell'Istituto di Francia . . . *Parigi*

Cornu (Maria Alfredo), dell'Istituto di Francia . . . *Parigi*

Felici (Riccardo), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Pisa*

Rossetti (Francesco), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Padova*

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . *Bologna*

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di . . . . *Firenze*

Wiedemann (Gustavo), Professore nell'Università di . *Lipsia*

SEZIONE

DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

Bonjean (Giuseppe) . . . . *Chambéry*

Plantamour (Filippo), Professore di Chimica . . . . *Ginevra*

Will (Enrico), Professore di Chimica . . . . . . *Giessen*

Bunsen (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . *Heidelberg*

Marignac (Giovanni Carlo), Professore di Chimica . . *Ginevra*

Péligot (Eugenio Melchiorre), dell'Istituto di Francia . *Parigi*

Berthelot (Marcellino), dell'Istituto di Francia . . . *Parigi*

Paternò (Emanuele), Professore di Chimica nella Regia Università di . . . . *Palermo*

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in . . . . *Milano*

Friedel (Carlo), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Fresenius (Carlo Remigio), Professore a . . . . . *Wiesbaden*

SEZIONE

DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

Meneghini (Giuseppe), Professore di Geologia, ecc. nella R. Università di . . . . *Pisa*

Studer (Bernardo), Professore di Geologia . . . . *Berna*

Konink (Lorenzo Guglielmo di) . . . . *Liegi*

De Zigno (Achille), Uno dei XL della Società italiana delle Scienze . . . . *Padova*

Favre (Alfonso), Professore di Geologia . . . . . *Ginevra*

Kokscharow (Nicola di), dell'Accademia Imperiale delle Scienze di . . . . *Pietroborgo*

Ramsay (Andrea), della Società Reale di . . . . . *Londra*

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella Regia Università di . . . . *Roma*

Rosenbusch (Enrico), Professore di Petrografia nell'Università di . . . . *Strasborgo*

Nordenskiöld (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di . . . . *Stoccolma*

Daubrée (Gabriele Augusto), dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Nazionale delle Miniere a . . . . . *Parigi*

Zirkél (Ferdinando), Professore di Petrografia a . . *Lipsia*

Des Cloizeaux (Alfredo Luigi Oliviero Legrand), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

Capellini (Giovanni), Professore nella R. Università di *Bologna*

Stoppani (Antonio), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

SEZIONE

DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

Trévisan de Saint-Léon (Conte Vittore), Corrispondente del R. Istituto Lombardo . . . . *Milano*

Candolle (Alfonso De), Professore di Botanica . . . *Ginevra*

Boissier (Pietro Ed.), Botanico, della Società di Fisica e Storia naturale di . . . . *Ginevra*

Gennari (Patrizio), Professore di Botanica nella R. Università di . . . . *Cagliari*

Tulasne (Luigi Renato), dell'Istituto di Francia . . . *Parigi*

Caruel (Teodoro), Professore di Botanica nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella Regia Scuola superiore d'Agricoltura in . . . . *Milano*

SEZIONE

DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

De Selys Longchamps (Edmondo) . . . . *Liegi*

Burmeister (Ermanno), Direttore del Museo pubblico di *Buenos Aires*

Philippi (Rodolfo Armando) . . . . *Santiago* (Chilì)

De Cigalla (Conte Giuseppe), Protomedico onorario, nell'isola di . . . . *Santorino*

Owen (Riccardo), Direttore delle Collezioni di Storia naturale al *British Museum* . . . . *Londra*

Koelliker (Alberto), Professore di Anatomia e Fisiologia *Würtzburg*

De-Siebold (Carlo Teodoro), Professore di Zoologia e Anatomia comparata nell'Università di . . . . *Monaco* (Baviera)

Milne Edwards (Henri), dell'Istituto di Francia . . *Parigi*

Golgi (Camillo), Professore di Istologia, ecc., nella Regia Università di . . . . *Pavia*

Haeckel (Ernesto), Professore nell'Università di . . . *Jena*

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Peyron (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Comm. ✠.

Segretario Perpetuo

Gorresio (Gaspare), Senatore del Regno, Prefetto della Biblioteca Nazionale, già Professore di Letteratura orientale nella R. Università di Torino, Membro dell'Istituto di Francia, Socio ordinario della R. Accademia de' Lincei, Socio Corrispondente della Reale Accademia della Crusca, e della R. Accademia di Scienze e Lettere di Palermo, ecc., Membro Onorario della Reale Società Asiatica di Londra, Vice-Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✠, Gr. Uffiz. ⊜; ✠, dell'O. di Guadal. del Mess., e dell'O. della Rosa del Brasile, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

ACCADEMICI RESIDENTI

Gorresio (Gaspare), *predetto.*

Fabretti (Ariodante), *predetto.*

Peyron (Bernardino), *predetto.*

Vallauri (Tommaso), Senatore del Regno, Professore di Letteratura latina nella Regia Università, Membro del Consiglio Superiore dell'Istruzione pubblica, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Socio Corrispondente della R. Accademia della Crusca, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, e dell'Accademia Romana di Archeologia, Comm. ✠ e ⊜, Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno.

Flechia (Giovanni), Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine e di Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia dei Lincei, Uffiz. ✠, Comm. ⊜; ✠.

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Membro della Società di Archeologia e Belle Arti e della Giunta conservatrice dei monumenti d'Antichità e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✠, e ✠.

Bianchi (Nicomede), Senatore del Regno, Soprantendente degli Archivi Piemontesi, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria delle antiche Provincie e della Lombardia, Membro Corrispondente delle Deputazioni di Storia Patria delle Provincie Modenesi, delle Provincie della Toscana, dell'Umbria e delle Marche, Membro Onorario della Società storica Svizzera, della R. Accademia Palermitana di Scienze e Lettere, della Società Ligure di Storia Patria, della R. Accademia Petrarca di Scienze, Lettere ed Arti in Arezzo, dell'Accademia Urbinate di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Ateneo di Bergamo, e della R. Accademia Paloritana di Messina, Gr. Uffiz. ✠, Comm. ✠, e Gr. Uffiz. dell'O. di S. Mar.

Promis (Vincenzo), Dottore in Leggi, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M., Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Membro e Segretario della Società d'Archeologia e Belle Arti di Torino, ✠, Comm. ✠, Gr. Uffiz. dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, Comm. dell'O. di S. Michele di Baviera e della Corona di Rumenia.

Rossi (Francesco), Adiutore al Museo d'Antichità, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Membro ordinario dell'Accademia orientale di Firenze, ✠.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*

Bollati Barone di Saint-Pierre (Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Direttore dell'Archivio di Stato, detto Camerale, Consigliere d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle antiche Provincie, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di Storia Patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente della Società Ligure di Storia Patria, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia Patria per le Provincie della Romagna, e della Società per la Storia di Sicilia, Uffiz. ✠, ✠.

Schiaparelli (Luigi), Dottore aggregato, Professore di Storia antica, e Direttore della Scuola di Magistero della Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Uffiz. ✠, Comm. ✠.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato e Professore straordinario nella Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, ✠.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Professore di Storia militare nell'Accademia Militare, Membro della Regia Deputazione sovra

gli studi di Storia Patria per le antiche Provincie e la Lombardia, e della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro Corrispondente della R. Deputazione di Storia Patria per le Provincie di Romagna, e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, ✠, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Rep. di S. Marino.

Carle (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore della Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✠.

Nani (Cesare), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto nella R. Università di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, ✠.

Berti (Domenico), Deputato al Parlamento nazionale, Professore emerito delle R. Università di Roma, Torino e di Bologna, Socio della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente della R. Accademia della Crusca e del Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ✱, Gr. Cord. ✠; ✙.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Consigliere di Stato, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Socio e Segretario della R. Accademia dei Lincei, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, della R. Accademia Lucchese, dell'Istituto Veneto, della Pontaniana di Napoli, Socio Onorario dell'Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti di Bergamo, ecc. Membro del Consiglio degli Archivi, Membro del Consiglio e del Comitato del Contenzioso Diplomatico, Gr. Uffiz. ✱, Comm. ✠, Cav. e Cons. ✙, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Sp. e di S. Mar., Gr. Uffiz. dell'O. di Leop. del B., dell'O. del Sole e del Leone di Persia, e del Mejidié di 2ª cl. di Turchia, Gr. Comm. dell'O. del Salv. di Gr., ecc.

Amari (Michele), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Palermo e del R. Istituto di studi superiori di Firenze; Dottore in Filosofia e Lettere delle Università di Leida e di Tubinga; Socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei in Roma, Socio delle RR. Accademie delle Scienze in Monaco di Baviera e in Copenaghen; Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze in Palermo, della Crusca, dell'Istituto Veneto, della Società Colombaria in Firenze, della R. Accademia d'Archeologia in Napoli, delle Accademie di Scienze, Lettere ed Arti in Lucca e in Modena, della R. Deputazione

di Storia Patria per le Provincie Parmensi, di quella per le Provincie Toscane, dell'Umbria e delle Marche, delle Accademie Imperiali di Pietroborgo e di Vienna e dell'Ateneo Veneto; Socio Onorario della R. Società Asiatica di Londra, della Società orientale di Germania, della Società geografica italiana, delle Accademie di Padova e di Gottinga, dell'Accademia di Storia in Madrid; Presidente Onorario della Società Siciliana di Storia Patria e Socio Onorario della Ligure, della Veneta e della Società storica di Utrecht; Gr. Uffiz. ✽, e Gr. Cr. ⊜, Cav. e Cons. ✠, Cav. dell'*Ordre pour le Merite* di Prussia; dell'Ordine imperiale della Rosa nel Brasile; Cav. di Gran Croce dell'Ordine di N. S. della Guadalupa nel Messico.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella Regia Università, ✽.

Ricci (Marchese Matteo), Socio Residente della Reale Accademia della Crusca, Uffiz. ✽, *a Firenze.*

Minervini (Giulio), Bibliotecario e Professore Onorario della Regia Università di Napoli, Segretario generale Perpetuo dell'Accademia Pontaniana, Socio Ordinario della Società R. di Napoli, Socio della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), della R. Accademia delle Scienze di Berlino, ecc., Uffiz. ✽, e Comm. ⊜, Cav. della L. d'O. di Francia, dell'Aquila Rossa di Prussia, di S. Michele del Merito di Baviera, ecc.

De Rossi (Comm. Giovanni Battista), Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), e della R. Accademia delle Scienze di Berlino e di altre Accademie, Presidente della Pontificia Accademia Romana d'Archeologia.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore, Consigliere della Corte di Cassazione di Roma e del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Uffiz. ✽, e Comm. ⊜.

Cantù (Cesare), Membro effettivo del R. Istituto Lombardo, Direttore dell'Archivio di Stato di Milano, e Soprantendente degli Archivi Lombardi, Socio delle Accademie della Crusca, dei Lincei, di Madrid, di Bruxelles, ecc.; Corrispondente dell'Istituto di Francia e d'altri, Gr. Uffiz. ✽, e Comm. ⊜, Cav. e Cons. ✠, Comm. dell'O. di C. di Port., Gr. Uffiz. dell'O. della Guadalupa, ecc., Officiale della Pubblica Istruzione e della L. d'O. di Francia, ecc.

Tosti (D. Luigi), Abate Benedettino Cassinese, Socio Ordinario della Società Reale delle Scienze di Napoli, Sopraintendente generale dei monumenti sacri del Regno d'Italia, Vice-Archivista della S. Sede.

ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen (Teodoro), Professore di Archeologia nella R. Università e Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Müller (Massimiliano), Professore di Letteratura straniera nell'Università di Oxford, Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Renier (Leone), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. della L. d'O. di Francia.

Egger (Emilio), Professore alla Facoltà di Lettere di Parigi, Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. della L. d'O. di Francia.

Bancroft (Giorgio), Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

De Witte (Barone Giovanni Giuseppe Antonio Maria), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Gregorovius (Ferdinando), Membro della R. Accademia Bavarese delle Scienze in Monaco.

Ranke (Leopoldo), Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, e Membro *Straniero* dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

Meyer (Paolo), Professore delle lingue e letterature dell'Europa meridionale nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes*, Cav. della L. d'O. di Francia.

CORRISPONDENTI

I. — SCIENZE FILOSOFICHE.

JOURDAIN (Carlo), dell'Istituto di Francia . . . . . . *Parigi*

RENDU (Eugenio) . . . . *Parigi*

MAMIANI (Terenzio), Senatore del Regno . . . . . *Roma*

BONATELLI (Francesco), Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di . . . . *Padova*

FERRI (Luigi), Professore nella Regia Università di . *Roma*

II. — SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI.

LAMPERTICO (Fedele), Senatore del Regno . . . . . *Roma*

SERAFINI (Filippo), Professore di Diritto romano nella R. Università di . . . . *Pisa*

SERPA PIMENTEL (Antonio DI) . . . . *Madrid*

RODRIGUEZ DE BERLANGA (Manuel) . . . . *Madera*

III. — SCIENZE STORICHE.

MICHEL (Francesco) . . . . *Bordeaux*

REUMONT (Alfredo DI), Corrispondente dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti . . . . *Borcette* (presso Aquisgrana)

KRONE (Giulio) . . . . *Vienna*

SANGUINETTI (Abate Angelo), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . . *Genova*

CHAMPOLLION-FIGEAC (Amato) . . . . *Parigi*

ADRIANI (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . . *Cherasco*

DAGUET (Alessandro) . . . . *Neuchâtel* (Svizzera)

Perrens (Francesco) . . . . *Parigi*

Campori (Marchese Giuseppe) . . . . *Modena*

Haulleville (Prospero De) . . . . *Brusselle*

Villari (Pasquale), Professore nell' Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

Giesebrecht (Guglielmo), dell'Accademia Bavarese delle Scienze in . . . . *Monaco*

De Leva (Giuseppe), Professore di Storia moderna nella R. Università di . . . . *Padova*

Sybel (Enrico Carlo Ludolfo Di), Direttore dell'Archivio di Stato in . . . . *Berlino*

Gachard (Luigi Prospero), Socio della R. Accademia delle Scienze del Belgio . . . . *Brusselle*

Wallon (Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) . . . *Parigi*

Taine (Ippolito), dell'Istituto di Francia. . . . . . *Parigi*

Riant (Conte Paolo), dell'Istituto di Francia . . . *Parigi*

IV. — ARCHEOLOGIA.

Henzen (Guglielmo) . . . . *Roma*

Boissieu (Alfonso De). . . . . *Lione*

Wieseler (Federico) . . . . *Gottinga*

Palma di Cesnola (Conte Luigi) . . . . *New-York*

Gozzadini (Giovanni), Senatore del Regno . . . . . *Bologna*

Rawlinson (Giorgio), Professore nella Università di . *Oxford*

Garrucci (P. Raffaele), della C. d. G. . . . . *Roma*

Fiorelli (Giuseppe), Senatore del Regno . . . . . *Roma*

Curtius (Ernesto), Professore nell'Università di . . . *Berlino*

Birch (Samuele), Conservatore delle Antichità orientali, ecc., e delle Collezioni etnografiche del *Museo Britannico* in . *Londra*

V. — GEOGRAFIA.

Negri (Barone Cristoforo), Console generale di 1ª Classe, Consultore legale del Ministero per gli affari esteri . . . *Torino*

Kiepert (Enrico), Professore nell'Università di . . . *Lipsia*

Pigorini (Luigi), Professore di Paleoetnologia nella Regia Università di . . . . *Roma*

VI. — LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE.

Krehl (Ludolfo) . . . . *Dresda*

Rénan (Ernesto), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Sourindro Mohun Tagore . . . . *Calcutta*

Ascoli (Isaia Graziadio), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di . . . . *Milano*

Weber (Alberto), Professore nell'Università di . . . *Berlino*

Withney (Guglielmo), Professore nel Collegio *Yale* . *New Haven*

Kerbaker (Michele), Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine nella R. Università di . . . . *Napoli*

VII. — FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA.

Franceschi-Ferrucci (Caterina), Corrispondente della R. Accademia della Crusca . . . . *Pisa*

Silorata (Pietro Bernabò), Prof., Comm. . . . . . . *Roma*

Linati (Conte Filippo) . . . . *Parma*

Comparetti (Domenico), Professore nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

Curtius (Giorgio), Professore di Filologia greca nell'Università di . . . . *Lipsia*

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico dal 1° Gennaio 1884
al 1° Gennaio 1885

ELEZIONI

SOCI.

Spezia (Giorgio), eletto *Socio Nazionale residente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali il 15 Giugno 1884.

Gibelli (Giuseppe), id. id. id.

Wiedemann (Gustavo), eletto *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale), id. id.

Tacchini (Pietro), eletto *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica pura e Astronomia) il 14 Dicembre 1884.

Battaglini (Giuseppe), id. id. id.

Catalan (Eugenio), id. id. id.

Fasella (Felice), id. id. (Sezione di Matematica applicata e Scienza dell'Ingegnere civile militare).

MORTI

11 Gennaio 1884.

Giuliani (P. Giambattista), *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Filosofia, Storia letteraria e Bibliografia),

17 Gennaio 1884.

Schlegel (Ermanno), *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

11 Marzo 1884.

Sella (Quintino), *Socio Nazionale non residente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

24 Marzo 1884.

Mignet (F. A. Alessio), *Socio Straniero* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

11 Aprile 1884.

Dumas (Giovanni Battista), *Socio Straniero* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

12 Maggio 1884.

Wurtz (Adolfo), *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

18 Maggio 1884.

Delponte (Giovanni Battista), Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

2 Giugno 1884.

Franceschi (Giovanni), *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

11 Luglio 1884.

Lepsius (Riccardo), *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia).

13 Luglio 1884.

Richelmy (Prospero), *Socio* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e Vice-Presidente dell'Accademia.

la notte del 30 Agosto 1884.

Odorici (Federico), *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

25 Ottobre 1884.

Castigliano (Alberto), *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica applicata, e Scienze dell'Ingegnere civile e militare).

.... Ottobre 1884

Begnier (Adolfo), *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia).

.... Dicembre 1884.

Rüppel (Guglielmo Edoardo), *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

....

Plantamour (Emilio), *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica pura e Astronomia).

SCIENZE

FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

STUDIO SULLE QUADRICHE

IN UNO SPAZIO LINEARE

AD UN NUMERO QUALUNQUE DI DIMENSIONI

MEMORIA

DI

CORRADO SEGRE

Approvata nell'adunanza 18 Novembre 1883

PREFAZIONE (*)

Die mathematischen Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, — aber ihr Werth und ihre Absicht ruht gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

(FELIX KLEIN. — *Vergleichende Bertrachtungen [über neuere geometrische Forschungen.* — Erlangen, 1872, S. 43).

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4(2)$ des R_5.

(KLEIN. — *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Mathematische Annalen*, Bd. V, S. 261).

Il presente lavoro è diviso in tre parti distinte: le prime due riguardano la geometria di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni e studiano in un tale spazio la prima le proprietà proiettive di una quadrica, la seconda quelle di un fascio (o schiera) di quadriche, delle loro *quartiche* d'intersezione, e di quei sistemi di quartiche su una quadrica, che ho chiamato quartiche *omofocali*, e che provengono dall'intersezione di questa quadrica colle quadriche di una schiera a cui essa appartenga. La terza parte poi riguarda l'applicazione delle teorie così svolte al caso in cui il numero delle dimensioni dello spazio considerato sia uguale o

(*) Questa prefazione non riguardava soltanto la presente memoria, ma anche quella che verrà pubblicata in seguito in questo stesso volume e che conterrà le applicazioni dei risultati qui ottenuti alla geometria della retta e specialmente delle sue serie quadratiche. Queste due memorie costituivano dapprima un unico lavoro, presentato dall'autore come dissertazione di laurea alla R. Università di Torino il 29 Maggio 1883.

minore di 5, e più precisamente a quelle quadriche rispettivamente a 4, 3, 2 dimensioni con le quartiche in esse contenute, che costituiscono l'ordinario spazio di rette, il complesso lineare e la congruenza lineare di rette, coi complessi quadratici, congruenze quadratiche e rigate biquadratiche, che in essi rispettivamente sono contenuti.

La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi n di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica; e, anche quando la si consideri all'infuori delle importanti applicazioni alla geometria ordinaria di cui essa è capace, cioè anche quando l'elemento o *punto* di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che poi fa lo stesso, come un ente analitico costituito dai valori di n quantità variabili), ma bensì come un ente a sè, la natura intima del quale si lascia indeterminata, non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perchè dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro. Sorta, si può dire, colla celebre memoria del 1854 di Riemann « *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* » (*), la geometria ad n dimensioni va sviluppandosi secondo due vie diverse: l'una riguarda la teoria della curvatura degli spazi e si connette quindi alla geometria non-euclidea, l'altra invece studia la *geometria proiettiva* degli spazi *lineari* (cioè di curvatura nulla, « ebene Mannigfaltigkeiten » di Riemann) ed è appunto questa ch'io mi propongo di seguire in questo lavoro. Essa apre ai cultori della matematica un campo sconfinato di ricerche piene d'interesse, le quali comprendono come caso particolare tutta la geometria ordinaria; e si può affermare con sicurezza che da queste ricerche più generali anche questa trarrà un giovamento immenso.

Le relazioni principali che legano tra loro gli spazi lineari contenuti in uno spazio lineare ad n dimensioni furono già date completamente da Clebsch, Jordan, D'Ovidio, e recentemente in modo meno analitico

---

(*) Bisogna però notare che già prima il Grassmann nella sua « *Ausdehnungslehre* » del 1844 aveva svolto insieme con altri concetti importanti anche questo; ma la sua opera s'incomincia a studiare solo da poco tempo. Il seguente passo assai notevole che si trova in uno scritto del Grassmann pubblicato nel 1845 nel « *Grunert's Archiv* » (V. la 2ª edizione dell'« *Ausdehnungslehre von* 1844 », pag. 277) mostra come nel concetto di quell'acuto scienziato l'*Ausdehnungslehre* » fosse appunto quella che oggidì chiamiamo « geometria ad n dimensioni »: « *Meine Ausdehnungslehre bildet die* « *abstrakte Grundlage der Raumlehre* (*Geometrie*), *d. h. sie ist die von allen räumlichen Anschauungen* « *gelöste rein mathematische Wissenschaft, deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre* « *ist* » perocchè, aggiunge « *die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur gegebenes, nämlich den* « *Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathematik, sondern eine Anwendung derselben auf* « *die Natur* ».

dal Veronese. Quindi in una breve introduzione mi limito a ricavare quelle tra queste proprietà, che mi saranno necessarie in seguito. Invece è incompleto lo studio che finora è stato fatto degli spazi di 2° grado o *quadriche* contenute in quello spazio lineare, specialmente per alcune questioni, di cui parlerò tra poco. Il lavoro del Veronese, a cui ho fatto allusione, è una memoria assai importante pubblicata nel vol. XIX dei « *Mathematische Annalen* » (pag. 161-234) e intitolata: « *Behandlung* « *der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Di-* « *mensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* », nella quale l'autore applica il metodo della proiezione centrale in uno spazio ad n dimensioni allo studio di molte questioni riguardanti questo, particolarmente alla ricerca delle equazioni che legano i caratteri di una *curva* (spazio ad una dimensione) algebrica contenuta in quello spazio. Quel metodo di ricerca era stato introdotto in questa geometria (specialmente per lo studio della geometria su una quadrica) dai lavori che il Klein negli anni 1871-1872 pubblicò nelle « *Nachrichten* » di Gottinga e nei « *Mathematische Annalen* », lavori di grande importanza, che avremo ancora occasione di citare. Già, prima del Veronese, il Clifford aveva fatto qualche applicazione dei concetti di Klein nella bella memoria del 1878 « *On the classification of Loci* » (*Philosophical Transactions*, vol. 169) in cui sono scoperte intorno alle curve di uno spazio ad n dimensioni delle proposizioni generali notevolissime. Ma in essa non sono punto studiate le quadriche; queste compaiono invece nella memoria del Veronese, ove hanno però importanza secondaria, sicchè vi è toccata solo qualcuna delle questioni a cui esse dànno luogo. Io, in questa dissertazione, non intendo certamente esaurire la teoria delle quadriche nello spazio ad un numero qualunque di dimensioni, chè questa teoria ha già da se sola una vastità immensa; ma soltanto di risolvere parecchie delle questioni che si presentano più spontanee, e specialmente quelle che più m'importano per le applicazioni che poi intendo farne alla geometria della retta.

Nel § 1 della 1ª parte studio la teoria della polarità rispetto ad una quadrica dello spazio ad $n-1$ dimensioni, il che conduce naturalmente alla considerazione delle quadriche aventi discriminante nullo, cioè *specializzate* una o più volte come luoghi (*coni* di varie specie), ovvero come inviluppi. Nel § 2, prendendo una n upla polare per sistema di riferimento, dimostro, che ogni quadrica si può in infiniti modi trasformare proiettivamente in un'altra, purchè siano entrambe ugualmente specializzate, e ne deduco che le specie di quadriche considerate nel § 1 sono le sole

specie che, dal punto di vista proiettivo, vi siano da considerare. Nel § 3 stabilisco le proprietà degli spazi lineari tangenti alla quadrica, le varie equazioni tangenziali di questa, ed il numero e la distribuzione degli spazi lineari di punti delle varie dimensioni contenuti in una quadrica. Noto, a proposito del numero di questi spazi, che non è esatto quello dato dal Veronese, e nel § 4 ottengo di nuovo lo stesso numero di prima, facendo uso precisamente del metodo usato dal Veronese e che già dissi esser stato introdotto dal Klein, cioè della proiezione (*stereografica*) della quadrica da un suo punto su un piano (vale a dire, su uno spazio lineare ad $n-2$ dimensioni). Nel § stesso approfitto di questa rappresentazione della quadrica su un piano per cercare le relazioni che passano tra i due sistemi diversi di spazi lineari a p dimensioni che sono contenuti nella quadrica ad un numero pari $2p$ di dimensioni. Queste relazioni presentano diversità tra i due casi di p pari ed impari, diversità che risalta pure in un importante teorema, che credo nuovo, e che dà il numero dei punti comuni a due spazi algebrici a p dimensioni contenuti nella quadrica stessa; questo teorema comprende quindi come casi particolari il teorema di Chasles sul numero dei punti comuni a due curve algebriche segnate su una quadrica ordinaria, ed il teorema di Halphen sul numero delle rette comuni a due sistemi algebrici di rette. Finalmente nel § 5 dimostro la possibilità di generare una quadrica ad $n-2$ dimensioni, mediante le intersezioni degli elementi corrispondenti di due sistemi lineari reciproci di piani più volte infiniti, proposizione a cui io ero già giunto indipendentemente, e che credevo nuova, ma che poi ho trovata, enunciata soltanto, nella memoria del Veronese.

Viste così le principali proprietà di una quadrica, passo nella 2ª parte a dedurne le proprietà relative a fasci e schiere di quadriche. Nel § 1 studio la teoria della polarità rispetto ad un fascio di quadriche, il che conduce a considerare un sistema di spazi lineari ad $n-3$ dimensioni polari dei punti dello spazio, il quale gode di proprietà analoghe a quelle del complesso tetraedrale di rette nello spazio ordinario. Nel § 2 cerco gli spazi quadratici e lineari contenuti nella quartica d'intersezione di un fascio di quadriche, e dalle cose dette nel § 5 della 1ª parte deduco il modo di generare ogni quartica su una data quadrica mediante le intersezioni di questa con sistemi reciproci di piani, donde potrò poi dedurre nella 3ª parte la possibilità di generare ogni complesso quadratico mediante due stelle reciproche di complessi lineari. Nel § 3 passo alla classificazione delle quartiche, intersezioni di quadriche; e qui voglio entrare in qualche dettaglio.

Il problema della riduzione simultanea di due forme quadratiche a somme di quadrati fu risolto, com'è noto, pel caso più generale da Cauchy e da Jacobi. Risultava però da questa soluzione che vi sono dei casi in cui quella riduzione simultanea a somme di quadrati non si può effettuare. Nasceva quindi la questione se vi fossero forme (*canoniche*) da sostituire in tali casi alle somme di quadrati, ed anche quest'altra domanda (a cui nel caso di due forme quadratiche riducibili a somme di quadrati già si poteva rispondere): quali condizioni occorrano perchè si possa con una sostituzione lineare trasformare una coppia data di forme quadratiche in un'altra coppia data, cioè perchè queste due date coppie si equivalgano dal punto di vista dell'algebra moderna. Ora il Weierstrass (che già aveva studiato quest'argomento in una memoria del 1858 dei « *Monatsberichte* » dell'Accademia di Berlino) risolveva completamente queste questioni analitiche nella memoria « *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* » del 1868 (*Monatsb.* di Berlino). Ivi in fatti considerando i *divisori elementari* (« *Elementartheiler* ») del discriminante di una forma bilineare o quadratica ottenuta combinando linearmente ad arbitrio due forme date, il Weierstrass dimostra il seguente importantissimo teorema: « la condizione necessaria e sufficiente affinchè una « coppia di forme bilineari o quadratiche si possa trasformare in un'altra « coppia, e che queste due coppie abbiano gli stessi divisori elementari ». E per via, nel dimostrare questo teorema, egli è condotto a trovare e ad usare in luogo di quelle forme certe espressioni più semplici, che si possono chiamare *forme canoniche* e godono della proprietà di avere per coefficienti precisamente le costanti dei divisori elementari, vale a dire quantità che sono invarianti simultanei della coppia di forme bilineari o quadratiche (*). Subito dopo la pubblicazione della memoria del Weierstrass, il Klein nella sua dissertazione inaugurale « *Ueber die* « *Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen* « *Linien-Coordinaten auf eine kanonische Form* » mostrava come essa si potesse applicare ad una classificazione dei complessi quadratici, e sei anni dopo (1874) il Weiler faceva completamente questa classificazione basata sul lavoro di Weierstrass nella memoria: « *Ueber die verschiedenen* « *Gattungen der Complexe zweiten Grades* » (*Mathematische Annalen*

(*) I rapporti di queste quantità dànno gl'invarianti assoluti della coppia di forme. In particolare se si tratta di forme quadratiche e l'una delle due si considera come *assoluto* dello spazio ad $n-1$ dimensioni, quegl'invarianti assoluti dànno il numero dei parametri che determinano la *forma* di una quadrica di specie qualunque in quello spazio.

Bd. VII). Finalmente il Gundelfinger nelle sue note alla 3ª edizione (1876) delle « *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes* » di Hesse (*V.* specialmente pag. 498-525) esponeva con qualche modificazione la teoria di Weierstrass e l'applicava per ultimo alla classificazione della quartica d'intersezione di due quadriche nello spazio ordinario (*).

Ma tutte queste applicazioni geometriche fatte finora del metodo analitico di Weierstrass hanno, a mio avviso, un grave difetto: quello di usare per ciascuno dei casi che può presentare la coppia di forme rispetto ai divisori elementari una nuova coppia di equazioni canoniche (quelle incontrate, come dicemmo, dal Weierstrass, e che variano da caso a caso), studiando sempre su queste, e non su equazioni generali, le proprietà che distinguono il caso che si considera. Insomma, mentre nel concetto di Weierstrass sembra che il teorema che abbiamo riportato fosse quello a cui egli dava principalmente importanza, e che le equazioni canoniche non furono che un mezzo per giungere ad esso, gli scienziati suddetti hanno posto queste equazioni in prima linea e non hanno cercato di approfondire invece il significato geometrico di quel teorema analitico. Ne nasce che le loro classificazioni sono lunghe e penose, e più analitiche che geometriche. Il Weiler, particolarmente, dovendo vedere per ciascuna coppia di forme canoniche delle equazioni di un complesso quadratico quali siano le particolarità che distinguono questo, è costretto, volta per volta, a cercarsi nuovamente le equazioni delle rette singolari, l'equazione in coordinate di punti della superficie singolare mediante una trasformazione ausiliaria di quella coppia di equazioni canoniche tale che il sistema di riferimento diventi un tetraedro, e così via; cose queste, che sono gravi difetti per un lavoro, il cui scopo è principalmente geometrico, anzi è di geometria della retta.

Ora, nel § 3 della 2ª parte del mio studio, io ho appunto cercato di approfondire dal lato geometrico quel teorema di Weierstrass e di dedurre dalla parte di esso riguardante le forme quadratiche il modo di fare una classificazione geometrica completa delle quartiche e dei fasci di quadriche

---

(*) Uso dei divisori elementari per una classificazione del gruppo di due quadriche ordinarie, considerate però dal punto di vista della geometria della retta è pure fatto nella interessante memoria del Voss « *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* » (Math. Ann. Bd. X, 1876). Finalmente il metodo di Weierstrass è ora applicato dal mio carissimo amico Gino Loria nella sua dissertazione di laurea alla classificazione delle ciclidi, o superficie di quarto ordine a conica doppia dello spazio ordinario, basandosi sul fatto che una tal superficie si può rappresentare mediante due equazioni quadratiche tra cinque variabili omogenee (coordinate di sfere), sicchè quella classificazione si può far dipendere dalla classificazione del gruppo di due tali forme quadratiche.

in uno spazio ad $n-1$ dimensioni (*). A tal fine mi baso sulle cose che prima ho svolto in generale intorno alle quadriche specializzate e trovo che ogni *specie* di fascio di quadriche (cioè ogni distribuzione di divisori elementari) è caratterizzata: 1° dal numero delle quadriche specializzate 1, 2, 3,... volte che esso contiene; 2° dalla posizione che ognuna di queste quadriche ha rispetto alle altre quadriche del fascio. Il riconoscere questa posizione dal solo esame dei gradi dei divisori elementari relativi alla quadrica specializzata che si considera è forse la cosa più difficile; tuttavia io ho trovato alcune regole generali che bastano per quello scopo, come mostrano poi le applicazioni che ne faccio nel § 4 ad una classificazione completa della quartica intersezione di quadriche nello spazio ordinario, e nella 3ª parte del mio lavoro ad una nuova classificazione dei complessi quadratici. Nello stesso tempo che ho trovato che cosa siano le varie *specie* di quartiche nello spazio ad $n-1$ dimensioni, il teorema di Weierstrass mi dà per ciascuna specie gl'invarianti assoluti ad essa relativi, dei quali assegno un'interpretazione geometrica semplicissima (**).

Nel § 5 studio la schiera di quadriche e la sviluppabile ad essa circoscritta; le singolarità a cui questa può dar luogo nello spazio ad $n-1$ dimensioni, sono un primo esempio della estensione immensa che deve prendere la teoria delle singolarità delle superficie quando dallo spazio ordinario si passerà allo spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

Finalmente, nel § 6, studio la geometria delle quartiche segnate su una quadrica fissa, e particolarmente i sistemi di quartiche *omofocali*; questi sistemi danno luogo a vari spazi *singolari* sulla quadrica fissa, i quali per lo spazio ordinario sono costituiti soltanto dalle 8 generatrici tangenti comuni di tutte le quartiche, mentre nella geometria della retta forniranno le rette singolari (dei vari ordini) di una serie omofocale di complessi quadratici.

(*) Applicando invece il teorema di Weierstrass in tutta la sua generalità, cioè per le forme bilineari, si ottiene una classificazione delle coppie di connessi bilineari, vale a dire delle omografie in uno spazio ad $n-1$ dimensioni. Di questa classificazione mi occuperò forse in un altro lavoro, mostrando come anche per essa si possa evitare l'uso delle forme canoniche. Per lo spazio ordinario, e basandosi appunto su queste forme canoniche, questa classificazione insieme con quella del complesso tetraedrale relativo all'omografia stessa è già stata fatta da Loria.

(**) Dalla classificazione delle quadriche in uno spazio ad $n-1$ dimensioni si può trarre immediatamente la classificazione di quelle superficie di 4° ordine in uno spazio ad $n-2$ dimensioni, che sono dotate di conica (spazio quadratico ad $n-4$ dimensioni) doppia, poichè per avere una tal superficie basta proiettare da un punto qualunque dello spazio ad $n-1$ dimensioni una quartica su uno spazio ad $n-2$ dimensioni, come risulta dalle cose che vedremo nel § 4 della 1ª parte. Una serie di quartiche omofocali su una quadrica viene in questo modo proiettata da un punto di questa, secondo un sistema *ortogonale* di superficie di 4° ordine. Questo si riattacca ancora ai lavori citati del Klein ed anche agli studi noti del Darboux sulle ciclidi.

Nella 3ª parte di questa dissertazione io applico, come già dissi, i risultati delle prime due parti alla geometria della retta (*).

L'idea di considerare la geometria della retta come quella di una quadrica a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni si trova, possiamo dire, in tutti i principali lavori che dalla « *Neue Geometrie des Raumes* » di Plücker (1868-69) in poi si scrissero sulla geometria della retta, e più particolarmente negli importanti lavori del Klein e del Voss. Quanto al Klein basti ricordare quel bellissimo scritto « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* » (*Math. Ann. Bd. V*), che in poche pagine contiene un gran numero di concetti fecondi, di cui alcuni già abbiamo citati. Però, sebbene l'idea non sia nuova, pure si può dire, se ben si osserva, che essa non fu ancora posta sistematicamente ad effetto. Si noti inoltre che la teoria dei complessi quadratici svolta dal Klein nella sua memoria, ormai classica: « *Zur Theorie der Complexe ersten und zweiten Grades* » (*Math. Ann. Bd. II*) si basa quasi sempre sulla possibilità della riduzione delle due equazioni di un complesso quadratico a somme di quadrati, cioè sulla esistenza di 6 complessi lineari *fondamentali* pel complesso quadratico e a due a due involutori; e quindi cessano di valere nella massima parte dei casi le dimostrazioni ivi date, quando il complesso quadratico non sia più quello generale. In particolare non si conosce più nulla intorno alla serie (omofocale) dei complessi quadratici aventi la stessa superficie singolare, intorno ai complessi lineari *fondamentali*, cioè rispetto ai quali il complesso quadratico corrisponde a se stesso, e via dicendo.

Ora a me è riuscito, considerando appunto la geometria della retta come quella di una quadrica a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni, di fare la teoria generale del complesso quadratico, della sua superficie singolare, della sua serie omofocale, dei suoi complessi lineari fondamentali, ecc., qualunque sia la specie del complesso quadratico; ed anzi così facendo io trovo parecchie proprietà che distinguono tra loro le varie specie, mentre il Weiler si era quasi soltanto occupato nella sua classificazione delle proprietà che distinguono le superficie singolari: io ottengo pure queste proprietà, ma colla pura geometria della retta e non col cercare, come fa il Weiler, ogni volta l'equazione di quella superficie in coordinate di punti. Insieme con questo studio faccio pure quello analogo per

---

(*) È questa terza parte della nostra dissertazione che, come già avvertimmo, verrà pubblicata in un'altra memoria. — (Gennaio 1881).

le congruenze quadratiche e per le rigate biquadratiche, considerando il complesso e la congruenza lineari di rette, come quadriche risp. a 3 ed a 2 dimensioni.

Nel § 1, partendo dalla definizione della retta, giungo alle proprietà più semplici di questa e del punto e piano dello spazio ordinario. Questi due enti, punto e piano, compaiono nella geometria della retta come l'analogo dei due sistemi di generatrici di una quadrica ordinaria, e su ciò appunto si basa la legge di dualità. Punti e piani sono cioè le due specie diverse di sistemi lineari doppiamente infiniti di rette, come i fasci sono i sistemi lineari semplicemente infiniti; e questo modo d'introdurre i punti e i piani nella pura geometria della retta presenta molti vantaggi, ed è il solo che sia veramente logico. Nel § 2 ottengo come caso particolare della geometria di una quadrica nello spazio ad $n-1$ dimensioni la teoria dei complessi e congruenze lineari e delle rigate quadriche, i loro casi speciali e la relazione d'involuzione tra essi. Nel § 3 do un breve cenno sulla teoria generale delle rigate e considero specialmente le rigate cubiche e quartiche, come quelle che sono importanti anche nel seguito del lavoro. Nel § 4 entro finalmente nella teoria del complesso quadratico, della congruenza quadratica e della rigata biquadratica, le cui proprietà si ottengono come casi particolari da quelle delle quartiche ad un numero qualunque di dimensioni. Sono subito condotto in questo modo a considerare rispettivamente i complessi lineari, le congruenze lineari e le rigate quadriche che sono *fondamentali* per quelle serie quadratiche di rette. Inoltre, il § 2 della 2ª parte, conduce immediatamente alla generazione del complesso quadratico mediante stelle reciproche di complessi lineari, della congruenza quadratica e della rigata biquadratica mediante fasci proiettivi risp. di congruenze lineari e di rigate quadriche. Così trovo pure le rigate quadriche contenute in un complesso ed in una congruenza quadratici (in numero risp. di ∞^4 e di ∞^1) ed i risultati ottenuti, concordano perfettamente con quelli ottenuti per tutt'altra via dallo Schur nella sua importante « *Inauguraldissertation* » (1879) « *Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe* 1 *und* 2 *Grades* ». Ottengo anche immediatamente quali sono i complessi quadratici generabili con fasci proiettivi di complessi lineari. Nel § 5 studio la polarità rispetto ad un complesso quadratico e sono condotto assai semplicemente ad alcune proposizioni dovute allo Schur e ad altre del Bertini e di Klein. Cito particolarmente il teorema sulle rette che sono polari delle loro polari: il Klein nella memoria citata lo aveva solo enunciato

pel complesso quadratico più generale: a me riesce di darne una dimostrazione semplicissima colle solite considerazioni della pura geometria della retta, dimostrazione che si estende anche a tutti i casi che può presentare il complesso. Nel § 6 considero le rette singolari dei vari ordini di un complesso quadratico qualunque, la superficie singolare e la serie omofocale. I complessi quadratici di questa serie hanno tutti la stessa superficie singolare, ma, com'io noto, non in tutti i casi questa basta a determinare la serie. Quello che importa veramente considerare in una serie omofocale sono, più ancora che la superficie singolare, quelle che io chiamo *focali* e che possono essere congruenze quadratiche o rigate biquadratiche, o quaterne di rette. Esse dànno tutte le principali proprietà della serie omofocale di complessi quadratici, la classificazione di questi, i loro invarianti assoluti, ecc., e sono l'analogo in un certo senso delle coniche doppie della sviluppabile circoscritta ad una schiera di quadriche nello spazio ordinario e dei vertici di coni quadrici in cui questa sviluppabile può degenerare. Per ogni specie di complessi quadratici e quindi di loro serie omofocale mostro, come si ottenga immediatamente il grado di questa serie, cioè il numero dei complessi di essa passanti per una retta arbitraria dello spazio (numero che è $\leqq 4$) ed anche il numero degl'invarianti assoluti di ogni complesso e della serie omofocale, e quale sia il significato geometrico di questi invarianti assoluti. Tutti questi risultati sono nuovi. Indi, considerando la superficie singolare dimostro in due modi diversi, che mi paiono assai notevoli, il teorema di Klein sull'uguaglianza dei rapporti anarmonici dei 4 punti e 4 piani singolari passanti per una retta arbitraria, ed anche un teorema semplicemente enunciato dal Voss, che lo completa. Poscia mostro in quali relazioni stanno le rette singolari dei vari ordini dei complessi quadratici omofocali colla superficie singolare di questi, qualunque ne sia del resto la specie.

Indi faccio le ricerche analoghe a quelle dei §§ 5 e 6, nel § 7 per le congruenze quadratiche e nel § 8 per le rigate biquadratiche. Nel § 7, dopo la teoria della polarità rispetto ad una congruenza quadratica, teoria già svolta in parte dallo Schur nel lavoro citato, passo a considerare la superficie focale della congruenza quadratica, la quale, qualunque sia la specie di questa è sempre (come io ho dimostrato) superficie singolare per una serie omofocale di complessi quadratici. E qui si presentano le rette singolari di 1° e 2° ordine di una congruenza quadratica, la *curva singolare* di questa (analogo della *superficie singolare* di un complesso quadratico), e la *serie omofocale* di congruenze quadratiche contenute in

un complesso lineare, colle sue *focali* (rigate biquadratiche, o, per eccezione, quaterne di rette). La teoria di questa serie omofocale è nuova; io la ottengo direttamente e quindi da essa si potrebbe ottenere colla rappresentazione di Noether e di Lie del complesso lineare nello spazio di punti tutta la teoria del sistema omofocale di ciclidi studiato da Darboux, Moutard, ecc., ed anche i casi particolari di questo sistema. Per ultimo ritrovo e completo alcune proprietà della congruenza quadratica dovute al Caporali. Nel § 8 studio la rigata biquadratica, i suoi punti e piani cuspidali e le sue generatrici singolari, e considero una serie (*omofocale*) di tali rigate, le quali hanno la proprietà di aver comuni punti e piani cuspidali: tra esse vi sono in generale 4 rigate quadriche doppie, che sono precisamente le rigate quadriche fondamentali di tutte quelle rigate biquadratiche. Ognuna di queste ha comuni colle 4 rigate quadriche fondamentali 4 quaterne di rette, che sono *generatrici iperboliche* di quella rigata biquadratica; già il Voss aveva dimostrato che il numero di queste generatrici è 16, ma io mostro pure in tal modo come esse si raggruppano.

Finalmente, nel § 9, tratto la classificazione dei complessi quadratici, la quale comprende quella delle congruenze quadratiche e rigate biquadratiche, e viceversa è data (quasi completamente) dalla classificazione di queste. Da tutta la teoria svolta nei §§ precedenti risultano varie proprietà caratteristiche delle diverse specie di complessi quadratici, e queste specie vengono ad avere una divisione in classi assai naturale, e che s'accorda sia colla pura geometria della retta, sia colle particolarità della superficie singolare come luogo di punti e inviluppo di piani. Evito così i difetti che ho rimproverato alla classificazione del Weiler, e correggo alcuni errori che sfuggirono a questo. Così, ve n'è uno importante che egli fa sempre per tutta la classe di complessi quadratici, la cui superficie singolare è una quadrica doppia (generale o degenerata) e di cui si sarebbe accorto se avesse considerato, com'io faccio, la serie omofocale di complessi quadratici e la loro comune quaterna focale. Finisco col notare come la considerazione degli invarianti assoluti (i quali dànno luogo a diversità tra complessi quadratici di una stessa specie) conduca a trovare le principali proprietà che appunto possono distinguere tra loro i complessi quadratici di una stessa specie, mostrando ciò sul complesso di Battaglini, la cui superficie singolare (*tetraedroide* di Cayley) ha proprietà, che si deducono con quella considerazione, da quelle note della superficie di Kummer.

Quanto al metodo seguito nella presente dissertazione esso è alternativamente sintetico ed analitico. Avrei potuto seguire puramente il metodo sintetico, ma così avrei incontrato alcuni inconvenienti, principalmente quello di non poter più cercare del teorema analitico di Weierstrass, l'interpretazione geometrica per la classificazione delle quartiche; poichè in questo lavoro la mancanza di tempo non mi consentiva di affrontare la ricerca sintetica diretta del teorema geometrico, che equivale al detto teorema analitico, ricerca che si presenta come assai difficile, ma nello stesso tempo attraentissima, e che farò probabilmente altrove. Così pure ho dovuto limitarmi in questo studio, salvo qualche breve cenno, alle quartiche segnate su una quadrica e quindi alle applicazioni ai complessi quadratici; ma i metodi svolti si possono applicare a spazi algebrici qualunque contenuti in una quadrica a più dimensioni e quindi in particolare ad una teoria sintetica dei complessi algebrici di rette, dei sistemi di rette e delle rigate di gradi qualunque; ed anche queste teorie potranno formare oggetto di nuovi lavori. Il campo che rimane da coltivare è immenso, ma l'interesse che esso presenta non è inferiore alla sua vastità: basti questo solo esempio della geometria su una quadrica ad un numero qualunque di dimensioni, la quale, quando sia completa, darà come caso particolare tutta la geometria della retta, ossia la geometria *proiettiva* dello spazio ordinario, e darà pure mediante una proiezione (come ingegnosamente notarono Klein e Darboux) tutta la geometria *metrica, euclidea* e *non-euclidea,* dello spazio ordinario.

Torino, 27 Aprile 1883.

INTRODUZIONE

1. Un insieme continuo qualunque di enti, il cui numero sia m volte infinito (cioè tra i quali ve ne sia in generale un numero finito che soddisfino ad m condizioni semplici qualunque date), dicesi formare uno *spazio ad m dimensioni*, di cui quegli enti diconsi *elementi*.

Uno spazio qualunque ad m dimensioni dicesi *lineare* quando si possono attribuire a ciascun suo elemento i valori numerici (reali od imaginari) di m quantità in modo che, *senza alcuna eccezione*, ad ogni gruppo arbitrario di valori di queste corrisponda un solo elemento di quello spazio, e viceversa ad ogni elemento di questo corrisponda un solo determinato gruppo di valori di quelle. I valori di queste quantità corrispondenti a quell'elemento si dicono *coordinate* di questo. Rappresentandole coi rapporti di m altre quantità ad una $(m+1)$esima, queste costituiranno le $m+1$ *coordinate omogenee* dell'elemento dello spazio considerato, cosicchè ogni elemento di questo, senza eccezioni, sarà individuato dai rapporti mutui di queste coordinate omogenee e servirà viceversa ad individuare questi loro rapporti (*).

In uno spazio lineare ad m dimensioni è chiaro, che a determinarne ogni elemento si potranno prendere, invece delle $m+1$ coordinate omogenee, altre $m+1$ quantità che siano proporzionali a date funzioni lineari omogenee indipendenti di quelle coordinate, poichè date quelle $m+1$ quantità saranno pure determinate in modo unico le $m+1$ coordinate omogenee o meglio i loro rapporti. Dunque, per definizione, anche quelle $m+1$ quantità si potranno assumere come coordinate omogenee dell'elemento di quello spazio; cioè, dato un sistema di coordinate omogenee per gli elementi di uno spazio lineare, si possono assumere in loro vece come altro sistema di coordinate omogenee degli stessi elementi delle quantità proporzionali a funzioni lineari omogenee delle coordinate primitive. Questa sostituzione dicesi *trasformazione di coordinate*. Ma, se si considerano invece quegli elementi dello spazio considerato i quali hanno

(*) Va solo fatta eccezione pel caso in cui tutte le coordinate omogenee date sono uguali a 0, oppure uguali ad ∞ : allora la definizione stessa delle coordinate omogenee prova che non vi è più un elemento determinato dello spazio corrispondente a quei valori delle coordinate.

per coordinate precisamente nel primitivo sistema i valori delle funzioni lineari omogenee considerate in cui si sian sostituite le coordinate degli elementi dello spazio, si ha così una corrispondenza univoca, che diremo *proiettività*, tra questi elementi. Dei raggruppamenti di elementi dello spazio lineare noi considereremo solo quelle proprietà, che non mutano per una trasformazione qualunque di coordinate, cioè (poichè, come vedemmo, le due cose si equivalgono) che valgono pure per i raggruppamenti di elementi che corrispondono a quelli in una proiettività qualunque dello spazio; vale a dire noi ne considereremo soltanto le *proprietà proiettive*.

2. Consideriamo uno spazio lineare qualunque ad $n-1$ dimensioni. Chiameremo *punto* ogni suo elemento, qualunque ne sia la natura (la quale per noi non ha assolutamente importanza). Ogni spazio ad $m-1$ dimensioni, i cui elementi siano punti, sarà perciò contenuto in quello spazio lineare, sicchè sarà $m \leqq n$. Tra questi spazi di punti contenuti nello spazio lineare dato sono notevoli quelli che soddisfano anch'essi alla condizione della linearità. Indichiamo con $x_1, x_2 \ldots x_n$ le n coordinate omogenee di un punto dello spazio dato ad $n-1$ dimensioni, e con $y_1, y_2, \ldots y_m$ le m coordinate omogenee di un punto in uno spazio lineare qualunque ad $m-1$ dimensioni contenuto in quello: è chiaro che per tutti quei punti le coordinate x saranno funzioni omogenee determinate delle y. Noi restringeremo ora il significato dato prima alla parola *lineare* e intenderemo per spazio lineare ad $m-1$ dimensioni *contenuto* nello spazio di punti l'insieme di tutti quei punti le cui coordinate x_i, considerate in quest'ultimo spazio sono funzioni *lineari* omogenee date di m parametri $y_1, y_2, \ldots y_m$ (mentre nel senso più generale dell'espressione *spazio lineare*, potrebbe essere lineare lo spazio costituito dall'insieme di quei punti, anche quando queste funzioni omogenee date delle y fossero di un grado qualunque). Di qui segue immediatamente che affinchè le x siano coordinate dei punti di uno spazio lineare ad $m-1$ dimensioni occorre e basta che esse soddisfino a certe $n-m$ equazioni lineari omogenee.

Risulta così come lo spazio lineare ad $n-1$ dimensioni dato contenga altri spazi lineari ad un minor numero di dimensioni, e in qual modo tutti questi si ottengano. Ogni spazio lineare di punti ad $n-2$ dimensioni, che chiameremo pure per brevità *piano*, sarà costituito dai punti le cui coordinate x soddisfano ad una data equazione lineare omogenea, che dicesi *equazione del piano*, ovvero dai punti le cui coordinate si possono rappresentare come funzioni lineari omogenee di altre $n-1$ quantità variabili (coordinate dei punti *sul* piano). Ogni spazio lineare, ad $n-3$ dimensioni, si comporrà dei punti le cui coordinate x si possono rappresentare come funzioni lineari omogenee di altre $n-2$ variabili, ossia soddisfano a due date equazioni lineari omogenee, e quindi anche a quelle ∞^1 che si hanno componendo queste linearmente. E di quì segue che un tale spazio lineare ad $n-3$ dimensioni è l'insieme dei punti comuni, od *intersezione*, di ∞^1 piani aventi appunto risp. quelle equazioni. In generale uno spazio lineare ad $n-k-1$ dimensioni di punti si comporrà di quei punti le cui coordinate x si possono rappresentare come funzioni lineari omogenee di $n-k$ nuove variabili, ossia le cui coordinate x soddisfano a k equazioni lineari omogenee e quindi a quelle ∞^{k-1} che se ne deducono componendole linearmente, donde segue che un tale spazio lineare di punti può riguardarsi come l'intersezione di ∞^{k-1} piani.

3. Indicheremo con S'_m ogni spazio lineare di punti ad m dimensioni, cosicchè tutti i punti costituiscono un S'_{n-1}, che rappresenteremo semplicemente con S. Un piano di punti sarà rappresentato da S'_{n-2}, ed un S'_0 sarà un punto unico. Un piano qualunque è individuato, come vedemmo, dalla sua equazione $\Sigma_i \xi_i x_i = 0$, nella quale le ξ_i sono n coefficienti dati. Il piano è dunque individuato da queste n quantità o meglio dai loro rapporti e serve viceversa ad individuarli. Ne segue, per definizione, che i piani di punti dello spazio S lineare ad $n-1$ dimensioni si possono a loro volta considerare come gli elementi di uno spazio Σ pure lineare e ad $n-1$ dimensioni; le ξ_i saranno allora le coordinate omogenee di un piano considerato come elemento di Σ. Un'equazione lineare omogenea qualunque tra le coordinate ξ di un piano assoggetta questo a passare per un punto fisso, le cui coordinate omogenee sono i coefficienti delle ξ_i in quell'equazione. Si potrà dunque in questo senso chiamare quella l'*equazione del punto* in coordinate di piani. I due spazii lineari S e Σ, aventi per elementi il 1° i punti, il 2° i piani stanno dunque tra loro in questa mutua dipendenza che gli spazi lineari ad $n-2$ dimensioni contenuti nell'uno sono gli elementi dell'altro spazio e viceversa. Questo dimostra la *legge di dualità*, cioè da qualunque proposizione dimostrata se ne deduce un'altra che è pur vera facendo in quella lo scambio delle parole *punto* e *piano*.

In particolare valgono dunque ancora le proposizioni dedotte con quello scambio da quelle del N° precedente. Indicheremo con Σ'_m ogni spazio lineare di piani ad m dimensioni, ed avremo allora:

Ogni S'_k di punti è l'intersezione comune ad un Σ'_{n-2-k} di piani.

Due tali spazi lineari S'_k, Σ'_{n-2-k} di punti e di piani si diranno spazi *congiunti*.

4. Dati $k+1$ punti di un S'_k risulta dal N° 2 che questo è determinato. Se si indicano con $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, ... $x_i^{(k+1)}$ (dove $i=1, \ldots n$) le coordinate di quei punti, è chiaro che quelle di un altro punto qualunque del S'_k si potranno rappresentare con

$$x_i = l^{(1)} x_i^{(1)} + l^{(2)} x_i^{(2)} + \ldots + l^{(k+1)} x_i^{(k+1)},$$

dove le quantità $l^{(1)}$, $l^{(2)}$, ... $l^{(k+1)}$ varieranno dall'un punto all'altro e si potranno considerare come le $k+1$ coordinate omogenee di un punto nello spazio a k dimensioni S'_k considerato.

Similmente dati $n-1-k$ piani ξ', ξ'', ... $\xi^{(n-1-k)}$, essi determinano un Σ'_{n-2-k} di piani tale, che uno qualunque di essi avrà coordinate che si possono rappresentare con

$$\xi_i = \lambda' \xi'_i + \lambda'' \xi''_i + \ldots + \lambda^{(n-1-k)} \xi_i^{(n-1-k)},$$

dove le λ', λ'', ... $\lambda^{(n-1-k)}$ si potranno assumere come coordinate di un piano qualunque in quel Σ'_{n-2-k}. L'S'_k di punti congiunto a questo Σ'_{n-2-k} di piani è evidentemente costituito dai punti x che soddisfano alle $n-1-k$ equazioni:

$$\Sigma_i \xi'_i x_i = 0, \qquad \Sigma_i \xi''_i x_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma_i \xi_i^{(n-1-k)} x_i = 0.$$

Dati $k+1$ punti $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... $x^{(k+1)}$ soddisfacienti a queste equazioni, cioè appartenenti al S'_k, tutti gli altri saranno determinati nel modo detto.

Come di ogni piano od S'_{n-2} di punti si possono considerare le coordinate e prendere tutti gli S'_{n-2} come elementi di uno spazio, diverso da quello di punti, così si può fare per gli S'_k di punti, qualunque sia k (purchè minore di $n-1$). *Clebsch* mostrò in fatti (*) come si possano prendere per coordinate del S'_k determinato dai $k+1$ punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(k+1)}$ i determinanti d'ordine $k+1$ formati colla matrice

$$\left|\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(k+1)} & x_2^{(k+1)} & \ldots & x_n^{(k+1)} \end{matrix}\right|$$

e analogamente si possono avere le coordinate degli spazi lineari di piani determinati da piani dati. E come ogni tale spazio ha uno spazio congiunto di punti e viceversa, Clebsch dimostrò che se lo spazio Σ'_{n-2-k} di piani congiunto al suddetto S'_k è determinato dagli $n-1-k$ piani $\xi', \xi'', \ldots \xi^{(n-1-k)}$, sicchè questi hanno quel S'_k per intersezione, i determinanti della suddetta matrice sono proporzionali ai complementari della matrice

$$\left|\begin{matrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \ldots & \xi'_n \\ \xi''_2 & \xi''_2 & \ldots & \xi''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^{(n-1-k)} & \xi_2^{(n-1-k)} & \ldots & \xi_n^{(n-1-k)} \end{matrix}\right|$$

cosicchè le coordinate di un S'_k e quelle del Σ'_{n-2-k} congiunto si possono considerare come uguali.

Però queste coordinate di spazii lineari, il cui numero è $\binom{n}{k+1}$, non sono più indipendenti tra loro, come le coordinate di punti e quelle di piani. Ed invero il numero degli S'_k si riconosce facilmente essere soltanto $\infty^{(k+1)(n-k-1)}$. Quelle coordinate sono effettivamente legate tra loro da certe relazioni quadratiche di cui $\binom{n}{k+1}-(k+1)(n-k-1)-1$ sono indipendenti (**). Di qui segue che lo spazio costituito dagli S'_k non è lineare, salvo che pei casi di $k=0$ (spazio di punti) e di $k=n-2$ (spazio di piani).

5. Due spazi lineari S'_m, $S'_{m'}$ di punti essendo determinati rispettivamente da $m+1$ e $m'+1$ punti appartengono, quando sia $m+m'\leqq n-2$, al $S'_{m+m'+1}$ determinato da quegli $m+m'+2$ punti, e non hanno evidentemente in generale alcun punto comune. Ma può accadere in ogni caso, qualunque siano m, m', che quegli S'_m, $S'_{m'}$ abbiano comune un S'_a (essendo a minore di m, m'): siccome allora si

(*) V. *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, XVII Band, 1872) §§ 1 e 2.

(**) Queste relazioni quadratiche furono date dal Prof. D'Ovidio nella memoria « *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari* » (Atti dell'Acc. d. Scienze di Torino, vol. XII 1877).

possono prendere su questo $a+1$ tra quegli $m+1$ e $m'+1$ punti che individuano gli S'_m, $S'_{m'}$, il numero dei punti che determinano questi si ridurrà ad $m+m'+1-a$, e per essi si può far passare un $S'_{m+m'-a}$, il quale conterrà evidentemente quegli S'_m, $S'_{m'}$. Viceversa, se per due spazi lineari qualunque risp. ad m e m' dimensioni si può far passare uno spazio pure lineare ad $m+m'-a$ dimensioni, quelli si taglieranno (qualunque siano m, m') in uno spazio lineare ad a dimensioni. Ponendo $a=m+m'-n+1$ potremo dunque dire che, in generale, nello spazio S ad $n-1$ dimensioni due spazi lineari S'_m, $S'_{m'}$ non hanno punti comuni se $m+m'<n-1$, altrimenti hanno comune un $S'_{m+m'-n+1}$. In casi particolari però potranno aver comune uno spazio a maggior numero di dimensioni, ma allora saranno contenuti in uno spazio lineare di punti a numero di dimensioni inferiore d'altrettanto ad $n-1$ (*).

Queste considerazioni si trasportano immediatamente per dualità agli spazi lineari di piani contenuti in Σ.

Il *Veronese* chiama nello spazio S *duali* due spazi lineari i cui numeri di dimensioni m, m' siano tali che $m+m'=n-2$. Tali sono in particolare il punto ($m=0$) ed il piano di punti ($m'=n-2$). Quando n è un numero pari esiste uno spazio lineare duale a se stesso: quello ad $\frac{n-2}{2}$ dimensioni. Due spazii lineari duali di punti non hanno in generale, per quanto dicemmo, alcun punto comune. Possono però aver comune per eccezione uno spazio lineare S'_a, ed in tal caso sono contenuti in un S'_{n-2-a}, cioè in uno spazio lineare duale a questo; e viceversa.

6. Nello spazio di punti S ad $n-1$ dimensioni diremo che uno spazio qualunque di punti ad m dimensioni S_m è uno *spazio algebrico d'ordine* g, quando ogni spazio lineare di punti ad $n-1-m$ dimensioni ha in generale comuni con esso g punti. Indicheremo un tale spazio algebrico, quando vorremo porne in evidenza l'ordine, con S^g_m, cosicchè gli spazi lineari, essendo di 1° ordine, saranno rappresentati da S'_m, come appunto facemmo finora. Similmente diremo che uno spazio ad m dimensioni di piani Σ_m è uno *spazio algebrico di classe* g, ossia è un Σ^g_m, se in generale sono g quei suoi piani che appartengono ad uno spazio lineare qualunque di piani ad $n-1-m$ dimensioni, cioè che passano per uno spazio lineare qualunque ad $m-1$ dimensioni di punti. In particolare chiameremo *superficie-luogo* o *superficie-inviluppo* uno spazio ad $n-2$ dimensione di punti o di piani, cosicchè il piano sarà una superficie-luogo di 1° ordine ed il punto una superficie-inviluppo di 1ª classe. Un'equazione di grado g in coordinate di punti rappresenta una superficie-luogo d'ordine g; un'equazione di grado g tra le coordinate di un piano rappresenta una superficie-inviluppo di classe g. Un numero qualunque k di equazioni dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_k$ in coordinate di punti (o di piani) determinano uno spazio algebrico di punti (o piani) ad $n-1-k$ dimensioni dell'ordine (o classe) $g_1 g_2 \ldots g_k$, come si scorge immediatamente aggiungendo a quelle equazioni altre $n-1-k$ equazioni lineari. Tuttavia

(*) Per le considerazioni svolte in questo numero, v. Veronese « *Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* » Mathematische Annalen, Bd. XIX (V. pag. 163-165).

vi sono spazi algebrici di varie dimensioni non rappresentabili in questo modo con equazioni.

Due spazi algebrici S_m, $S_{m'}$ di ordine qualunque non si tagliano in generale se $m+m'<n-1$, ma quando $m+m'\geqq n-1$ si tagliano in generale in uno spazio algebrico $S_{m+m'-n+1}$, il cui ordine sarà il prodotto degli ordini di quelli (*). Di qui si passa facilmente al caso di un numero qualunque di spazi algebrici.

7. Uno spazio algebrico ad m dimensioni d'ordine g ha solo comune in generale con un S'_k un $S^g_{m+k-n+1}$ (supposto $m+k\geqq n-1$); se quel S'_k ne contenesse ancora un punto fuori di questo $S^g_{m+k-n+1}$, taglierebbe l' S^g_m in uno spazio ad una dimensione (almeno) di più, cioè ad $m+k-n+2$ dimensioni.

Ciò posto cerchiamo quale sia la condizione necessaria e sufficiente affinchè un S^g_m (che supponiamo non si scinda) sia contenuto in un S'_i, essendo $i>m$ e $<n$. Ogni S'_{n-1-m} taglierebbe in tal caso l' S^g_m in g punti contenuti nel S'_{i-m} in cui taglierebbe l' S'_i. Viceversa, se supponiamo che ogni S'_{n-1-m} tagli l' S^g_m in g punti di un S'_{i-m}, ne seguirà per le cose premesse che ogni S'_{n-m} taglierà l' S^g_m in un S^g_1 di un S'_{i-m+1}, che ogni S'_{n-m+1} lo taglierà in un S^g_2 di un S'_{i-m+2}, e così via; e finalmente che l' S^g_m sta in un S'_i. Dunque la condizione cercata, perchè questo accada, è che ogni S'_{n-1-m} tagli l' S^g_m in g punti di un S'_{i-m}. Ora, siccome g punti stanno sempre in un S'_{g-1}, così quella condizione è sempre soddisfatta quando $i-m\geqq g-1$, cioè $i\geqq m+g-1$. Possiamo dunque conchiudere la seguente importante proposizione (**):

Ogni S^g_m è sempre contenuto in uno spazio lineare ad $m+g-1$ dimensioni (ma può anche stare in uno spazio lineare ad un numero qualunque compreso tra m ed $m+g$ di dimensioni).

Questo teorema ha molta importanza nello studio degli spazi algebrici a più dimensioni, perchè fornisce un primo criterio di classificazione per gli spazi di ordine g dato. Da esso segue immediatamente ponendo $g=2$:

Ogni spazio di 2° ordine ad m dimensioni è contenuto in uno spazio lineare ad $m+1$ dimensioni.

Ponendo invece $m=1$ si ha:

Ogni S^g_1 è contenuto in uno spazio lineare ad un numero di dimensioni non superiore a g.

Quindi gli S^g_1 si possono distinguere in $g-1$ specie a seconda che stanno in un S'_g, od in un S'_{g-1}, od in un S'_{g-2}, ... o finalmente in un S'_2.

(*) L'Halphen dimostrò, credo pel primo, questo teorema sull'ordine dell'intersezione di due spazi algebrici ad un numero qualsiasi di dimensioni, che costituisce un'importante generalizzazione del teorema di Bézout (V. Halphen, *Recherches de géométrie à n dimensions*. Bulletin de la Société mathématique de France, tome II, année 1873-74, pag. 40).

(**) Questo teorema si trova enunciato senza dimostrazione nel lavoro citato del Veronese, p. 167; il caso particolare corrispondente ad $m=1$ era già stato dato prima dal Clifford nella sua importante memoria « *On the classification of Loci* » (*Philosophical Transactions* 1878, vol. 169, pag. 663-681) alla pag. 664 con una dimostrazione sintetica riprodotta dal Veronese (ibid. pag. 166).

Ad esempio vi sono 2 specie di S^3_1: quella che sta in un S'_3 e quella che sta in un S'_2. Nello spazio ordinario di punti esse sono la cubica sghemba e la cubica piana. — Invece vi sono 3 specie di S^4_1: quella che sta in un S'_4, quella che sta in un S'_3 e quella che sta in un S'_2. Nella geometria della retta vedremo che esse dànno rispettivamente le 3 specie di rigate di 4° grado: quella che sta in un complesso lineare (ed ha una cubica doppia), quella che sta in una congruenza lineare (ed ha due rette doppie) e finalmente il cono di 4° ordine o la curva piana di 4ª classe.

8. Tutti gli spazi lineari ad uno stesso numero di dimensioni, qualunque siano i loro elementi, si possono riguardare come identici tra loro, poichè, come già notammo, nello studiarli non si considera la natura di quegli elementi, ma si tien solo conto della proprietà di linearità e del numero di dimensioni dello spazio formato dagli elementi stessi. Ne segue, che la teoria delle forme lineari di 1ª, 2ª e 3ª specie, p. e., della retta, del piano e dello spazio ordinario considerati come punteggiati, essendo già nota, si può farne uso senz'altro per tutti gli spazi lineari ad 1, 2, 3 dimensioni contenuti nello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni che si vuol studiare in generale. Quindi si potrà far uso, ad esempio, della teoria della proiettività, dei gruppi armonici, dell'involuzione, ecc., nelle forme di 1ª specie.

PARTE PRIMA

GEOMETRIA DI UNA QUADRICA

---

§ I.

Polarità. - Quadriche generali e specializzate.

9. Un'equazione quadratica tra le n coordinate omogenee $x_1, \dots x_n$ di punti

$$\varphi(x) \equiv \Sigma_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n), \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

rappresenta un S^2_{n-2} o *quadrica* nello spazio ad $n-1$ dimensioni di punti S.

Come i coefficienti di quell'equazione sono $\frac{n(n+1)}{2}$, così le quadriche dello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni sono in numero $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ volte infinito, sicchè per $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ punti arbitrari di quello spazio passa in generale una quadrica determinata (*).

10. Due punti qualunque x, x' diconsi *coniugati* rispetto alla quadrica φ se sono armonici coniugati rispetto ai due punti in cui l'S'_1 che li congiunge taglia φ. La condizione, perchè ciò accada, è che l'equazione

$$\varphi(x + \lambda x') = 0 \ ,$$

che determina quei due punti, abbia le due radici uguali e di segno contrario (V. n° 8), vale a dire è:

$$\varphi(x, x') \equiv \Sigma_{ik} a_{ik} x_i x'_k = 0 \ .$$

(*) *In generale* soltanto. Per $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - k$ punti arbitrari dello spazio passano ∞^k quadriche formanti un sistema lineare k volte infinito di quadriche aventi comune un $S^{2^{k+1}}_{n-k-2}$, che è perfettamente determinato da $k+1$ di quelle quadriche. Quindi gli $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ punti, che individuano in generale una quadrica passante per essi, non devono stare su uno di questi spazi $S^{2^{k+1}}_{n-k-2}$ altrimenti la quadrica che li contiene diventa tante volte indeterminata quante sono le unità contenute in k. Queste sono generalizzazioni di teoremi ben noti sulle quadriche, anzi sulle superficie algebriche, dello spazio ordinario e si dimostrano come queste.

Se poniamo

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \Sigma_k a_{ik} x_k ,$$

quell'equazione si potrà scrivere:

$$\varphi(x, x') = \Sigma_i \varphi_i(x) x'_i = 0 .$$

Quindi dato un punto qualunque x dello spazio, i suoi punti coniugati x' rispetto alla quadrica φ costituiscono un piano, le cui coordinate ξ_i sono date da:

(1) .... $\rho\,\xi_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \dots n)$,

e che si dirà *piano polare* del punto x rispetto a φ. Ogni punto x' di questo piano avendo x per un punto coniugato, il suo piano polare passerà per x.

Dalle definizioni date segue pure immediatamente che qualunque spazio lineare S'_m passante per un punto x taglia la quadrica φ ed il piano polare di x rispetto a φ secondo una quadrica S^2_{m-1} ed un S'_{m-1} tali che nel S'_m x ha quel S'_{m-1} per polare rispetto al S^2_{m-1}.

11. Poniamo che il punto x descriva uno spazio lineare qualunque S'_m. Potremo rappresentare le coordinate x_i come funzioni lineari omogenee di $m+1$ nuove variabili, e sostituendole nelle equazioni (1) si vede che anche le coordinate ξ_i del piano polare ξ saranno rappresentate da funzioni lineari omogenee di quelle $m+1$ variabili. Dunque i piani polari dei punti di un S'_m formano un Σ'_m. Essi hanno quindi comune un S'_{n-2-m} di punti (V. n° 3), ed è chiaro che questi sono i punti coniugati simultaneamente a tutti i punti di quel S'_m. Viceversa, i piani polari di quel S'_{n-2-m} di punti formeranno un Σ'_{n-2-m} composto di tutti i piani passanti per quel S'_m, sì che i punti del S'_{n-2-m} avranno per punti coniugati comuni i punti del S'_m. Due tali spazi lineari (duali) di punti S'_m, S'_{n-2-m} si diranno *polari* l'uno dell'altro rispetto alla quadrica φ.

12. Dalla definizione data del piano polare di un punto x e dalle proprietà note dei gruppi armonici risulta, che se x giace sulla quadrica φ, il suo piano polare ξ dato dalle formule (1) passerà pure per x e sarà il *piano tangente* in x a φ, cioè sarà un piano i cui S'_1 passanti per x sono quegli S'_1 che hanno comuni con φ due punti coincidenti in x, cioè che *toccano* φ in questo punto. Viceversa dalle (1) risultando:

$$\rho\,\xi_x = \varphi(x),$$

segue che quando un punto ed il suo piano polare sono in posizione unita, il punto giacerà sulla quadrica φ ed il piano sarà quello tangente nel punto a φ.

Ciò posto, se consideriamo un punto qualunque x' dello spazio, il suo piano polare taglierà la quadrica data φ ad $n-2$ dimensioni in una quadrica ad $n-3$ dimensioni S^2_{n-3}: i piani tangenti a φ nei punti x di questa passeranno per x', e viceversa tutti i piani passanti per x' e tangenti a φ la toccheranno in punti di quel S^2_{n-3}. E più in generale, considerando due spazi lineari di punti S'_m, S'_{n-2-m} polari l'uno dell'altro rispetto a φ; risulta, dalle cose dette, che i piani tangenti a φ

nei punti di questa quadrica, posti sull'uno qualunque dei due, sono precisamente quei piani tangenti di φ i quali passano per l'altro. Così un S'_{n-3} avendo per polare un S'_1, e questo tagliando φ in due punti, segue che per quel S'_{n-3} passano due soli piani tangenti a φ (aventi appunto quelli per punti di contatto). Dunque, in generale, una quadrica oltre a dare coi suoi punti una superficie-luogo di 2° ordine, forma co' suoi piani tangenti una superficie-inviluppo di 2ª classe.

13. Vedemmo che ogni punto x dello spazio ha sempre rispetto a φ un piano polare ξ perfettamente determinato dalle equazioni (1). Viceversa supponiamo che sia dato il piano ξ e vogliasi vedere se esiste un punto x dello spazio, il quale abbia ξ per piano polare. Le equazioni (1), se le ξ_i si suppongono date e si suppongono incognite le x_i, formano un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle $n+1$ quantità x_i e ρ, e servono quindi nel caso più generale a determinare perfettamente, a meno di un fattor comune, le x_i, cosicchè nel caso generale esiste sempre un punto determinato x avente rispetto a φ per polare il piano dato ξ, qualunque questo sia, cioè esiste sempre un determinato *polo* del piano ξ rispetto a φ. Dicendo A_{ik} il subdeterminante complementare dell'elemento a_{ik} nel discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

della forma quadratica φ, è chiaro che la risoluzione delle equazioni (1) rispetto alle x_i come incognite condurrà alle formole:

$$(2) \ldots\ldots \qquad \frac{A}{\rho} x_i = \Sigma_k A_{ik} \xi_k \ .$$

le quali determineranno nel caso più generale il polo x del piano dato ξ rispetto a φ. E se poniamo inoltre:

$$\Phi(\xi, \xi') = \Sigma_{ik} A_{ik} \xi_i \xi'_k \ ; \qquad \Phi_i(\xi) = \Sigma_k A_{ik} \xi_k \ ,$$

ed in particolare poi:

$$\Phi(\xi) = \Sigma_{ik} A_{ik} \xi_i \xi_k = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} & \xi_1 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} & \xi_n \\ \xi_1 & . & \xi_n & 0 \end{vmatrix} ,$$

allora dalle equazioni (1) e (2) seguirà:

$$\varphi(x) = \rho\, \xi_x = \frac{\rho^2}{A} \Phi(\xi) \ ;$$

per cui, se il punto x sta sulla quadrica φ, cioè se ξ è piano tangente a questa, si ha:

$$\Phi(\xi) = 0 \ ,$$

laonde quest'equazione quadratica è quella a cui soddisfano tutti i piani tangenti a φ. Quindi ritroviamo che questi piani costituiscono uno spazio di piani ad $n-2$ dimensioni di 2ª classe Σ^2_{n-2}.

14. Però, come notammo, queste cose valgono solo nel caso più generale. Invero il sistema (1) di n equazioni lineari omogenee nelle $n+1$ quantità x_i e ρ, cioè:

$$(1) \ldots\ldots \qquad \rho\,\xi_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \;,$$

può dar luogo a casi speciali, i quali si otterranno tutti dalla considerazione dei determinanti d'ordine n formati dalla matrice dei coefficienti:

$$(3) \ldots\ldots \qquad \left|\begin{matrix} \xi_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{n} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right| .$$

L'annullarsi di uno qualunque di questi determinanti non dà nulla di notevole, salvo quando quello sia precisamente $\left|\begin{matrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{matrix}\right|$, cioè il discriminante A di φ.

Quando questo si annulla, la risoluzione delle (1) dà $\rho=0$, cioè quelle equazioni verranno a mancare del 1° membro, vale a dire ad essere un sistema di n equazioni omogenee nelle n incognite x_i, sistema però avente il determinante nullo, e che quindi determinerà un sistema, unico in generale (od infiniti sistemi, in casi più speciali) di valori pei rapporti mutui delle x_i; ma questo sistema sarà indipendente dalle ξ_i, poichè queste non compariranno più in quelle equazioni. Dunque quando $A=0$ ad un piano qualunque dello spazio corrisponde in generale come polo rispetto a φ un punto fisso y determinato dalle n equazioni lineari omogenee:

$$(4) \ldots\ldots \qquad a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = 0 \;,$$

(ovvero tutti i punti determinati da queste equazioni se esse formano un sistema indeterminato) sicchè questo punto sarà il solo punto dello spazio pel quale il piano polare rispetto a φ non sia individuato, anzi sia ogni piano dello spazio; come del resto esprimono appunto le (4) dicendo che le coordinate del piano polare di y hanno tutte valori nulli.

15. Come già notammo, il sistema delle n equazioni omogenee (4) può anche essere indeterminato e quindi avere infinite soluzioni. Però ogni punto y soddisfacente ad esso godrà sempre delle proprietà dette, ed inoltre di quella di essere *punto doppio* della quadrica φ, cioè di esser tale che qualunque S'_1 passante per esso taglia φ in due punti coincidenti con y. In fatti, dicendo x un punto qualunque dello spazio, saranno $y_i+\lambda x_i$ le coordinate di un punto qualunque del S'_1 che congiunge x ad y, e quel punto starà su φ se:

$$0=\varphi(y+\lambda x)\equiv\lambda^2\varphi(x)+2\lambda\varphi(x,y)+\varphi(y) \;.$$

Ma dalle (4) segue, qualunque sia x:

$$\varphi(x, y) = 0 \ , \qquad \text{ed in particolare} \quad \varphi(y) = 0 \ ;$$

quindi quella condizione diventa semplicemente

$$\lambda^2 \varphi(x) = 0 \ ,$$

ed è quindi soddisfatta soltanto da $\lambda^2 = 0$, se il punto x non è stato preso su φ. Ora a $\lambda = 0$ corrisponde appunto y nel S'_1 rappresentato da $y + \lambda x$. È dunque provato l'asserto.

Se il punto x fosse stato preso su φ, sicchè $\varphi(x) = 0$, si vede che la condizione perchè il punto $y + \lambda x$ stia su φ sarebbe stata soddisfatta per ogni valore di λ. Dunque abbiamo la seguente importantissima proprietà delle quadriche aventi il discriminante nullo; che congiungendo un punto doppio qualunque della quadrica, ad un suo altro punto qualunque, si ottiene sempre un S'_1 tutto contenuto nella quadrica.

16. Ritornando ora alle equazioni lineari, che determinano il punto x avente un dato piano polare ξ rispetto a φ, supponiamo che nella matrice (3) sia nullo oltre ad A uno qualunque degli altri determinanti d'ordine n: saranno allora nulli tutti, ed il sistema d'equazioni lineari (1) sarà indeterminato, cioè al piano ξ corrisponderanno infiniti poli. Però in tal caso questo piano non è più qualunque nello spazio in generale: dall'annullarsi di tutti quei determinanti segue che, se le quantità y_i si determinano in modo da soddisfare le equazioni (4) sarà pure (finchè non si annullano i subdeterminanti A_{ik} di A):

$$\xi_1 y_1 + \ldots + \xi_n y_n = 0 \ ,$$

cosicchè il piano ξ passa pel punto doppio y di φ.

Viceversa se ξ è un piano qualunque passante per y e quindi soddisfacente a quest'equazione, esso avrà infiniti poli x. A determinare tutti questi poli basterà sopprimere una delle equazioni (1) come superflua, e allora rimarranno $n-1$ equazioni tra cui eliminando ρ si hanno $n-2$ equazioni lineari omogenee tra le x_i. Dunque quei poli x formano un S'_1, il quale naturalmente passerà per y, poichè questo è sempre uno dei poli del piano ξ. Del resto, che i punti posti su un S'_1 passanti pel punto doppio y abbiano comune il piano polare rispetto a φ si vede subito notando che le coordinate del piano polare del punto $y + \lambda x$ sono:

$$\Sigma_k a_{ik}(y_k + \lambda x_k) = \Sigma_k a_{ik} y_k + \lambda \Sigma a_{ik} x_k = \lambda \xi^i \ ,$$

dove ξ_i sono le coordinate del piano polare di x. Dunque questo è pure il piano polare di tutti i punti $y + \lambda x$. Quindi conchiudiamo che una quadrica avente un punto doppio, e per conseguenza di discriminante nullo, gode della proprietà che ogni piano dello spazio ha per polo il punto doppio, ma che i piani passanti per questo hanno infiniti poli costituenti degli S'_1 passanti pure per quello, e viceversa tutti i punti posti su un S'_1 passante pel punto doppio hanno rispetto a quella quadrica lo stesso piano polare.

In particolare i punti della quadrica φ essendo distribuiti, come vedemmo, su degli S'_1 passanti per y, in tutti i punti di un tale S'_1 la quadrica φ avrà lo stesso piano tangente passante per quel S'_1 e quindi anche per y. I piani tangenti a φ in punti diversi da y sono dunque in numero infinito non più $n-2$ volte, ma $n-3$ volte. Essi formano un Σ^2_{n-3} di piani nel Σ'_{n-2} formato dai piani che passano per y. Ma anche tutti questi piani, cioè i piani passanti pel punto doppio y, si potranno evidentemente considerare come tangenti in questo a φ. L'equazione $\Phi(\xi)=0$ nel caso in cui A è nullo si riduce, per un teorema notissimo, a $\xi^2_y=0$, e rappresenta quindi tutti i piani passanti pel punto doppio y, sicchè l'inviluppo di 2ª classe formato in generale dai piani tangenti a φ si riduce appunto in questo caso all'inviluppo di 1ª classe, contato 2 volte, dei piani passanti per y. Ciò conferma le cose dette.

17. Una superficie di 2° ordine può essere più volte specializzata. Noi diremo che una quadrica è *h volte specializzata come luogo* (od anche *cono quadrico di specie h-esima)* quando sono nulli il suo discriminante ed i subdeterminanti di questo degli ordini $n-1$, $n-2$, ... $n-h+1$. Quando la quadrica φ goda di tal proprietà (e per questo basta che si annullino i subdeterminanti d'ordine $n-h+1$, il che si vede facilmente equivalere ad $\frac{1}{2}h(h+1)$ condizioni) allora delle n equazioni lineari omogenee (4), che determinano il punto doppio y di φ, h saranno conseguenza delle rimanenti e quindi vi saranno infiniti punti doppi y giacenti nell'intersezione di $n-h$ piani e formanti quindi uno spazio lineare S'_{h-1}. Prendendone h qualunque, i quali siano y', y'', ..., $y^{(h)}$, sarà per $i=1, 2, \dots n$:

$$\varphi_i(y')=0\,, \quad \varphi_i(y'')=0\,, \quad \dots, \quad \varphi_i(y^{(h)})=0\,,$$

e quindi:

$$\xi_i=\varphi_i(x+\lambda' y'+\lambda'' y''+\dots+\lambda^{(h)} y^{(h)})=\varphi_i(x)\,,$$

il che prova che tutti i punti di un S'_h qualunque passante pel S'_{h-1} dei punti doppi hanno lo stesso piano polare rispetto a φ. Questo piano polare poi passa pel S'_{h-1}, come risulta immediatamente dalla espressione delle sue coordinate ξ_i, giacchè, qualunque sia il punto doppio y, sarà:

$$\Sigma_i \xi_i y_i=\Sigma_i y_i \varphi_i(x)=\Sigma_i x_i \varphi_i(y)=0\,.$$

Un piano qualunque ξ dello spazio vedemmo avere per poli soltanto i punti y che soddisfanno le equazioni (4), cioè tutti i punti doppi di φ, e viceversa ogni punto doppio ha per piano polare ogni piano dello spazio. Soltanto quei piani ξ, i quali passano per tutto lo spazio lineare doppio S'_{h-1} della quadrica, hanno poli diversi dai punti doppi: questi poli formano un S'_h passante per quel S'_{h-1}.

18. Se y', y'', ... $y^{(h)}$ indicano ancora h punti doppi qualunque della quadrica φ h volte specializzata, si ha:

$$\varphi(x+\lambda' y'+\lambda'' y''+\dots+\lambda^{(h)} y^{(h)})=\varphi(x)\,,$$

e quindi se il punto x sta sulla quadrica φ vi staranno pure tutti i punti $x+\lambda' y'+\lambda'' y''+\ldots+\lambda^{(h)} y^{(h)}$, cioè vi starà tutto l'$S'_h$ di punti che congiunge l'S'_{h-1} doppio di φ al punto x. Tutti questi punti poi avranno comune, per quanto vedemmo, il piano tangente, cosicchè ogni piano che tocchi φ in un punto non doppio la tocca in un S'_h appartenente a φ e passante pel S'_{h-1} doppio. Del resto, quando $h>1$ ogni piano ξ dello spazio va considerato come piano tangente di φ, imperocchè allora è soddisfatta identicamente l'equazione $\Phi(\xi)=0$. Ciò dipende dal fatto che per $h>1$ ogni piano contiene un S'_{h-2} di punti doppi, quello cioè in cui esso taglia l'S'_{h-1}; e quei punti doppi essendo suoi poli, quel piano sarà tangente in essi a φ.

19. Ogni spazio lineare di punti taglia una data quadrica φ, h volte specializzata secondo una quadrica a minor numero di dimensioni, la quale potrà essere o non specializzata, come meglio vedremo in seguito. In particolare un S'_{n-1-h} qualunque taglia φ in una quadrica S^2_{n-2-h}, ma non taglia in generale l'S'_{h-1} doppio (sicchè questa S^2_{n-2-h} non è in generale specializzata); bensì taglia in un punto unico determinato ogni S'_h di φ passante per questo S'_{h-1}. Quindi dalle cose dette segue che il cono di specie h dato φ si può considerare come costituito dagli infiniti (∞^{n-2-h}) S'_h che congiungono i singoli punti di un S^2_{n-2-h} ad un S'_{h-1} che non tagli l'S'_{n-1-h} in cui questo è contenuto. Si può dire che esso *proietta* da quel S'_{h-1}, costituito dai suoi punti doppi, la quadrica S^2_{n-2-h} considerata. Viceversa ogni S_{n-2} ottenuto proiettando un S^2_{n-2-h} di un S'_{n-1-h} da un S'_{h-1} non avente alcun punto comune con questo è facile vedere essere una quadrica h volte specializzata come luogo avente quel S'_{h-1} come doppio.

Ora in ogni fascio di S'_{n-2-h} posti in quel S'_{n-1-h} ve ne sono in generale due soli tangenti alla quadrica S^2_{n-2-h} considerata. Dunque, proiettando dal S'_{h-1}, si vede che in ogni fascio di piani passanti per questo S'_{h-1} ve ne sono in generale due soli i quali tocchino φ in punti non posti su quel S'_{h-1} (e quindi la tocchino ciascuno in un S'_h). Quindi i piani passanti pel S'_{h-1} formano un Σ'_{n-1-h} nel quale i detti piani tangenti a φ costituiscono uno spazio di piani di 2ª classe Σ^2_{n-2-h}.

Esempi di coni quadrici di varie specie furono già da noi incontrati. Se è data una quadrica qualunque (non specializzata) f nello spazio di punti S, e consideriamo due spazi lineari di punti polari rispetto a questa, S'_{h-1} e S'_{n-1-h}, noi vedemmo che i piani tangenti ad f nei punti del S'_{n-1-h}, ad esempio, passano tutti per l'S'_{h-1}. Orbene questi piani costituiscono un Σ^2_{n-2-h} nello spazio lineare Σ'_{n-1-h} dei piani passanti per l'S'_{h-1}, e sono i piani tangenti di una quadrica di punti ad $n-2$ dimensioni specializzata h volte, cioè del cono quadrico di specie h che proietta da quel S'_{h-1} la intersezione S^2_{n-2-h} di f col S'_{n-1-h}.

20. Ci rimane a vedere in modo più completo come si riduca la polarità rispetto ad una quadrica φ quando questa è specializzata un numero qualunque h di volte. Già vedemmo che a tutti i punti di un S'_h passante pel S'_{h-1} doppio di φ corrisponde come polare uno stesso piano passante per questo. Di qui segue immediatamente la seguente proposizione generale: lo spazio lineare di punti S'_{n-2-m} polari

di un S'_m qualunque, per $m < n - 1 - h$ è un S'_{n-2-m} passante pel S'_{h-1} doppio è polare non solo di quel S'_m, ma di tutto l'S'_{m+h} che lo congiunge al S'_{h-1} doppio. Per $m \geqq n - 1 - h$ un S'_m qualunque dello spazio ha solo per spazio polare costante l'S'_{h-1} doppio. Tuttavia quando il dato S'_m ha una posizione speciale rispetto al S'_{h-1} doppio, giacendo con questo in uno spazio lineare di punti di dimensioni $m' < m + h$, il suo spazio polare si ridurrà ad un $S'_{n-2-m'+h}$ passante per l'S'_{h-1} doppio. Questo caso si verificherà quando il dato S'_m tagli l'S'_{h-1} doppio in un $S'_{m+h-m'-1}$ (V. n° 5).

21. Tra le quadriche specializzate, quella semplicemente specializzata corrispondente all'annullarsi del discriminante e non dei suoi subdeterminanti, ci si è presentata prima: essa ha un solo punto doppio. Quelle 2, 3, ... h volte specializzate hanno risp. un S'_1, S'_2, ... S'_{h-1} di punti doppi. Quella specializzata $n - 4$ volte ha un S'_{n-5} doppio e si ottiene proiettando da questo un S^2_2 qualunque giacente in un S'_3 non avente punti comuni con quello. Dalle proprietà note di un S^2_2 in un S'_3, cioè di una quadrica nello spazio ordinario a 3 dimensioni, si potranno dunque avere colla sola proiezione le proprietà dei coni quadrici di specie $n - 4$ nello spazio ad $n - 1$ dimensioni. Così la quadrica specializzata $n - 3$ volte si avrà proiettando dal S'_{n-4} doppio un S^2_1 di un S'_2 e se ne avranno immediatamente le proprietà da quelle delle coniche nel piano ordinario. La quadrica specializzata $n - 2$ volte si avrà proiettando dal S'_{n-3} doppio un S^2_0 di un S'_1, vale a dire una coppia di punti; e quindi si comporrà di una coppia di piani tagliantisi appunto in quel S'_{n-3} doppio. Questo scindersi di una quadrica $n - 2$ volte specializzata in una coppia di piani si potrebbe anche dimostrare analiticamente colla definizione analitica data delle quadriche specializzate un numero qualunque di volte. Finalmente la quadrica specializzata $n - 1$ volte avendo un S'_{n-2} doppio si comporrà tutta di questo piano contato due volte. Ciò risulta anche dal fatto che allora si annullano tutti i subdeterminanti di 2° ordine del discriminante della quadrica considerata $\varphi \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k$, donde segue immediatamente, che si può porre in genere: $a_{ik} = c_i c_k$, e quindi $\varphi \equiv (\Sigma c_i x_i)^2$, cosicchè φ si riduce veramente ad un piano doppio. Non esistono superficie di 2° ordine ulteriormente specializzate.

22. Il principio di dualità stabilito al n° 3 ci permette di enunciare immediatamente le seguenti proposizioni sulle quadriche, come superficie-inviluppi di 2ª classe, corrispondenti a quelle stabilite sulle quadriche come superficie-luoghi di 2° ordine:

Per una quadrica-inviluppo non specializzata vale la teoria della polarità stabilita per le quadriche-luoghi non specializzate. Ma una quadrica può, come inviluppo, specializzarsi un numero qualunque h di volte (essendo $h < n$) corrispondentemente all'annullarsi di tutti i subdeterminanti d'ordine $n - h + 1$ del discriminante della sua equazione-inviluppo. Una quadrica-inviluppo h volte specializzata Φ ha un Σ'_{h-1} di *piani doppi*, cioè di piani tali che in un fascio Σ'_1 qualunque, che ne contenga uno, coincidano in questo i due piani tangenti di Φ che appartengono in generale ad un fascio qualunque dello spazio. Questi piani doppi hanno per poli rispetto a Φ tutti i punti dello spazio, e viceversa ogni punto dello spazio ha quei piani per

polari. Quindi, se $h=1$ i poli dei piani stessi di Φ, cioè quelli che diremo *punti di contatto* dei piani stessi formano una quadrica-luogo φ, corrispondente all'inviluppo Φ, la quale si riduce ai punti del piano doppio di questo; e per $h>1$ quella quadrica-luogo comprende tutti i punti dello spazio, cioè ogni punto va considerato come giacente su φ (ed avente per piani tangenti quel Σ'_{h-2} del Σ'_{h-1} doppio di piani che passa pel punto stesso). Ma ogni piano di Φ, che non sia doppio, ha un determinato punto di contatto, il quale è tale per tutto il Σ'_h di piani che congiunge quello al Σ'_{h-1} doppio, e sta quindi sul S'_{n-1-h} che costituisce lo spazio di punti comune ai piani doppi. Tutti questi punti del S'_{n-1-h}, i quali sono punti di contatto di piani qualunque dello spazio con Φ, formano nel S'_{n-1-h} una quadrica di punti S^2_{n-2-h}, che diremo *nucleo* di Φ. I piani di Φ costituiscono ∞^{n-2-h} spazi lineari Σ'_h di piani, ciascuno dei quali ha comune il punto di contatto e taglia l'S'_{n-1-h} in un S'_{n-2-h}, che è precisamente nel S'_{n-1-h} quel S'_{n-2-h} che tocca la quadrica-nucleo S^2_{n-2-h}, in quel punto. La quadrica Φ h volte specializzata come inviluppo si può dunque ottenere semplicemente fissando nello spazio un S'_{n-1-h} e su esso un S'_{n-2-h} non specializzato (per le ragioni che vedremo in seguito); per ogni S'_{n-2-h} giacente in quello e tangente a questo passano infiniti piani formanti un Σ'_h: questî ∞^{n-2-h} Σ'_h costituiscono appunto la quadrica Φ.

Ogni piano dello spazio, all'infuori dei piani doppi, ha un determinato polo rispetto a Φ: questo polo sta sul S'_{n-1-h} ed è su questo il polo dell'intersezione S'_{n-2-h} di quel piano rispetto al nucleo S^2_{n-2-h} di Φ; quindi quel polo è lo stesso per tutto il Σ'_h di piani che congiunge il piano dato al Σ'_{h-1} di piani doppi, cioè che passa per uno stesso S'_{n-2-h} del S'_{n-1-h}. Quindi, mentre ad un punto qualunque dello spazio corrispondono come polari rispetto a Φ i soli piani doppi di questo, formanti un Σ'_{h-1}, ai punti posti sul S'_{n-1-h} in cui questi si tagliano corrispondono dei Σ_h (contenenti quel Σ'_{h-1}) di piani polari.

La quadrica semplicemente specializzata come inviluppo si riduce come luogo ad un piano doppio ed ha per nucleo un S^2_{n-3} giacente su questo piano. La quadrica specializzata $n-3$ volte come inviluppo ha per nucleo un S^2_1 in un S'_2; quella $n-2$ volte specializzata si riduce ad una coppia di punti (suo nucleo) come inviluppi di piani; e finalmente quella $n-1$ volte specializzata si riduce ad un punto contato due volte.

23. Confrontando coi risultati prima ottenuti per le quadriche considerate come luoghi di punti noi vediamo che: Una quadrica semplicemente specializzata come luogo (come inviluppo) è specializzata $n-1$ volte come inviluppo (luogo) riducendosi come tale al suo punto (piano) doppio. Una quadrica, luogo od inviluppo, specializzata un numero di volte >1 non dà origine risp. ad un inviluppo o ad un luogo determinato.

Può nascer l'idea che, oltre alle specie così considerate di quadriche specializzate, se ne possano ancora distinguer altre, facendo per esempio, che il nucleo di una quadrica specializzata come inviluppo venga a specializzarsi a sua volta come luogo. Ma ciò non può accadere, come ora abbiamo visto, senza che il nucleo stesso si specializzi pure come inviluppo, e quindi la quadrica stessa (che dal nucleo è perfettamente

determinata) si specializzi ulteriormente come inviluppo. Del resto, per esser certi di non avere altri casi speciali di quadriche da considerare, all'infuori di quelli già visti, noi affronteremo ora direttamente la questione.

§ 2.

Gruppi di punti coniugati rispetto ad una quadrica. Invarianti di questa.

24. Un gruppo di m punti a due a due coniugati rispetto ad una data quadrica φ, che considereremo soltanto come luogo di punti, si dirà formare una m upla polare rispetto a φ. Esistono sempre infinite n uple polari rispetto ad una quadrica φ di uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni. In fatti prendasi un punto arbitrario x' dello spazio (il che si può fare in ∞^{n-1} modi) e nel suo piano polare rispetto a φ si prenda un punto arbitrario x'' (il che si può fare in ∞^{n-2} modi) e nella intersezione dei piani polari di x', x'', si prenda un nuovo punto arbitrario x''' (∞^{n-3} modi), e così via, finchè su un S'_1 si prenderà ad arbitrio (∞^1 modi) un punto $x^{(n-1)}$ il cui piano polare taglierà quel S'_1 in un punto $x^{(n)}$ determinato. Dalla costruzione fatta risulta chiaramente che gli n punti così ottenuti x', x'', ..., $x^{(n)}$ formano una n upla polare rispetto a φ, e che viceversa tutte le n uple polari si otterranno in questo modo. Il numero di queste n uple polari è dunque infinito un numero di volte $=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

25. In questo ragionamento si è implicitamente supposto che la superficie di 2° ordine φ non fosse specializzata. Supponiamola ora specializzata h volte, sicchè essa abbia un S'_{h-1} di punti doppi. Si possono ancora come dianzi prendere il gruppo degli $n-h$ punti x', x'', ... $x^{(n-h)}$ nel modo detto, e di tali gruppi ve n'è un numero $(n-1)+(n-2)+\ldots+h=\frac{(n-h)(n+h-1)}{2}$ volte infinito. Ricordando che il piano polare di un punto qualunque dello spazio passa pel S'_{h-1} doppio, i piani polari di quegli $n-h$ punti si taglieranno precisamente in questo e non avranno altri punti comuni. D'altra parte i punti doppi sono coniugati rispetto a φ a tutti i punti dello spazio. Quindi prendendone h ad arbitrio sul S'_{h-1}, cioè $x^{(n-h+1)}$, ..., $x^{(n)}$, ed aggiungendoli ai primi $n-h$ si avrà appunto una n upla polare. Gli ultimi h punti si possono prendere in $\infty^{h(h-1)}$ modi. Vi è dunque un numero

$$\frac{(n-h)(n+h-1)}{2}+h(h-1)=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{h(h-1)}{2}$$

volte infinito di n uple polari rispetto ad una quadrica h volte specializzata, tenendo solo conto di quelle n uple polari che contengono il minor numero possibile di punti doppi della quadrica, cioè h.

Se dal S'_{h-1} doppio si proietta la $(n-h)$ upla polare $x' x'' \dots x^{(n-h)}$ che non comprende alcun punto doppio, si avranno $n-h$ spazi lineari S'_h a due a due coniugati rispetto alla quadrica, sì che prendendo ad arbitrio un punto (non doppio) su ciascuno di essi si avrà di nuovo una $(n-h)$ upla polare.

26. Dalle cose dette segue, che per qualunque superficie di 2° ordine si può costrurre una n upla polare tale, che i suoi n punti si possano prendere come punti fondamentali (cioè di coordinate tutte nulle, meno una) nel sistema di riferimento delle coordinate. Allora nell'equazione

$$\varphi \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 ,$$

di quella superficie essendo p. e. coniugati i due punti di coordinate tutte nulle, salvo risp. la x_i e la x_k, sarà $a_{ik} = 0$; e questo per tutte le combinazioni possibili ik. Dunque l'equazione della quadrica riferita a quella sua n upla polare avrà la forma:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0 .$$

I subdeterminanti d'ordine $n-h+1$ del discriminante di questa forma quadratica saranno tutti, o nulli, ovvero uguali a prodotti delle quantità a_i prese a combinazioni di $n-h+1$. Affinchè tutti questi subdeterminanti siano nulli, dovranno dunque annullarsi h di quelle quantità a_i, e ciò sarà pure sufficiente. Dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè la quadrica rappresentata da quell'equazione sia h volte specializzata è che in quella siano nulli h sufficienti.

27. Siano ora date in due spazii qualunque, l'uno di punti x, l'altro di punti y, entrambi lineari ad $n-1$ dimensioni, due quadriche qualunque, e riferiamo ciascuna di esse ad una sua n upla polare, sì che siano rappresentate risp. dalle equazioni:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0 ,$$

e:

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2 = 0 .$$

Se stabiliamo tra i punti dei due spazii le relazioni lineari

$$\sqrt{a_1}\, x_1 = \sqrt{b_1}\, y_1 , \quad \sqrt{a_2}\, x_2 = \sqrt{b_2}\, y_2 , \ \dots \ \sqrt{a_n}\, x_n = \sqrt{b_n}\, y_n ,$$

dove pei radicali si prendono valori determinati, avremo determinata una proiettività (V. n° 1) tra i due spazi, nella quale le due quadriche si corrisponderanno tra loro; purchè però niuno dei coefficienti a_i o b_i sia nullo. Se ve ne fossero anche di quelli nulli, allora quelle relazioni si accorderebbero con una proiettività solo quando vi fosse un ugual numero h di a_i nulle e di b_i nulle e si attribuissero ad esse gli stessi indici, p. e., $1, 2, \dots h$. In questo caso poi le relazioni scritte si ridurrebbero a sole $n-h$, e aggiungendo ad esse altre h relazioni arbitrarie tra le $x_1, \dots, x_h$ e le $y_1, \dots, y_h$, p. e.:

$$x_1 = y_1 , \ \dots , \ x_2 = y_2 , \ \dots , \ x_h = y_h ,$$

sarebbe ancora determinata una proiettività tra i due spazi, la quale farebbe corrispondere ancora le due quadriche considerate, che ora sarebbero entrambe h volte specializzate. Dunque:

Due superficie di 2° ordine in spazi lineari ad $n-1$ dimensioni si possono sempre trasformare proiettivamente l'una nell'altra, colla sola condizione, che ove una di esse sia specializzata, siano entrambe specializzate un ugual numero di volte. Si può stabilire in infiniti modi la proiettività tra i due spazi, che fa corrispondere tra loro le due superficie; si può trasformare nello stesso tempo una data n upla polare dell'una in una n upla polare qualunque dell'altra. Fissando queste due n uple polari, la trasformazione proiettiva considerata è determinata (benchè non individuata). Dunque (V. n° 25), le due superficie di secondo ordine si possono far corrispondere proiettivamente in un numero $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{h(h-1)}{2}$ volte infinito di modi.

In particolare una quadrica h volte specializzata di un dato spazio lineare di punti ad $n-1$ dimensioni si può trasformare proiettivamente in se stessa in un numero di modi $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{h(h-1)}{2}$ volte infinito; e, se la quadrica non è specializzata, in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ modi.

28. Segue da quelle proposizioni che due quadriche qualunque S^2_{n-2} generali si equivalgono dal punto di vista della geometria proiettiva (V. n° 1). Dunque:

« Una quadrica non ha invarianti assoluti »,

poichè questi stabiliscono una differenza proiettiva tra gli enti geometrici cui appartengono.

Ma il discriminante di una quadrica è invariante (relativo) di questa: ciò risulta dal significato geometrico che abbiamo visto avere il suo annullarsi, e del resto costituisce una proprietà algebrica notissima del discriminante di una forma quadratica ad un numero qualunque di variabili. D'altronde non essendovi invarianti assoluti non può esservi più di un invariante relativo. Quindi:

« Una quadrica ha solo un invariante, che è il suo discriminante ».

L'annullarsi di quest'invariante esprime soltanto che la quadrica è semplicemente specializzata, cioè ha un punto doppio. Vedremo presto come anche l'essere una quadrica h volte specializzata si possa esprimere con forme invariantive, e precisamente coll'annullarsi identico di certi contravarianti. Notiamo, per ora, che dal teorema dimostrato che due quadriche h volte specializzate come luogo si possono sempre trasformare proiettivamente l'una nell'altra, segue ciò che notammo nel § precedente (V. n° 23), cioè che una tal quadrica non può avere una specializzazione nel Σ^2_{n-2-h} dei piani tangenti propriamente detti (cioè tangenti in punti non doppi) senza degenerare in una quadrica specializzata un numero di volte maggiore di h.

« Le quadriche luoghi od inviluppi, considerate nel § 1, costituiscono tutte le superficie di 2° ordine o di 2ª classe che occorra considerare dal punto di vista proiettivo ».

Era questo il teorema che c'importava stabilire nel presente §.

§ 3.

Spazi lineari contenuti in una quadrica o tangenti ad essa.
Varie equazioni tangenziali della quadrica.

29. Proponiamoci ora di cercare quanti e quali spazi lineari di punti siano contenuti in una superficie di 2° ordine S^2_{n-2} dello spazio di punti ad $n-1$ dimensioni S. Supporremo anzitutto che quella superficie di 2° ordine non sia specializzata, e diciamola φ. Dalla definizione e dalle proprietà viste del piano tangente a φ in un suo punto qualunque segue che qualunque spazio lineare S'_m contenuto in φ dovrà pure appartenere al piano tangente a φ in un punto qualunque dello spazio lineare stesso. In fatti è chiaro che nel piano tangente a φ in un suo punto x prendendo un altro punto y dell'intersezione di φ con esso, l'S'_1 che congiunge y ad x starà tutto su φ, cosicchè quell'intersezione si compone di infiniti S'_1 passanti per x; viceversa poi è pure evidente che ogni S'_1 passante per x e giacente su φ starà pure sul piano tangente in x a φ. Quindi, siccome tutti i punti di un S'_m passante per x e contenuto in φ si possono congiungere ad x con S'_1 contenuti in φ, tutto l'S'_m starà sul piano tangente in x a φ, come si voleva provare. Ora la stessa cosa vale per tutti i punti x del S'_m, cioè tutti i piani tangenti a φ in quei punti conterranno l'S'_m. D'altronde questi piani tangenti a φ formano un Σ'_m di piani, avente per intersezione comune a tutti questi un S'_{n-2-m}, che non è altro che lo spazio di punti polare rispetto a φ dello spazio S'_m. Quel S'_{n-2-m} dovrà dunque contenere questo S'_m, cioè:

Affinchè uno spazio lineare di punti S'_m sia contenuto in una quadrica φ generale dello spazio ad $n-1$ dimensioni è necessario e sufficiente che esso sia contenuto nel suo spazio lineare (S'_{n-2-m}) polare rispetto a φ.

Ora perchè ciò sia possibile dev'essere $m \leqq n-2-m$, cioè $m \leqq \frac{n-2}{2}$. Dunque:

Una quadrica generale non contiene spazi lineari di punti per cui il numero di dimensioni superi la metà del numero di dimensioni della quadrica.

30. Per $m \leqq \frac{n-2}{2}$ è facile vedere che realmente la quadrica φ contiene infiniti S'_m. Si prenda infatti un punto arbitrario x di φ e nel suo piano tangente un altro punto arbitrario x' dell'intersezione con φ: l'S'_1 congiungente x' ad x apparterrà a φ. Il piano tangente a φ in x' passerà per x e quindi taglierà quello tangente in x secondo un S'_{n-3} contenente quel S'_1: ivi si prenda fuori di questo un nuovo punto x'' di φ e lo si congiunga al S'_1 stesso. Si avrà un S'_2 tutto contenuto in φ e passante inoltre pei punti x, x', x''. Il piano tangente a φ in x'' taglierà l'S'_{n-3} in un S'_{n-4} (intersezione dei piani tangenti in x, x', x'') che conterrà quel S'_2. Sull'intersezione di quel S'_{n-4} con φ, fuori di quel S'_2 si prenda un nuovo punto arbitrario x''' e lo si congiunga al S'_2 con un S'_3: questo sarà tutto contenuto in φ e passerà pei punti x, x', x'', x'''.

Continuando si ottengono spazi lineari contenuti in φ e di numero crescente di dimensioni. Vogliasi avere in generale il numero degli S'_m di φ, i quali passano per un dato S'_k di φ, essendo $k < m$. Noteremo che nella costruzione precedente il punto x si può prendere su φ in ∞^{n-2} modi, il punto x' dell'intersezione di φ col piano tangente in x si può prendere in ∞^{n-3} modi, il punto x'' dell'intersezione di φ coi piani tangenti in x e x' si può prendere in ∞^{n-4} modi, ... , il punto $x^{(k)}$ in ∞^{n-2-k} modi, ... , e finalmente il punto $x^{(m)}$ in ∞^{n-2-m} modi. I punti $x, x', \ldots, x^{(k)}$ determinano un S_k' contenuto in φ e che supporremo dato; quei punti, insieme con $x^{(k+1)}, \ldots, x^{(m)}$ determineranno un S'_m contenuto pure in φ e passante per quel S_k'. Ora $x^{(k+1)}, \ldots, x^{(m)}$ saranno punti qualunque del S'_m ed in questo si potrebbero prendere in $\infty^{(m-k)m}$ modi; quindi sebbene nella costruzione precedente quei punti si possono prendere, come vedemmo, in $\infty^{n-2-k-1} \times \infty^{n-2-k-2} \times \ldots \times \infty^{n-2-m} = \infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-m-k-5)}$ modi diversi, pure questo numero va diviso per $\infty^{(m-k)m}$ se si vogliono avere degli S'_m distinti tra loro, cosicchè di questi ve ne saranno $\infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-3m-k-5)}$ i quali passino pel S'_k dato. In particolare ponendo $k = 0$ noi vediamo che per un punto qualunque x della quadrica passano $\infty^{\frac{1}{2}m(2n-3m-5)}$ S'_m contenuti in questa. Ne segue immediatamente che in tutta la quadrica vi sono $\infty^{\frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4)}$ S'_m, poichè vi sono ∞^{n-2} punti x, ma tra questi ∞^m dànno lo stesso S'_m.

Però la stessa costruzione che si è seguita mostra che essa può solo continuare finchè ogni punto $x^{(r)}$ si ha da prendere in uno spazio il cui numero di dimensioni $n-2-r$ non è inferiore ad m, cioè finchè $n-2-m \geqq m$, ossia $m \leqq \frac{n-2}{2}$, come già prima trovammo. Se n è numero impari, la costruzione può spingersi solo fino ad $m = \frac{n-3}{2}$, cioè gli spazi lineari di num.° massimo di dimensioni contenuti in φ sono gli $S'_{\frac{n-3}{2}}$, i quali sono in numero di $\infty^{\frac{1}{8}(n-1)(n+1)}$. Se invece n è pari, la costruzione si può spingere fino ad $m = \frac{n-2}{2}$, cioè gli spazi lineari contenuti in φ a numero massimo di dimensioni sono gli $S'_{\frac{n-2}{2}}$, i quali saranno in numero di $\infty^{\frac{1}{8}n(n-2)}$. In tal caso si finisce evidentemente per dover prendere un punto $x^{\left(\frac{n-2}{2}-1\right)}$ di φ, trovare l'intersezione $S'_{\frac{n}{2}}$ del suo piano tangente coi piani tangenti nei punti prima costrutti e nella intersezione $S^2_{\frac{n-2}{2}}$ di quel $S'_{\frac{n}{2}}$ con φ (la quale passerà per l' $S'_{\frac{n-2}{2}-1}$ determinato da quei vari punti) prendere un punto $x^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}$ che sarà congiunto ai precedenti da un $S'_{\frac{n-2}{2}}$ contenuto in φ. Questo mostra che quell'intersezione $S^2_{\frac{n-2}{2}}$, di cui questo spazio lineare dovrà far parte, si scinde in due tali spazi lineari $S'_{\frac{n-2}{2}}$ di φ. Quindi per n pari vi sono due sistemi distinti di $S'_{\frac{n-2}{2}}$ contenuti in φ; e su questi ritorneremo tosto. Notiamo intanto i seguenti risultati ottenuti:

In una quadrica generale nello spazio ad $n-1$ dimensioni stanno solo degli spazi lineari il cui numero delle dimensioni è al più uguale ad $\frac{n-3}{2}$ o ad $\frac{n-2}{2}$ secondo che n è impari o pari; nel 1° caso vi sono $\infty^{\frac{1}{8}(n-1)(n+1)} S'_{\frac{n-3}{2}}$, nel 2° caso vi sono $\infty^{\frac{1}{8}n(n-2)} S'_{\frac{n-2}{2}}$ formanti due sistemi (*).

Per $m \leqq \frac{n-2}{2}$ esistono sulla quadrica $\infty^{\frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4)} S'_m$, sì che per ogni punto della quadrica ne passano $\infty^{\frac{1}{2}m(2n-3m-5)}$ e più in generale per ogni S'_k della quadrica $(h<m)$ ne passano $\infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-3m-k-5)}$.

31. Si può pure trovare analiticamente il numero degli S'_m contenuti in φ, e ciò servirà a confermare le cose dette. Siano $x, x', \ldots, x^{(m)}$ $m+1$ punti i quali determinano un S'_m. Affinchè questo sia tutto contenuto in φ dovrà essere, per valori qualunque delle λ:

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(m)} x^{(m)}) = 0 ,$$

ossia:

$$\lambda^2 \varphi(x) + \lambda'^2 \varphi(x') + \ldots + \lambda^{(m)2} \varphi(x^{(m)}) + 2\lambda\lambda' \varphi(x, x') + \ldots = 0 .$$

Dunque sarà:

$$\varphi(x) = 0 , \quad \varphi(x') = 0 , \quad \ldots\ldots \quad \varphi(x^{(m)}) = 0 ,$$

$$\varphi(x, x') = 0 , \quad \ldots\ldots \quad \varphi(x^{(m-1)}, \quad x^{(m)}) = 0 .$$

Queste equazioni sono in numero di $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ ed esprimono che gli $m+1$ punti $x, x', \ldots, x^{(m)}$ devono stare su φ ed inoltre essere a 2 a 2 coniugati rispetto a φ, cioè stare nei piani tangenti in essi a φ; il che va d'accordo coi risultati avuti dai ragionamenti sintetici. Ora ciascuno di quei punti potendosi prendere ad arbitrio sul S'_m cercato, lo si può assoggettare ad m equazioni di condizione, sicchè avremo in totale $\frac{1}{2}(m+1)(m+2) + m(m+1)$ equazioni, mentre le incognite, cioè le coordinate di quei punti saranno $(m+1)(n-1)$. Il sistema è dunque indeterminato un numero di volte uguale a

$$(m+1)\left[(n-1) - \frac{1}{2}(m+2) - m\right] = \frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4) ,$$

od in altri termini la quadrica φ contiene $\infty^{\frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4)} S'_m$, come appunto avevamo già trovato.

(*) Anche il Veronese nella memoria citata nota esservi quella differenza tra i due casi di n impari ed n pari (V. loc. cit. pag. 191, 192), ma incorre in un'inesattezza nell'assegnare i numeri di $S'_{\frac{n-3}{2}}$ od $S'_{\frac{n-2}{2}}$ contenuti in φ a seconda dei due casi. Così egli trova che in un S^2_5 vi sono $\infty^9 S'_2$, mentre dalle formule da noi trovate $(n=7)$ risulta che ve ne sono solo ∞^6. Nel § seguente ritorneremo sull'argomento.

Se poi si nota che per $k<m$ ogni S'_m contiene $\infty^{(k+1)(m-k)}$ S'_k, e che la quadrica φ conterrà pure $\infty^{\frac{1}{2}(k+1)(2n-3k-4)}$ S'_k, segue che per ogni S'_k di φ passerà un numero di S'_m contenuti in φ uguale a

$$\infty^{\frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4)-\frac{1}{2}(k+1)(2n-3k-4)+(k+1)(m-k)}=\infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-3m-k-5)},$$

come pure trovammo per altra via.

32. Le ricerche corrispondenti per dualità a quelle dei numeri precedenti conducono allo studio dei sistemi lineari di piani tutti tangenti ad una data quadrica non specializzata φ. Ma noi vedemmo che uno spazio lineare S'_m di punti è tutto contenuto in φ quando è tutto contenuto nel sistema lineare Σ'_m dei piani tangenti a φ in quei punti. Questa condizione corrisponde per dualità a se stessa, cosicchè possiamo conchiudere:

I piani tangenti a φ nei punti di un S'_m contenuto in essa formano un Σ'_m di suoi piani tangenti; e viceversa.

Tralasciamo per brevità di enunciare per questi Σ'_m le proposizioni corrispondenti a quelle trovate per gli S'_m di φ.

33. Ogni S'_m dello spazio ha per polare rispetto a φ un S'_{n-2-m}, col quale non ha in generale alcun punto comune, nè sta in un piano comune (V. n° 5). Supponiamo però di prendere in modo quei due spazi lineari polari che essi abbiano comune un S'_a e quindi (V. n° 5) stiano in un S'_{n-2-a}, cioè in un Σ'_a di piani. Allora tutti i punti di quel S'_a staranno su questi piani, che sono i loro piani polari rispetto a φ, e quindi staranno su φ ed avranno questi per piani tangenti. Dunque ogni qual volta uno spazio lineare qualunque di punti taglia in un S'_a il suo spazio polare rispetto ad una data quadrica φ, sempre quel S'_a è uno spazio lineare contenuto in questa quadrica, ed il Σ'_a dei piani che allora passano pei due spazi lineari polari è il sistema lineare dei piani tangenti alla quadrica in quei punti.

Caso particolare di questa proposizione è quella vista che ogni spazio lineare di punti contenuti nella quadrica è pure completamente contenuto nel suo spazio polare rispetto a questa.

34. Diremo che uno spazio lineare S'_m qualunque è *tangente* a φ in un punto x, quando la quadrica ad $m-1$ dimensioni S^2_{m-1} secondo cui esso taglia φ è specializzata, avendo un punto doppio in x (*). Diremo poi che un S'_m è *tangente di specie* $(a+1)^{esima}$ quando l'intersezione S^2_{m-1} con φ è $a+1$ volte specializzata, cioè ha un S'_a di punti doppi. Ciascuno di questi punti doppi (punti di contatto del S'_m) è in tal caso coniugato a tutti i punti di quel S'_m rispetto a quel S^2_{m-1}, e quindi anche rispetto a φ, sicchè tutto quel S'_a di punti doppi starà sul S'_{n-2-m} polare del S'_m rispetto a φ, onde l'S'_m tangente di specie $a+1$ a φ si trova precisamente

(*) Questa definizione, per $m=n-2$, concorda, come vedemmo, colla definizione già data del piano tangente.

nella condizione di cui parlammo nel numero precedente, cioè di aver comune col S'_{n-2-m} polare rispetto a φ un S'_a, il quale sta in conseguenza su φ. Viceversa, se questo accade, l' S^2_{m-1}, in cui quel S'_m taglierà φ, sarà tale che rispetto ad esso i punti del S'_a saranno coniugati a tutti i punti del S'_m, e quindi saranno punti doppi del S^2_{m-1}, sicchè l' S'_m sarà tangente di specie $a+1$ a φ. Conchiudiamo che:

Uno spazio lineare di punti S'_m tangente di specie $a+1$ alla quadrica φ è uno spazio lineare avente comune col suo polare un S'_a (contenuto perciò in φ). Due spazi polari S'_m, S'_{n-2-m} sono tangenti della stessa specie a φ e in uno stesso S'_a di φ, che è quello che essi hanno comune, e sono contenuti nel Σ'_a dei piani tangenti a φ nei punti di quel S'_a. Dato m, il numero a non può crescere al di là del minore tra i due numeri m ed $n-2-m$.

In particolare vi è una sola specie di piani tangenti S'_{n-2} $(m=n-2,\ n-2-m=0$ e quindi $a=0)$; vi sono due specie di S'_{n-3} e di S'_1 tangenti, cioè l'una avente un solo punto di contatto $(a=0)$, l'altra corrispondente agli S'_1 che son contenuti in φ $(a=1)$ ed agli S'_{n-3} che toccano φ in S'_1; vi sono 3 specie di S'_2 e di S'_{n-4} tangenti, la 1ª specie $(a=0)$ ha un solo punto di contatto, la 2ª specie $(a=1)$ ha un S'_1 di contatto, la 3ª finalmente $(a=2)$ comprende gli S'_2 contenuti in φ e gli S'_{n-4} che toccano φ in un tale S'_2; e così via.

35. Considerando lo spazio lineare S'_{m-1} determinato dagli m punti $x', x'', \ldots, x^{(m)}$, possiamo facilmente trovare le condizioni analitiche perchè esso sia tangente di una data specie a φ. Infatti, in quello spazio, la quadrica S^2_{m-2} d'intersezione con φ avrà per equazione nelle variabili λ_i (coordinati di punti *sul* S'_{m-1}):

$$\varphi(\lambda_1 x' + \lambda_2 x'' + \ldots + \lambda_m x^{(m)}) = 0 \ ,$$

ossia:

$$\Sigma_{ik}\varphi(x^{(i)} . x^{(k)}) . \lambda_i \lambda_k = 0 \ .$$

Ora la condizione di un contatto di data specie equivale allo specializzarsi di questa quadrica, il cui discriminante è:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x'\ x') & \varphi(x'\ x'') & . & \varphi(x'\ x^{(m)}) \\ \varphi(x''\ x') & \varphi(x''\ x'') & . & \varphi(x''\ x^{(m)}) \\ . & . & . & . \\ \varphi(x^{(m)} x') & \varphi(x^{(m)} x'') & . & \varphi(x^{(m)} x^{(m)}) \end{vmatrix} .$$

Dunque uguagliando a zero questo determinante si ha la condizione perchè lo spazio $S'_{m-1} x' x'', \ldots, x^{(m)}$ sia tangente (semplicemente) a φ, ed è facile vedere che in essa le coordinate x compaiono solo in quei raggruppamenti, che costituiscono le coordinate del S'_{m-1} considerato (V. nº 4), sicchè essa potrà riguardarsi come un' *equazione tangenziale* di φ in queste coordinate.

Annullando inoltre i subdeterminanti d'ordine $m-a$ di quel determinante si hanno le condizioni necessarie e sufficienti perchè l' S'_{m-1} considerato sia tangente di specie $a+1$ a φ.

36. Ma la condizione di semplice contatto si può anche ottenere sotto un'altra forma importante, supponendo l' S'_{m-1} determinato, invece che da m suoi punti, da $n-m$ piani passanti per esso, i quali siano $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-m)}$. Affinchè l'$S'_{m-1}$ comune a questi piani sia tangente alla quadrica

$$\varphi \equiv \Sigma\, a_{ik} x_i x_k ;$$

in un suo punto x vedemmo esser necessario e sufficiente che esso sia contenuto nel piano tangente in x a φ e che esso passi per x. Quel piano tangente in x deve dunque avere coordinate della forma $\mu_1 \xi_i' + \ldots + \mu_{n-m} \xi_i^{(n-m)}$, cioè dev'essere:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= \mu_1 \xi_1' + \ldots + \mu_{n-m} \xi_1^{(n-m)} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= \mu_1 \xi_2' + \ldots + \mu_{n-m} \xi_2^{(n-m)} \\ \ldots\ldots\ldots \quad & \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= \mu_1 \xi_n' + \ldots + \mu_{n-m} \xi_n^{(n-m)} \ . \end{aligned}$$

Inoltre dev'essere per ipotesi:

$$\begin{aligned} \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \ldots + \xi_n' x_n &= 0 \\ \xi_1'' x_1 + \xi_2'' x_2 + \ldots + \xi_n'' x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \xi_1^{(n-m)} x_1 + \xi_2^{(n-m)} x_2 + \ldots + \xi_n^{(n-m)} x_n &= 0 \ . \end{aligned}$$

Dunque, affinchè si possano determinare le x_i e le μ_i in modo che, senza annullarsi tutte, verifichino queste equazioni, basterà che sia:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} & \xi_1' & . & \xi_1^{(n-m)} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} & \xi_n' & . & \xi_n^{(n-m)} \\ \xi_1' & . & \xi_n' & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \xi_1^{(n-m)} & . & \xi_n^{(n-m)} & 0 & . & 0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Questa è dunque un'altra forma dell'equazione tangenziale della quadrica φ, essendo ancora S'_{m-1} gli spazi tangenti (*). Sotto questa forma si vede immediatamente come in essa non compaiano che le coordinate del S'_{m-1}, le quali inoltre vi compaiono solo al 2° grado (**).

(*) Del resto si può dimostrare con trasformazioni analitiche che il 1° membro di questa nuova equazione è identico (a meno di un fattor costante) al 1° membro dell'equazione prima ottenuta, cioè al discriminante della intersezione della data quadrica col S'_{m-1} determinato dai piani $\xi', \ldots, \xi^{(n-m)}$. V. D'Ovidio: « *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* ». (Memorie dell'Acc. d. Lincei 1877, V. pag. 21). In questa memoria trovai, dopo che il presente § era scritto, alcuni dei risultati che esso contiene (con denominazioni diverse), e che credevo nuovi (V. Memoria citata, pag. 46, 47).

(**) La forma polare

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} & \xi'_1 & . & \xi_1^{(n-m)} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} & \xi'_n & . & \xi_n^{(n-m)} \\ \eta'_1 & . & \eta'_n & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \eta_1^{(n-m)} & . & \eta_n^{(n-m)} & 0 & . & 0 \end{vmatrix}$$

col suo annullarsi significa che i due S'_{m-1} determinati risp. dai piani ξ ed η godono della proprietà che vi è un punto dell'uno avente il suo piano polare passante per l'altro. Ciò si dimostra in modo identico a quello usato sopra.

Il primo membro di quell'equazione rappresenta le principali forme invariantive della quadrica φ. Per $m = n$ essa ci dà il discriminante di φ; per $m = n - 1$ la *forma aggiunta* di φ, cioè l'equazione della quadrica in coordinate di piani tangenti; per $m = n - 2$ l'equazione in coordinate di S'_{n-3}, e così via; per $m = 2$ l'equazione in coordinate di S_1' tangenti; per $m = 1$ si ha di nuovo l'equazione di φ in coordinate di punti. Per $m = 0$ si avrebbe un invariante identico.

Quella forma d'equazione, avendo per coefficienti delle coordinate del S'_{m-1} i subdeterminanti d'ordine m del discriminante di φ, è chiaro che essa sarà soddisfatta identicamente quando questi sono tutti nulli, cioè per le quadriche specializzate $n - m + 1$ volte (od un numero maggiore). Ciò significa che per tali quadriche ogni S'_{m-1} dello spazio va considerato come tangente. E ciò si capisce, poichè una tal quadrica ha un S'_{n-m} (od ancor più) di punti doppi, cosicchè ogni S'_{m-1} contiene almeno un punto doppio della quadrica stessa e quindi la tocca almeno in un punto. Quindi ora siamo in grado di esprimere la proprietà proiettiva dell'essere una quadrica specializzata un dato numero di volte mediante la condizione dell'annullarsi identico di un controvariante (cosa a cui alludevamo nel n° 28). Così la condizione perchè una quadrica sia due volte specializzata sarà che si annulli identicamente la sua forma aggiunta.

37. I ragionamenti fatti sul principio del presente § (V. n° 30) per trovare gli spazi lineari di punti contenuti in una data superficie di 2° ordine non specializzata si possono applicare perfettamente al caso in cui questa sia specializzata un numero qualunque h di volte, cioè abbia un S'_{h-1} doppio: basterà tener conto del fatto che nei vari punti x, x', x''... che in quel ragionamento si prendono sulla quadrica i piani tangenti andranno tutti in questo caso a passare per quel S'_{h-1} doppio. Ma possiamo anche valerci dei risultati ottenuti per le quadriche non specializzate ricordando che una quadrica h volte specializzata si può sempre ottenere proiettando dal S_{h-1} doppio una quadrica S^2_{n-2-h} non specializzata contenuta in un S'_{n-1-h}; il quale non abbia alcun punto comune con quel S'_{h-1} (V. n° 19). Quindi applicando a questi S^2_{n-2-h} i teoremi visti per le quadriche non specializzate, solo ponendo $n - h$ in luogo di n, abbiamo:

In una quadrica h volte specializzata dello spazio ad $n-1$ dimensioni stanno solo degli spazi lineari (passanti per quello doppio della quadrica) il cui numero di dimensioni è uguale (o minore) a $\frac{n+h-3}{2}$ od a $\frac{n+h-2}{2}$ secondo che $n+h$ è impari o pari. Nel 1° caso vi sono $\infty^{\frac{1}{8}(n-h-1)(n-h+1)} S'_{\frac{n+h-3}{2}}$, nel 2° caso $\infty^{\frac{1}{8}(n-h)(n-h-2)} S'_{\frac{n+h-2}{2}}$ formanti due diversi sistemi.

Per $m \leqq \frac{n+h-2}{2}$ esistono sulla quadrica $\infty^{\frac{1}{2}(m-h+1)(2n-3m+h-4)} S'_m$, sì che per ogni punto (non doppio) di essa e quindi per tutto l' S'_h che lo congiunge al S'_{h-1} dei punti doppi ne passano $\infty^{\frac{1}{2}(m-h)(2n-3m+h-5)}$, e per ogni S'_k della quadrica passante pei punti doppi $(h-1 < k < m)$ ne passano $\infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-3m-k+2h-5)}$.

§ 4.

Applicazioni della proiezione centrale alla geometria su una quadrica. Nuovi teoremi riguardanti questa geometria.

38. Per lo studio della geometria su una quadrica a più dimensioni è di grande utilità il metodo della proiezione centrale. Sia data una quadrica φ ad $n-2$ dimensiòni, che potremo supporre non specializzata (altrimenti basterebbe considerarne una sezione fatta con un conveniente spazio lineare). Nello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni S in cui essa sarà contenuta (V. n° 7) si prenda ad arbitrio un piano, o spazio lineare ad $n-2$ dimensioni **S**, e da un punto fisso P di quella quadrica preso fuori di **S** si conducano gli S_1' ai vari punti M di φ: essi andranno a tagliare **S** nei suoi punti **M**, e così si avrà su **S** la proiezione centrale di φ, in modo che ad ogni punto M di φ corrisponderà un punto **M** di **S**, e viceversa ad ogni punto **M** di **S** corrisponderà in generale un solo punto M di φ. In questa corrispondenza però vi saranno elementi eccezionali. Consideriamo infatti il piano π tangente in P a φ e consideriamo l'intersezione **I** ad $n-3$ dimensioni di esso con **S** e poi la quadrica **C** ad $n-4$ dimensioni in cui **I** taglierà φ. Dalle proprietà viste del piano tangente ad una quadrica segue che un S_1' qualunque condotto per P nel piano π (cioè ad un punto qualunque di **I**) taglia φ in due punti coincidenti con P, esclusi gli S_1' che vanno da P ad un punto qualunque dell'intersezione di π con φ, poichè questi S_1' sono tutti contenuti in questa intersezione; essi tagliano S nei punti di **C**. Di qui segue che nella corrispondenza tra i punti della quadrica ad $n-2$ dimensioni φ e quelli dello spazio lineare, pure ad $n-2$ dimensioni, **S** al punto P di φ corrispondono in **S** tutti i punti dello spazio lineare ad $n-3$ dimensioni **I** (i quali punti rappresentano in certo qual modo le diverse direzioni, che sulla quadrica φ vanno pel punto P), mentre tra questi punti di **I** quelli posti sulla quadrica **C** ad $n-4$ dimensioni di **S** sono tali che a ciascuno di essi corrisponde in φ non un solo punto, ma tutti i punti di un S_1' passante per P. Quindi se consideriamo su φ uno spazio algebrico di dimensioni ed ordine qualunque S^g_m non passante per P, gli corrisponderà in **S** uno spazio algebrico $\mathbf{S}^g_m$ (dove il segno **S** è usato per indicare uno spazio contenuto nello spazio ad $n-2$ dimensioni **S**) delle stesse dimensioni e dello stesso ordine, il quale però godrà della proprietà di tagliare **I** in un $\mathbf{S}^g_{m-1}$ tutto contenuto in **C**, perocchè l'intersezione con **I** non è altro che la proiezione della intersezione del S^g_m con π, e questa stando su φ e π avrà la proiezione posta su **C**, se, come noi supponiamo, l'S^g_m considerato di φ non passa pel centro di proiezione P. In particolare se $m=n-3$ e consideriamo su φ la sua intersezione S^{2i}_{n-3} con una superficie algebrica qualunque ad $n-2$ dimensioni di ordine i, siccome ogni S_1' di $\pi\varphi$ taglierà questa superficie in i punti di quel S^{2i}_{n-3}, così potremo conchiudere che in **S** l'imagine di questo S^{2i}_{n-3} è un $\mathbf{S}^{2i}_{n-3}$ passante i volte per **C**.

39. Questa rappresentazione univoca dei punti di una quadrica a più dimensioni nei punti di uno spazio lineare ad altrettante dimensioni ha una grandissima importanza (*). Noi vogliamo ora applicarla al caso in cui n sia numero pari per ritrovare il numero degli $S'_{\frac{n-2}{2}}$ contenuti nella quadrica non specializzata φ, vedere come vi siano realmente due sistemi distinti di tali spazi lineari ed in quali relazioni essi stiano tra loro, e finalmente trovare una proposizione assai importante per la geometria degli spazi algebrici contenuti in una tal quadrica.

Poniamo dunque $n-2=2p$. Allora nello spazio S a $2p+1$ dimensioni consideriamo la quadrica φ a $2p$ dimensioni, e su essa un S'_p: la sua proiezione dal punto P su S sarà un S'_p, il quale, per quanto vedemmo al n° precedente più in generale, taglia I in un S'_{p-1} contenuto completamente in C. Viceversa se in S consideriamo un S'_p, il quale passi per un S'_{p-1} di C, gli corrisponderà in φ (oltre ad un S'_p giacente su π e passante per quel S'_{p-1}) un S'_p. Di qui segue che il numero degli S'_p contenuti in φ è uguale al numero di quegli S'_p dello spazio lineare a $2p$ dimensioni S, i quali passano per degli S'_{p-1} contenuti in C. Ora in S quegli S'_p che passano per un dato S'_{p-1} sono in numero di ∞^p. Quindi se indichiamo con N_p l'ordine d'infinità del numero degli spazi lineari a p dimensioni contenuti in una quadrica a $2p$ dimensioni, cosicchè φ essendo a $2p$ dimensioni conterrà $\infty^{N_p} S'_p$, e C essendo a $2(p-1)$ dimensioni conterrà $\infty^{N_{p-1}}$ S'_{p-1}, sarà $\infty^{N_p}=\infty^p \times \infty^{N_{p-1}}$, ossia avremo:

$$N_p = p + N_{p-1} \ ,$$

donde, applicando p volte questa formula e notando che $N_0=0$, avremo:

$$N_p = \tfrac{1}{2} p\,(p+1) \ .$$

(*) La rappresentazione comprende come caso particolare quella data dal Nöther nella memoria « *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln* » (Göttinger Nachrichten, Juli 1869) e trovata pure dal Lie, che ne fece applicazioni nell'importante sua memoria « *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe*, u. s. w. » (Math. Ann. Bd. V), rappresentazione nella quale alle rette di un complesso lineare (formanti un S_3^2, sicchè qui $n=5$) si fanno corrispondere i punti dello spazio ordinario (S^1_3) essendovi però nel complesso una retta fissa, a cui corrispondono tutti i punti di un piano (il piano all'infinito), e nello spazio di punti essendovi su questo piano una quadrica ad 1 dimensione, cioè una conica (assoluto) ad ogni punto della quale corrispondono nel complesso tutte le rette di un fascio contenente la retta fissa. In seguito a questo lavoro di Lie, il Klein nella memoria « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* » (Math. Ann., V, pag. 257) (V. anche la dissertazione « *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* », Erlangen, 1872) generalizzò la rappresentazione, estendendola ad uno spazio a quante si vogliano dimensioni, dando le formule corrispondenti e mostrando che essa si può considerare, come noi facciamo, come una proiezione centrale, o, com'egli la chiama, proiezione *stereografica*. Notò pure il Klein come essa renda equivalenti tra loro la geometria proiettiva di una quadrica a più dimensioni (con un suo punto fisso) e la geometria metrica (euclidea) di uno spazio lineare ad altrettante dimensioni. Egli fece inoltre un'applicazione molto importante delle formule di questa rappresentazione dimostrando con esse nella memoria « *Ueber einen liniengeometrischen Satz* » (Göttinger Nachrichten, 20 März 1872) un notevole teorema, di cui più tardi faremo uso, e che nel linguaggio da noi adoperato si può enunciare così:

Data in uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni (dove $n \geqq 5$) una quadrica ad $n-2$ dimensioni, la quale non sia specializzata come luogo più di $n-5$ volte, ogni spazio algebrico ad $n-3$ dimensioni contenuto in essa si può rappresentare con un'equazione algebrica da aggiungersi all'equazione della quadrica stessa.

Il Veronese, nel suo lavoro già altre volte citato, applicò appunto, come noi sopra facciamo, questo metodo della proiezione stereografica di una quadrica a trovare il numero degli $S^1{}_p$ contenuti in un $S^2{}_{2p}$; ma, come già notammo (V. la nota al n° 30), il suo risultato discorda da quello che noi già ottenemmo nel § precedente con altri metodi e che qui ritroviamo con questo.

Questo è dunque il numero degli S'_p contenuti in φ, e, se si ricorda che $p=\frac{n-2}{2}$, si vede che questo risultato è identico a quello ottenuto ai n. 30, 31 per tutt'altre vie. Lo stesso metodo ora usato si applica del resto perfettamente a dare gli spazi lineari di varie dimensioni contenuti in qualunque quadrica, poichè consiste in sostanza nel ridurre la questione a quella identica per una quadrica (C) a 2 dimensioni di meno che la data (φ).

40. Ma ritorniamo al caso in cui φ sia a $2p$ dimensioni nello spazio S a $2p+1$ dimensioni. Nello spazio S due spazi lineari S'_p non si tagliano in generale: perchè essi abbiano un punto comune dev'essere soddisfatta una condizione. Ma se quei due S'_p stanno su φ e non si tagliano, allora conducendo per uno di essi un S'_{p+1} qualunque, questo taglierà l'altro S'_p in un punto, il quale starà necessariamente su un terzo S'_p di φ, in cui quella è tagliata oltre che nel primo dal S'_{p+1}. Si vede così come un S'_p di φ sia tagliato da una serie di altri S'_p di φ e non sia tagliato dai rimanenti. Ora per veder meglio come ciò accada facciamo uso del nostro metodo: consideriamo cioè su φ due S'_p qualunque, e le loro proiezioni S'_p su S. Lo spazio S essendo a $2p$ dimensioni, i due S'_p hanno sempre comune un punto (uno spazio lineare di punti per eccezione, ma a noi non importa questo caso), il quale potrà stare o non su C. Se questo punto non sta su C, esso sarà la proiezione di un punto determinato di φ, il quale dovrà esser comune ai due S'_p considerati; se invece quel punto sta su C, siccome non sarà più immagine di un punto determinato di φ, quei due S'_p non avranno alcun punto comune in generale. Ora le proiezioni S'_p di questi contengono due S'_{p-1} di C, i quali corrispondono così in un certo senso agli S'_p e noi vediamo che in generale due S'_p della quadrica φ a $2p$ dimensioni hanno ovvero non un punto comune secondo che non hanno od hanno un punto comune i due corrispondenti S'_{p-1} della quadrica C a $2(p-1)$ dimensioni. Ora anche per questi possiamo ridurci a due S'_{p-2} di una quadrica a $2(p-2)$ dimensioni, ecc.; finchè finiremo per giungere ad una quadrica a 2 dimensioni (quadrica ordinaria), nella quale, quando pure fosse ignoto, si dimostra ancora collo stesso metodo della proiezione di essa da un suo punto su un piano (con che gli S'_1 o rette che essa contiene si proiettano in due fasci distinti dir ette di quel piano) che esistono due sistemi ben distinti di S'_1 tali, che due di questi si tagliano soltanto ove appartengano a sistemi diversi. Di qui segue adunque la seguente importante proposizione:

In ogni S^2_{2p} vi sono due sistemi ben distinti di S'_p. Se p è numero impari si tagliano in generale soltanto due S'_p di diverso sistema. Se invece p è pari, si tagliano in generale soltanto due S'_p se sono dello stesso sistema (*).

Questa proposizione stabilisce una differenza essenziale tra le quadriche, il cui numero di dimensioni è pari semplicemente e quelle per cui è doppiamente pari, dif-

(*) Questo vale, come diciamo, *in generale*, cioè per due S'_p presi comunque; ma anche la dimostrazione data, prova ciò che si vede direttamente senza difficoltà, cioè che si possono sempre costrurre degli S'_p dello stesso o di diverso sistema ad arbitrio, i quali si taglino in un S'_q, essendo $q<p-1$. In particolare, dato un S'_p qualunque di una quadrica a $2p$ dimensioni, e conducendo per esso un S'_{p+1} ad arbitrio, questo taglierà ancora la quadrica in un S'_p appartenente all'altro sistema.

ferenza che non credo sia stata avvertita sinora (*). Essa risalterà ancora di più in un teorema generale che ora dimostreremo.

41. Consideriamo sulla quadrica a $2p$ dimensioni φ uno spazio algebrico qualunque a p dimensioni. Ogni S'_{p+1} dello spazio S lo taglierà in un numero di punti uguale al suo ordine, e siccome tra questi S'_{p+1} ve ne sono, come sappiamo, di quelli che tagliano la quadrica φ secondo due S'_p di diverso sistema, così conchiudiamo che ciascuno di questi taglierà quello spazio algebrico in un certo numero di punti, sì che la somma di questi due numeri sarà uguale all'ordine di quello. Indicheremo con $S_p^{(l\,m)}$ un tale spazio algebrico contenuto nella quadrica φ e tale che ogni S'_p di φ di un 1° sistema lo tagli in generale in l punti, mentre ogni S'_p del 2° sistema lo tagli in m punti, essendo $l+m$ l'ordine di quello spazio. Ciò posto noi vogliamo risolvere la questione se due tali spazi algebrici hanno punti comuni in generale, e quanti ne hanno.

Per questo notiamo anzitutto che l'imagine su S di un $S_p^{(l\,m)}$ di φ è un S_p^{l+m} che taglia I in un S_{p-1} giacente su C e proiezione su S dell'intersezione di π col $S_p^{(l\,m)}$. Ogni S'_p del 1° sistema di φ, il quale passi per P, starà su π e taglierà quel $S_p^{(l\,m)}$ in l punti: esso poi taglierà S in un S'_{p-1} del 1° sistema di C, il quale taglierà adunque l'S_{p-1} di cui si tratta negli l punti imagini di quelli. Considerando pure il 2° sistema di S'_p di φ e di S'_{p-1} di C, si vede così come la proiezione del $S_p^{(l\,m)}$ di φ su S è un S_p^{l+m} che passa per un $\mathsf{S}_{p-1}^{(l\,m)}$ di C.

Ciò premesso, consideriamo sulla quadrica φ un $S_p^{(l\,m)}$ ed un $S_p^{(l'\,m')}$: le loro proiezioni dal punto P su S saranno un S_p^{l+m} ed un $\mathsf{S}_p^{l'+m'}$, che si taglieranno in generale in $(l+m)$ $(l+m)$ punti (V. n° 6). Però tra questi corrisponderanno a punti comuni del $S_p^{(l\,m)}$ e del $S_p^{(l'\,m')}$ solo quelli che non stanno su C, cioè che non sono i punti d'intersezione di quegli $\mathsf{S}_{p-1}^{(l\,m)}$, $\mathsf{S}_{p-1}^{(l'\,m')}$ in cui, dietro quanto fu premesso, i suddetti S_p^{l+m} e $S_p^{l'+m'}$ tagliano C. Quindi se diciamo X_p il numero cercato dei punti comuni ad un $S_p^{(l\,m)}$ e un $S_p^{(l'\,m')}$ di una quadrica a $2p$ dimensioni, numero che, supponendo $l\ m$ e $l'\ m'$ fissi, è una funzione di p, avremo;

$$X_p = (l+m)\,(l'+m') - X_{p-1}\ .$$

Da questa relazione segue immediatamente: $X_p = X_{p-2}$. Per avere X_0 notiamo che esso sarà il numero relativo ad una quadrica S_0^2, cioè una coppia di punti nell'uno dei quali stanno l punti del $S_0^{(l\,m)}$ ed l' punti del $S_0^{(l'\,m')}$, e nell'altro risp. m punti ed m' punti; cosicchè il numero X_0 dei punti comuni a questi $S_0^{(l\,m)}$, $S_0^{(l'\,m')}$ va considerato come uguale ad $ll'+mm'$. Dunque sarà, ricordando le relazioni trovate:

$$X_p = l\,l' + m\,m' \quad \text{per} \quad p \text{ pari}$$
$$X_p = l\,m' + l'm \quad \text{per} \quad p \text{ impari}\ ,$$

e così otteniamo il seguente teorema:

(*) Però il Cayley in una nota intitolata « *On the superlines of a quadric surface in fivedimensional space* » (Quarterly Journal, vol. XII, 1873) fu condotto dalla considerazione delle rette dello spazio, come formanti una superficie quadrica in uno spazio a 5 dimensioni, a notare la differenza suddetta, ma solo tra le quadriche ordinarie dello spazio a 3 dimensioni e le quadriche dello spazio a 5 dimensioni.

In ogni S^2_{2p} il numero dei punti comuni a due spazi algebrici a p dimensioni $S_p^{(l\,m)}$ e $S_p^{(l'\,m')}$ è eguale a $lm'+l'm$ se p è impari, ed è uguale a $ll'+mm'$ se p è pari.

Quest'importante teorema comprende evidentemente come caso particolare (corrispondente a valori particolari di l, m, l', m') quello trovato al n° precedente. Ponendovi poi anzitutto $p=1$, abbiamo per la geometria su d'una quadrica ordinaria a 2 dimensioni un teorema dovuto allo CHASLES (*). E ponendovi poi $p=2$ abbiamo la proposizione relativa ad una quadrica a 4 dimensioni, e vedremo a suo tempo che considerando la retta dello spazio ordinario come l'elemento di una tal quadrica, quella proposizione costituisce l'importante teorema di *Halphen* sul numero delle rette comuni a due sistemi doppiamente infiniti di date caratteristiche.

§ 5.

Generazione delle quadriche con sistemi reciproci.

42. Lo studio fatto nei §§ precedenti degli spazi lineari di punti contenuti in una data quadrica ha stretta relazione colla questione della generazione di questa mediante forme proiettive. Questa è appunto la questione che ora risolveremo.

Abbiansi due sistemi lineari $m-1$ volte infiniti di superficie algebriche nello spazio di punti ad $n-1$ dimensioni, sistemi tali che ad ogni superficie dell'uno ne corrisponda un sistema lineare $m-2$ volte infinito dell'altro, e viceversa ad ogni sistema lineare $m-2$ volte infinito di superficie contenuto in questo corrisponda una sola superficie del primo sistema; diremo allora che essi sono *reciproci*. Ci proponiamo anzitutto di determinare il luogo dei punti dello spazio comuni ad una superficie del 1° sistema, ed a tutte le corrispondenti superficie del 2° (**).

Siano:

(1)....... $$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_m U_m = 0\ ,$$

(2)....... $$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \ldots + \mu_m V_m = 0\ ,$$

le equazioni dei due sistemi lineari di superficie, nelle quali i simboli U, V rappresentano funzioni date delle coordinate di punti risp. dei gradi dati l, k, e le λ, μ sono i parametri variabili delle superficie dei due sistemi. Affinchè questi parametri appartengano

(*) « *Propriétés générales des courbes gauches tracées sur l'hyperboloïde* » (Comptes-rendus, Déc. 1861, t. 53, pag. 1077). — Anche altri teoremi contenuti in questa memoria si potrebbero estendere alle quadriche a più dimensioni, facendo uso del nostro metodo. Però non lo facciamo per non dilungarci troppo.

(**) Il PADOVA, nella memoria « *Della generazione delle superficie mediante reti proiettive* » (Giornale di Battaglini, vol. 9), fece pel primo questa ricerca analiticamente. Però egli considerò solo il caso delle reti di superficie nello spazio ordinario; inoltre il ragionamento, di cui noi qui facciamo uso, pare preferibile per eleganza e semplicità a quello usato in quel lavoro.

a superficie corrispondenti dovranno, per la definizione data della reciprocità, soddisfare ad un'equazione bilineare fissa tra le due serie di variabili λ e μ. Sia:

$$(3)\ldots\ldots \qquad \sum_{i\,k} a_{ik}\lambda_i\mu_k = 0\ ,$$

quest'equazione, in cui le a_{ik} siano costanti date. Consideriamo un punto qualunque x del luogo cercato; vi sarà per ipotesi un determinato sistema di valori delle λ pei quali x soddisferà l'equazione (1) e pei quali inoltre tutti gl'infiniti sistemi corrispondenti per la (3) di valori delle μ saranno tali che, sostituiti nella (2), questa sarà sempre soddisfatta dal punto x. In altri termini le equazioni (2) e (3) lineari nelle μ devono equivalersi se vi si pongono il punto considerato x ed il sistema considerato di valori delle λ. Dunque dev'essere:

$$(4)\ldots\ldots \qquad \rho V_k = \sum_i a_{ik}\lambda_i\ , \qquad (k = 1, \ldots m)$$

essendo ρ costante rispetto a k, ed essendosi nelle V_k sostituite le coordinate del punto x. Ma le λ devono pur soddisfare la (1), cioè:

$$0 = \sum_i U_i\,\lambda_i\ ,$$

dove nelle U_i si sia fatta la stessa sostituzione. Dunque, eliminando tra queste $m+1$ equazioni omogenee ρ e le λ_i, il punto x dovrà soddisfare l'equazione:

$$(5)\ldots\ldots \qquad \begin{vmatrix} 0 & U_1 & . & U_m \\ V_1 & a_{11} & . & a_{m1} \\ . & . & . & . \\ V_m & a_{1m} & . & a_{mm} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Viceversa se il punto x soddisfa quest'equazione si potranno determinare le λ in guisa da soddisfare la (1) e le (4), e queste mostrano che allora quel punto starà su una superficie determinata (λ) del sistema (1) e su tutte quelle (μ) corrispondenti del sistema (2). Dunque l'equazione (5) è quella del luogo cercato. Essa essendo simmetrica rispetto alle U, V ci mostra che questo luogo è una superficie d'ordine $l+k$ (*), la quale è pure luogo dei punti comuni ad ogni superficie del 2° sistema ed a tutte le corrispondenti del 1° sistema. Se le superficie di un sistema hanno punti comuni, l'equazione (5) mostra pure che essi apparterranno alla superficie così generata.

(*) La trattazione del problema qui considerato si può pur fare sinteticamente senza difficoltà. Così questo risultato si dimostra brevemente come segue col principio di corrispondenza. Consideriamo un S'_1 qualunque: per ogni suo punto passa un sistema lineare $m-2$ volte infinito di superficie del primo sistema, cui corrisponderà nel 2° una determinata superficie, che taglierà quel S'_1 in k punti; viceversa se prendiamo uno di questi vi passerà un sistema lineare $m-2$ volte infinito di superficie del secondo sistema, cui corrisponderà una sola superficie del 1°, la quale taglierà l'S'_1 in l punti. Vi è dunque su questo una corrispondenza (l, m) i cui $l+m$ punti uniti staranno sul luogo cercato, che è quindi di ordine $l+m$.

43. Poniamo in particolare $l=k=1$, cioè che i sistemi lineari reciproci considerati (1) e (2) di superficie siano sistemi lineari di piani. Allora la superficie (5) da essi generata sarà una quadrica: vediamo se sia specializzata o generale. Indicando con A_{ik} il subdeterminante complementare di a_{ik} nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}$$

dell'equazione di reciprocità (3), l'equazione (5) della quadrica si potrà scrivere:

$$\sum_{ik} A_{ik} U_i V_k = 0 \, .$$

Annullando le derivate parziali di quest'equazione rispetto alle n coordinate, si hanno n equazioni tutte omogenee lineari nelle $2m$ espressioni U e V. Quando $2m \geqq n$ è facile persuadersi che in generale non vi saranno punti soddisfacenti quelle n equazioni derivate, cioè non vi saranno punti doppi. Ma quando $2m < n$, allora quelle n equazioni saranno soddisfatte dai punti comuni ai piani U, V dei due sistemi reciproci (1), (2), punti che in tal caso formano un S'_{n-2m-1}, pel quale passano i sostegni S'_{n-m-1} dei due sistemi reciproci. Dunque nel caso in cui $2m < n$, la quadrica generata da questi è in generale specializzata $n-2m$ volte, avendo per punti doppi i punti comuni ai sostegni dei due sistemi reciproci. Conchiudiamo dunque:

Due sistemi lineari reciproci ad $m-1$ dimensioni di piani generano colle intersezioni dei piani dell'uno con tutti quelli corrispondenti dell'altro una quadrica passante pei sostegni dei due sistemi; quando $m < \frac{n}{2}$ questa quadrica è specializzata $n-2m$ volte, avendo per punti doppi quelli comuni a quei due sostegni. In particolare due fasci proiettivi di piani ($m=2$) generano colle intersezioni dei piani corrispondenti una quadrica avente per punti doppi l' S'_{n-5} che è in generale comune ai sostegni dei due fasci.

La condizione $m \geqq \frac{n}{2}$ affinchè la quadrica generata non sia specializzata è ben naturale, giacchè i sostegni sono S'_{n-m-1} e stanno sulla quadrica: quindi perchè questa non sia specializzata dev'essere $n-m-1 \leqq \frac{n-2}{2}$, cioè appunto $m \geqq \frac{n}{2}$.

44. Possiamo ora invertire il risultato ottenuto ricordando la proposizione a cui giungemmo nel § 2 (n° 25), che due quadriche specializzate uno stesso numero h di volte si possono trasformare l'una nell'altra in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{h(h-1)}{2}}$ modi. Di qui segue infatti che se una quadrica h volte specializzata è generabile con sistemi reciproci di piani di una certa specie, tutte le quadriche h volte specializzate saranno generabili a quel modo, ed inoltre si potranno mutare in infiniti modi i sistemi reciproci (ed i loro sostegni) atti a generare una stessa quadrica. Invero, considerando anzitutto una quadrica generale, essa contiene (V. n° 30) $\infty^{\frac{1}{2}(n-m)(3m-n-1)}$ S'_{n-m-1}, e quindi le condizioni perchè i

sostegni di due sistemi reciproci generanti un' altra quadrica, che si può in $\infty^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ modi trasformare in questa, si trasformino appunto in due dati S'_{n-m-1} di questa saranno $(n-m)(3m-n-1)$, sicchè di parametri disponibili nella trasformazione ne rimangono:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)-(n-m)(3m-n-1)=3m^2-(4n+1)m+\tfrac{1}{2}(3n^2+n) \ ,$$

numero che è sempre positivo, qualunque siano m ed n (purchè $n>1$), e che esprime l'ordine d'infinità del numero di modi in cui i 2 sistemi lineari di piani aventi i sostegni scelti si possono ancora riferire reciprocamente tra loro sì da generare la data quadrica. Dunque:

Ogni quadrica si può generare come luogo delle intersezioni dei piani corrispondenti di due sistemi reciproci di piani, i cui sostegni si possono prendere ad arbitrio sulla quadrica; la specie dei due sistemi atti a questa generazione può esser qualunque, purchè tale che la quadrica data, specializzata o non, sia capace di contenerne i sostegni (*).

Ad esempio una quadrica generale dello spazio ad $n-1$ dimensioni può generarsi con due sistemi lineari reciproci di piani ad $n-1$ dimensioni ($m=n$), cioè con una correlatività tra due spazi sovrapposti, come luogo di quei punti dello spazio che stanno sui piani corrispondenti. Può generarsi con due sistemi lineari reciproci ad $n-2$ dimensioni di piani ($m=n-1$) aventi per sostegni due punti arbitrari della quadrica e nei quali ad un piano dell'uno corrisponde un S_1' nell'altro. E così via. Se n è impari si può solo andare fino ai sistemi lineari di piani ad $\frac{n-1}{2}$ dimensioni; se invece n è pari, si può solo andare fino ai sistemi lineari di piani ad $\frac{n-2}{2}$ dimensioni.

Se invece la quadrica data è specializzata h volte, e si prendono i sostegni dei due sistemi lineari reciproci sì, che passino pei suoi punti doppi, allora si può prendere il numero delle dimensioni di quei due sistemi da $n-1$ fino a $\frac{n-1-h}{2}$ oppure $\frac{n-2-h}{2}$ secondo che l'uno o l'altro dei due numeri è intero. Del resto, questo caso si deduce da quello di una quadrica non specializzata, considerando in luogo della data la sua intersezione con un S'_{n-1-h}, che sarà una quadrica non specializzata, e proiettando tutto dal S'_{h-1} doppio della data quadrica. Gli è chiaro che proiettando sistemi lineari reciproci di S'_{n-2-h} posti in quel S'_{n-1-h} si hanno sistemi lineari reciproci di piani nello spazio S.

45. Per ultimo osserviamo che quando si ha una quadrica a numero pari di dimensioni S^2_{2p}, essa è generabile con sistemi reciproci di piani aventi per sostegni due S_p' contenuti in essa, e siccome gli S_p' della quadrica formano in tal caso due diversi sistemi,

(*) Questo teorema si trova già, senza dimostrazione, nella memoria citata del VERONESE (loc. cit., pag. 192).

come vedemmo nel § precedente, si può domandare se quei sostegni devono essere S_p' dello stesso oppure di diverso sistema. Notiamo che quando si prendano ad arbitrio nello spazio a $2p+1$ dimensioni due sistemi lineari reciproci di piani, i quali siano p volte infiniti, cioè abbiano per sostegni degli S_p', la quadrica che essi generano è generale, perchè i due sostegni S_p' non hanno in generale punti comuni. Ma, se questi avessero punti comuni, la quadrica generata ne riceverebbe dei punti doppi. Dunque, se la quadrica data non ha, come noi supponiamo, punti doppi, per generarla con sistemi reciproci di piani p volte infiniti, bisognerà prendere ad arbitrio per loro sostegni due S_p' della quadrica, i quali non abbiano punti comuni, e quindi, in virtù dei risultati del § precedente, siano di uno stesso sistema se p è impari, di diverso sistema se p è pari.

I casi più semplici $p=1$ e $p=2$ corrispondono alla quadrica ordinaria a 2 dimensioni ed alla quadrica a 4 dimensioni. La quadrica ordinaria è generabile con due fasci proiettivi di piani, i cui sostegni si possono prendere ad arbitrio sulla quadrica stessa, purchè siano generatrici dello *stesso* sistema. La quadrica a 4 dimensioni invece è generabile con due *stelle* reciproche di piani aventi per sostegni degli S_2', sì che ad ogni piano S_4' dell'una stella ne corrisponde nell'altra un fascio, o, se si vuole, l'S_3' comune a questo fascio, e le intersezioni S_2' dei corrispondenti S_4' ed S_3' delle due stelle hanno per luogo la quadrica; orbene i sostegni delle due stelle si possono prendere ad arbitrio sulla quadrica, purchè siano S_2' di *diverso* sistema (i quali non abbiano posizione particolare l'uno rispetto all'altro, cioè non abbiano punti comuni).

PARTE SECONDA.

FASCI E SCHIERE DI QUADRICHE; QUARTICHE OMOFOCALI

---

§ 1.

Fascio di quadriche e polarità rispetto ad esso.

46. Abbiansi nello spazio di punti S ad $n-1$ dimensioni due quadriche

$$\varphi \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$
$$f \equiv \Sigma c_{ik} x_i x_k = 0 \ .$$

Tutte le quadriche, che si ottengono dall'equazione

$$\lambda\varphi + \mu f = 0 \ ,$$

dando al rapporto $\lambda : \mu$ tutti i valori possibili, diconsi formare un *fascio* di quadriche. È chiaro che esse si possono anche definire come quelle quadriche che contengono tutti i punti comuni alle due date φ, f. Questi punti comuni formano (V. n° 6) un S^4_{n-3}, che costituisce la *base* del fascio e che noi chiameremo *quartica* (mentre non daremo tal nome a quegli S^4_{n-3}, che non si potessero ottenere in questo modo).

47. Consideriamo i punti in cui le quadriche del fascio sono tagliate da uno spazio lineare qualunque di punti, p. e. da un S'_{m-1} rappresentato dalle equazioni:

$$x_i = \sum_r \lambda^{(r)} x_i^{(r)} \qquad (r = 1, \ldots, m)(i = 1, \ldots, n) \ ,$$

in cui gli $x^{(r)}$ sono m punti dati che determinano l' S'_{m-1}, e le $\lambda^{(r)}$ sono variabili, che si possono considerare come coordinate di punti sul S'_{m-1}. Facendo questa sostituzione nell'equazione del fascio

$$\lambda\varphi(x) + \mu f(x) = 0 \ ,$$

essa diventa:

$$\lambda \sum_{rs} \varphi(x^{(r)} x^{(s)}) \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} + \mu \sum_{rs} f(x^{(r)} x^{(s)}) \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} = 0 \ ,$$

e quindi nelle m coordinate omogenee $\lambda^{(r)}$ sullo spazio S'_{m-1} rappresenta un nuovo fascio di quadriche; sicchè ogni spazio lineare di punti di S taglierà il dato fascio di quadriche secondo un nuovo fascio di quadriche a minor numero di dimensioni: base di questo nuovo fascio sarà l'intersezione di quello spazio lineare colla quartica base del dato fascio. In particolare, ponendo $m = 2$, ogni S'_1 dello spazio S taglia il fascio di quadriche dato nelle coppie di punti di un'involuzione quadratica.

48. Volendo vedere quali tra le quadriche del fascio dato siano tangenti al S'_{m-1} considerato basta far uso del criterio generale dato al n° 35. I loro parametri $\lambda:\mu$ saranno dunque dati dall'equazione:

$$|\,\lambda\varphi(x^{(r)}x^{(s)})+\mu f(x^{(r)}x^{(s)})\,|=0\ .$$

Notando che quest'equazione è del grado m in $\lambda:\mu$ possiamo dunque conchiudere:

Ogni S'_{m-1} dello spazio è toccato in generale da m quadriche di un dato fascio. In particolare per un punto qualunque dello spazio passa una sola quadrica di questo, un S_1' è toccato da due, un S_2' da tre, ecc.; un piano S'_{n-2} dello spazio è toccato da $n-1$ quadriche del fascio.

49. La stessa cosa si dimostra supponendo che l'S'_{m-1} di punti sia determinato mediante $n-m$ piani ξ', ξ'', ..., $\xi^{(n-m)}$ passanti per esso. In tal caso la condizione di contatto colla quadrica (λ,μ) del fascio diventa (V. n° 36):

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11}+\mu c_{11} & . & \lambda a_{1n}+\mu c_{1n} & \xi_1' & . & \xi_1^{(n-m)} \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda a_{n1}+\mu c_{n1} & . & \lambda a_{nn}+\mu c_{nn} & \xi_n' & . & \xi_n^{(n-m)} \\ \xi_1' & . & \xi_n' & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \xi_1^{(n-m)} & . & \xi_n^{(n-m)} & 0 & . & 0 \end{vmatrix}=0\ ,$$

equazione che, imaginata svolta secondo le ultime $n-m$ orizzontali e verticali, non solo si mostra del grado m in $\lambda:\mu$, a conferma del risultato già avuto, ma inoltre contiene questo $\lambda:\mu$ solo nei subdeterminanti d'ordine m del discriminante della quadrica $\lambda\varphi+\mu f$. Ciò prova che, se vi è un valore di $\lambda:\mu$ al quale corrisponda una quadrica specializzata (come luogo) un numero di volte che sia $\geqq n-m+1$, quel valore di $\lambda:\mu$ annullando per conseguenza quei subdeterminanti d'ordine m sarà una radice dell'equazione scritta in $\lambda:\mu$, e precisamente una radice, in generale, del grado stesso a cui esso è radice simultaneamente di tutti quei subdeterminanti. Dunque:

Una quadrica h volte specializzata di un dato fascio di quadriche conta tante volte tra le m quadriche tangenti ad un S'_{m-1} qualunque dello spazio (essendo $m-1\geqq n-h$) quante sono le unità contenute nell'ordine di multiplicità a cui la radice corrispondente $\lambda:\mu$ del discriminante di una quadrica indeterminata $\lambda\varphi+\mu f$ del fascio entra come radice simultaneamente in tutti i subdeterminanti d'ordine m.

Questa proposizione importante verrà completata nel seguito.

50. Un punto qualunque x dello spazio ha per polare rispetto alla quadrica $\lambda\varphi+\mu f$ del fascio il piano di coordinate

$$\xi_i=\lambda\varphi_i(x)+\mu f_i(x)\ .$$

Dunque, variando $\lambda:\mu$, quel piano descrive un fascio. *I piani polari di un punto rispetto ad un fascio di quadriche formano pure un fascio.* L' S'_{n-3} comune a questi è dunque il luogo di quei punti che sono coniugati di x rispetto a tutte le quadriche del fascio. Del resto è chiaro, anche senza ricorrere ad equazioni, che i punti comuni

ai piani polari di x rispetto a due quadriche del fascio saranno coniugati di x rispetto ad entrambe e quindi anche rispetto a tutte le quadriche del fascio, e quindi staranno in tutti i piani polari di x, onde questi formeranno pure un fascio. In particolare tra i piani di questo fascio quello che passa pel punto x sarà il piano tangente all'unica quadrica del fascio dato, la quale passi per x. Se il punto x stesso su quel S'_{n-3}, che diremo suo *polare* rispetto al fascio di quadriche, allora starebbe pure sui suoi piani polari rispetto a tutte queste, e quindi anche su queste, cioè il punto x starebbe sulla quartica base del fascio, e quel S'_{n-3} passante per esso sarebbe tangente a tutte le quadriche di questo, e quindi anche, come si vede facilmente, a quella quartica.

Considerando una quadrica h volte specializzata del fascio, il piano polare di x rispetto ad essa passerà per tutto l' S'_{h-1} doppio di essa, e quindi l' S'_{n-3} polare di x rispetto al fascio giacendo su quel piano taglierà quel S'_{h-1} secondo un S'_{h-2} (per $h>1$), e non soltanto secondo un S'_{h-3} come accade per un S'_{n-3} qualunque dello spazio S. Diremo allora che l' S'_{n-3} è *secante* del S'_{h-1}. Quindi conchiudiamo che:

Gli S'_{n-3} polari dei punti dello spazio rispetto ad un dato fascio di quadriche sono secanti dei sistemi di punti doppi delle quadriche del fascio specializzate più d'una volta.

51. Le espressioni date nel n° precedente delle coordinate del piano polare di x rispetto alla quadrica (λ, μ) del fascio dato mostrano che:

Il fascio dei piani polari di un punto rispetto ad un fascio di quadriche corrisponde proiettivamente a questo fascio.

Se consideriamo in particolare quelle quadriche fisse del fascio le quali sono specializzate, i piani polari corrispondenti sono determinati dal dover passare pei sistemi di punti doppi appartenenti a quelle quadriche specializzate, e noi vediamo che gli S'_{n-3} polari di punti dello spazio rispetto al fascio di quadriche godono della proprietà che i gruppi degli r piani passanti per essi e per i sistemi di punti doppi delle r quadriche specializzate del fascio sono tutti tra loro proiettivi. Nel caso più generale si ha $r=n$, poichè in generale l'equazione

$$|\lambda a_{ik} + \mu c_{ik}| = 0 ,$$

di grado n in $\lambda : \mu$ ha n radici distinte, che corrispondono ad n quadriche semplicemente specializzate del fascio. Orbene si considerino gli n punti doppi di queste. Ogni S'_{n-3} dello spazio, il quale sia polare di un punto rispetto al fascio di quadriche gode della proprietà che gli n piani che lo congiungono a quegli n punti fissi formano un gruppo che rimane sempre proiettivo a se stesso mutando quel S'_{n-3}, cioè un gruppo che è proiettivo al gruppo delle n quadriche specializzate, o delle n radici di quell'equazione di grado n in $\lambda : \mu$. (Viceversa la condizione che quel gruppo rimanga sempre proiettivo ad uno dato equivalendo ad $n-3$ condizioni semplici ed essendo $\infty^{2(n-2)}$ il numero di S'_{n-3} dello spazio, segue che, assoggettando questi a quella condizione, il loro numero si riduce ad ∞^{n-1}, quale è appunto il numero degli S'_{n-3} polari di punti dello spazio rispetto al fascio di quadriche; cosicchè questo sistema di S'_{n-3} equivale a quello assoggettato alla prima condizione).

Se supponiamo $n=4$ otteniamo così il teorema noto che nello spazio ordinario a 3 dimensioni le rette polari dei punti dello spazio rispetto ad una coppia di quadriche, od al loro fascio sono tali che da esse i vertici dei 4 coni di questo sono proiettati con 4 piani aventi un rapporto anarmonico costante, cioè sono le rette di un *complesso tetraedrale*. L'analogo di questo in uno spazio ad $n-1$ dimensioni qualunque è dunque l'insieme di quegli S'_{n-3} che, congiunti ad n punti fissi dello spazio dànno n piani formanti un gruppo di dati rapporti anarmonici (od invarianti assoluti).

52. Un S'_1 qualunque dello spazio ha, come sappiamo, per spazio polare rispetto ad ogni quadrica del fascio dato un S'_{n-3}, che è l'intersezione dei piani polari rispetto ad essa di due punti fissi qualunque del S'_1. Dicendo x', x'' questi punti ed indicando in generale con L_k e M_k i primi membri delle equazioni dei piani polari del punto dato $x^{(k)}$ rispetto alle quadriche φ ed f, i piani polari di x', x'' rispetto alle quadriche del fascio $\lambda\varphi+\mu f$ avranno per equazioni:

$$\lambda L_1+\mu M_1=0\ ,$$
$$\lambda L_2+\mu M_2=0\ ,$$

e quindi gli S'_{n-3} d'intersezione dei piani che corrispondono ad una stessa quadrica avranno per luogo la superficie d'equazione:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix}=0\ .$$

Ora, questa rappresenta una quadrica generabile con fasci di piani proiettivi (ed avente quindi in generale un S'_{n-5} doppio) avente un secondo sistema di (generatrici) S'_{n-3}, che risultano dalle equazioni

$$k_1\,L_1+k_2\,L_2=0$$
$$k_1\,M_1+k_2\,M_2=0\ ,$$

facendovi variare $k_1:k_2$, e sono gli S'_{n-3} polari dei punti $(k_1x'+k_2x'')$ del S'_1 considerato rispetto al fascio dato di quadriche.

L'S'_1 taglia quella quadrica in due punti, i quali staranno in conseguenza risp. sugli S'_{n-3} polari del S'_1 rispetto a due certe quadriche del fascio e quindi saranno punti di contatto del S'_1 con queste due quadriche. Così vediamo confermato il fatto che ogni S'_1 tocca due quadriche di un fascio.

53. Un S'_2 qualunque ha per polare rispetto ad ogni quadrica del fascio un S'_{n-4}, cosicchè il luogo di questi sarà un S_{n-3}, di cui cerchiamo l'equazione. Sia l'S'_2 rappresentato da $k_1x'+k_2x''+k_3x'''$ dove k_1, k_2, k_3, variano, mentre i punti x', x'', x''' sono fissi. L'S'_{n-4} polare di quel S'_2 rispetto alla quadrica $\lambda\varphi+\mu f$ sarà rappresentato dalle equazioni lineari (ritenendo le notazioni precedenti L_k e M_k):

$$\lambda L_1+\mu M_1=0$$
$$\lambda L_2+\mu M_2=0$$
$$\lambda L_3+\mu M_3=0\ ,$$

e quindi, variando la quadrica nel fascio, il luogo di quel S'_{n-4} avrà per equazioni:

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

ed è quindi uno spazio cubico S^3_{n-3}, che taglierà l'S'_2 in 3 punti comuni a questo ed ai suoi S'_{n-4} polari rispetto a 3 quadriche del fascio, laonde quelli saranno i punti di contatto del S'_2 con queste 3 quadriche. Ma la forma di quell'equazione mostra che essa è soddisfatta da quei punti pei quali le due equazioni

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3 = 0 ,$$
$$k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = 0 ,$$

sono identiche tra loro, cioè da quei punti pei quali passano solo piani corrispondenti tra loro di questi due sistemi proiettivi doppiamente infiniti, ossia passano S'_{n-3} corrispondenti di quei due sistemi. È chiaro che i piani corrispondenti di questi sistemi si tagliano secondo gli S'_{n-3} polari dei punti del S'_2 dato rispetto al fascio di quadriche, e ciascuno di questi S'_{n-3} taglia l'S^3_{n-3} precisamente nel S^2_{n-4} in cui (escludendo la parte $L_1 = L_2 = L_3 = 0$) questo è tagliato dal piano $k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3 = 0$. Quindi quegli S'_{n-3} sono *secanti* del S^3_{n-3}, cioè, invece di tagliarlo in spazi di 3° ordine ad $n-5$ dimensioni, lo tagliano in S^2_{n-4}.

54. In generale consideriamo l'S'_{m-1} di punti rappresentato da

$$k_1 x' + k_2 x'' + \ldots + k_m x^{(m)} :$$

il suo S'_{n-m-1} polare rispetto alla quadrica $\lambda x + \mu f$ del fascio dato sarà determinato dalle equazioni

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = 0$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\lambda L_m + \mu M_m = 0 ,$$

ed il suo luogo avrà quindi per equazione:

$$\begin{vmatrix} L_1 & . & L_m \\ M_1 & . & M_m \end{vmatrix} = 0 ,$$

sicchè sarà, com'è facile vedere, un S^m_{n-m} (*). Questo taglia in generale l'S'_{m-1} dato in m punti, che saranno i punti di contatto di questo colle m quadriche ad esso tangenti. Quell'equazione rappresenta pure il luogo di quei punti pei quali passano due S'_{n-m} corrispondenti dei due sistemi lineari proiettivi:

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 + \ldots + k_m L_m = 0$$
$$k_1 M_1 + k_2 M_2 + \ldots + k_m M_m = 0 ,$$

(*) La teoria dei luoghi generati da sistemi proiettivi di piani, il loro doppio modo di generazione e la considerazione degli spazi lineari secanti, si trovano svolti in modo completo nel lavoro del Veronese, che ne fa pure importanti applicazioni (V. memoria citata, pag. 215 e seg.).

i cui piani corrispondenti si tagliano negli S'_{n-3} polari dei punti

$$(k_1 x' + k_2 x'' + \dots + k_m x^{(m)}) \ ,$$

del S'_{m-1} rispetto al fascio di quadriche. Uno qualunque $(k_1 \dots k_m)$ di questi S'_{n-3} taglia l' S^m_{n-m} di cui trovammo le equazioni precisamente nella sua intersezione con $k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_m L_m = 0$, dalla quale però si escluda $L_1 = 0$, $L_2 = 0, \dots,$ $L_m = 0$, cioè taglia l' S^m_{n-m} in un S^{m-1}_{n-m-1} (invece che in un S^m_{n-m-2}) e quindi è uno spazio lineare secante di quello.

55. Finalmente (per $m = n-1$) un piano S'_{n-2} dello spazio ha per polo rispetto alla quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ del fascio il punto determinato dalle $n-1$ equazioni:

$$\begin{aligned} \lambda L_1 \ \ + \mu M_1 \ \ &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \\ \lambda L_{n-1} + \mu M_{n-1} &= 0 \ , \end{aligned}$$

e quindi il luogo del suo polo rispetto alle quadriche del fascio stesso è dato da

$$\left| \begin{matrix} L_1 & . & L_{n-1} \\ M_1 & . & M_{n-1} \end{matrix} \right| = 0 \ ;$$

cioè è un S_1^{n-1} (curva d'ordine $n-1$) razionale, i cui $n-1$ punti d'intersezione col piano dato sono i punti di contatto di questo colle $n-1$ quadriche del fascio, che toccano quel piano. Quell' S_1^{n-1} (il quale gode di molte proprietà notevoli) è pure il luogo dei punti per cui passano due S'_1 corrispondenti dei sistemi lineari proiettivi (stelle):

$$\begin{aligned} k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_{n-1} L_{n-1} &= 0 \\ k_1 M_1 + k_2 M_2 + \dots + k_{n-1} M_{n-1} &= 0 \ , \end{aligned}$$

i cui piani corrispondenti si tagliano negli S'_{n-3} polari dei punti del dato piano rispetto al fascio di quadriche. Ognuno di questi S'_{n-3} è *secante* del S_1^{n-1}, cioè lo taglia in $n-2$ punti.

La teoria così svolta della polarità rispetto ad un fascio di quadriche si estenderebbe facilmente alla polarità rispetto ad un sistema lineare qualunque di quadriche. Ma non lo facciamo per non uscire dai limiti, che ci siamo imposti.

§ 2.

Spazi quadratici e lineari contenuti in una quartica. Generazione di questa con sistemi reciproci.

56. La ricerca degli spazi quadratici di punti ad $m-1$ dimensioni S^2_{m-1} contenuti nella quartica Q d'intersezione di due date quadriche f e φ è assai semplice dopo quella, che abbiamo fatto nel § 3 della 1ª parte, degli spazi lineari S'_m contenuti in una quadrica. È chiaro in fatti che ogni S'_m contenuto in una quadrica del fascio $f\varphi$ taglierà un'altra di queste quadriche in un S^2_{m-1} contenuto nella quar-

tica Q. Viceversa poi, se un S^2_{m-1} è contenuto in Q, esso sarà determinato dall'intersezione di un S'_m contenuto in una determinata quadrica del fascio con qualunque altra, o, in casi più particolari, starà in un S'_m contenuto in Q; invero ogni S^2_{m-1} sta in un S'_m (V. n.° 7) e se si considera un punto esterno al S^2_{m-1}, ma posto su questo S'_m, per esso passerà una determinata quadrica del fascio (oppure tutte, e quindi anche la quartica Q), la quale, tagliando l'S'_m in quel punto oltre che nel S^2_{m-1}, conterrà tutto l'S'_m. Quindi noi vediamo che ad ogni quadrica del fascio corrisponde un sistema di S^2_{m-1} contenuti nella quartica Q, cioè gli S^2_{m-1} pei quali gli S'_m che li contengono sono gli S'_m contenuti nella quadrica considerati. Diremo dunque che ad ogni quadrica passante per la quartica Q corrisponde una *generazione* di questa, sicchè questa ha infinite generazioni corrispondenti a quelle infinite quadriche; in particolare essa ha delle generazioni *specializzate* corrispondenti alle quadriche specializzate del fascio. Ad ogni generazione corrispondono, secondo che n è impari o pari (V. n° 30)

$$\infty^{\frac{1}{8}(n-1)(n+1)} S^2_{\frac{n-5}{2}} \quad \text{ovvero} \quad \infty^{\frac{1}{8}n(n-2)} S^2_{\frac{n-4}{2}}$$

(formanti in questo caso due sistemi), nè le appartengono in generale spazi quadratici di maggior numero di dimensioni. Per un punto qualunque della quartica passano di ogni generazione a seconda dei due casi:

$$\infty^{\frac{1}{8}(n-3)(n-1)} S^2_{\frac{n-5}{2}} \quad \text{ovvero} \quad \infty^{\frac{1}{8}(n-4)(n-2)} S^2_{\frac{n-4}{2}} .$$

57. Fanno solo eccezione quelle generazioni (in numero finito $\leqq n$) della quartica, le quali sono specializzate. Consideriamo una quadrica h volte specializzata del fascio: avrà un S'_{h-1} doppio, il quale o taglierà un'altra quadrica del fascio secondo un S^2_{h-2} (purchè $h>1$), oppure vi sarà tutto contenuto; si avranno così sulla quartica un S^2_{h-2} oppure un S'_{h-1} tutto composto di *punti doppi* di questa, cioè di punti tali che ogni S'_2 passante per uno di essi taglia la quartica stessa in 4 punti, di cui due sempre coincidono in quello. In fatti ogni tal S'_2 (piano, nello spazio ordinario) taglia la quadrica specializzata considerata secondo una coppia di S'_1 (rette, nello spazio ordinario) tagliantisi in quel punto e taglia un'altra quadrica del fascio in un S_1^2 (conica) passante pel punto stesso, onde in questo coincidono appunto due dei 4 punti d'intersezione di questo S_2^2 con quella coppia di S'_1, cioè dei punti d'intersezione del S'_2 colla quartica. Diremo *sistema* di punti doppi della quartica tutti quelli così ottenuti da una stessa quadrica specializzata del fascio.

Viceversa ogni punto doppio della quartica, come fu dianzi definito, apparterrà ad un gruppo, cioè sarà un punto doppio di una quadrica specializzata del fascio. In fatti se si proietta la quartica da un suo punto doppio, siccome ogni S'_2 uscente da questo la taglia, per definizione, soltanto in altri due punti, così è chiaro che il cono che la proietta sarà quadrico (mentre quello che la proietta da un suo punto qualunque è di 3° ordine), cosicchè quel punto è veramente punto doppio di questa quadrica specializzata.

Ricordando i risultati trovati (V. n° 37) sugli spazi lineari contenuti in una quadrica specializzata avremo:

Ad ogni generazione h volte specializzata di una data quartica corrispondono secondo che $n+h$ è impari o pari

$$\infty^{\frac{1}{8}(n-h-1)(n-h+1)} S^2_{\frac{n+h-5}{2}} \quad \textit{ovvero} \quad \infty^{\frac{1}{8}(n-h)(n-h-2)} S^2_{\frac{n+h-4}{2}}$$

(formanti in questo 2° caso due sistemi diversi) contenuti nella quartica e passanti tutti pel gruppo di punti doppi di questa corrispondente a quella generazione; per ogni punto della quartica ne passano a seconda dei due casi

$$\infty^{\frac{1}{8}(n-h-3)(n-h-1)} \quad \textit{ovvero} \quad \infty^{\frac{1}{8}(n-h-4)(n-h-2)} .$$

In particolare, una generazione semplicemente specializzata della quartica presenta, riguardo alla specie degli spazi quadratici corrispondenti della quartica una differenza dalle generazioni non specializzate solo quando n è impari, e non quando è pari. In fatti, se n è impari le generazioni ordinarie della quartica dànno luogo solo a degli $S^2_{\frac{n-5}{2}}$ contenuti in questa, mentre una generazione semplicemente specializzata dà luogo a degli $S^2_{\frac{n-3}{2}}$ della quartica. Invece, se n è pari, tanto le generazioni qualunque quanto quelle semplicemente specializzate dànno luogo a degli $S^2_{\frac{n-4}{2}}$ contenuti nella quartica.

58. Considerando una quadrica qualunque del fascio, essa si può generare, come vedemmo (V. n° 44), in infiniti modi mediante due sistemi lineari reciproci di piani ad $m-1$ dimensioni, i cui sostegni si possono prendere ad arbitrio su essa, cosicchè deve essere: $m \geqq \frac{n}{2}$, a meno che quella quadrica fosse specializzata un certo numero di volte, nel qual caso si può diminuire il numero di dimensioni dei due sistemi, prendendo i sostegni di questi ad arbitrio, purchè tali che siano contenuti nella quadrica. Ciò posto noi abbiamo immediatamente il modo di generare proiettivamente una quartica. Ad ogni quadrica di questa corrisponderà una serie di modi di generare la quartica: basterà prendere i sostegni di due sistemi lineari reciproci ad arbitrio su quella quadrica (in modo però che non abbiano punti comuni) e imaginare tagliati tutti i piani dei due sistemi con una quadrica fissa qualunque del fascio: la intersezione poi di un piano dell'un sistema con tutti i piani corrispondenti dell'altro e con questa quadrica fissa avrà per luogo la quartica considerata. Se la generazione che si considera di questa è h volte specializzata, si potranno prendere per sostegni dei due sistemi reciproci, secondo che $n+h$ è impari o pari, due $S^2_{\frac{n+h-5}{2}}$ ovvero due $S^2_{\frac{n+h-4}{2}}$ di quella generazione della quartica.

59. Gli spazi quadratici di punti contenuti in una quartica possono servire alla costruzione del S'_{n-3} polare di un punto qualunque dello spazio rispetto a quella quartica od al fascio di quadriche da essa determinato. In fatti un S'_m qualunque passante per quel punto taglia ogni quadrica del fascio in un S^2_{m-1} rispetto al quale prendendo l'S'_{m-1} polare del punto stesso, esso starà sul piano polare del punto ri-

spetto a quella quadrica; ma se l'S'_m sta su una delle quadriche del fascio, l'S^2_{m-1} d'intersezione sarà lo stesso per tutte le altre quadriche, appartenendo esso alla quartica comune, e quindi l'S'_{m-1}, polare del punto rispetto a quello, apparterrà al S'_{n-3} polare del punto rispetto alla quartica. Adunque si consideri la quadrica del fascio passante pel dato punto, e nella sua intersezione col suo piano tangente in questo e con un'altra quadrica qualunque del fascio si prendano i vari S^2_{m-1} appartenenti per conseguenza alla quartica e posti su S'_m passanti per quel punto: gli S'_{m-3} polari del punto stesso rispetto a questi avranno per luogo l'S'_{n-3} polare del punto rispetto alla quartica.

60. Gli spazi quadratici di punti contenuti in una quartica data possono anche specializzarsi acquistando uno od infiniti punti doppi. Consideriamo quella generazione che corrisponde ad una quadrica φ_1 h volte specializzata del fascio, provenendo dagli spazi lineari S'_m contenuti in questa quadrica e passanti pel suo S'_{h-1} doppio (sicchè $m \geqq h$, ma $\leqq \frac{n+h-2}{2}$). Uno di questi spazi S'_m avrà con un'altra quadrica data del fascio (e quindi colla quartica) un contatto d'ordine k, cioè la taglierà in un S^2_{m-1} k volte specializzato, se saranno soddisfatte certe condizioni determinate, tra cui quelle indipendenti sono $\frac{1}{2} k (k+1)$ (V. n⁰ 17). Dunque, ricordando il numero degli S'_m contenuti in φ_1, conchiudiamo (n⁰ 37):

Tra gli $\infty^{\frac{1}{2}(m-h+1)(2n-3m+h-4)} S^2_{m-1}$ *della quartica corrispondenti ad una generazione h volte specializzata ve ne sono* $\infty^{\frac{1}{2}(m-h+1)(2n-3m+h-4)-\frac{1}{2}k(k+1)}$ *che sono k volte specializzati.*

In particolare, per k uguale ad $m-1$ o ad m, sappiamo che un S^2_{m-1} $m-1$ volte specializzato si scinde in due S'_{m-1} (V. n⁰ 21), e che un S^2_{m-1} m volte specializzato si riduce ad un S'_{m-1} contato due volte. In questo modo si potrebbe ottenere il numero degli S'_m contenuti in una data quartica. Ma esso si può anche avere direttamente ricordando che uno spazio lineare di punti S'_m dipende da $(m+1)(n-m-1)$ quantità indipendenti, e che d'altra parte le condizioni affinchè esso stia su una data quadrica, che ad esempio supporremo generale, sono $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$, e perchè stia su due date quadriche $(m+1)(m+2)$, laonde il numero degli S'_m contenuti in queste, e quindi nella loro quartica d'intersezione sarà

$$\infty^{(m+1)(n-m-1)-(m+1)(m+2)}, \text{ ossia } \infty^{(m+1)(n-2m-3)}.$$

Dunque:

Una quartica qualunque contiene nel caso generale $\infty^{(m+1)(n-2m-3)} S'_m$.

61. Questi spazi lineari contenuti in una quartica si possono anche costrurre effettivamente in modo analogo a quello tenuto (V. n⁰ 30) per gli spazi lineari contenuti in una quadrica. Sia dato un punto x della quartica: se ne costruisca l'S'_{n-3} tangente a questa e sul S^4_{n-5} in cui esso taglierà la quartica stessa (il quale S^4_{n-5}

sarà un *cono* di *vertice* x e di 4° ordine) si prenda ad arbitrio un punto x': l'S'_1 che lo congiunge ad x starà sulla quartica data. Indi si consideri l'S'_{n-3} tangente in x' alla quartica: esso taglierà l'S^4_{n-5} suddetto in un S^4_{n-7} (*cono* di 4° ordine avente per *asse* l'S'_1 xx') di cui un punto qualunque x'' si congiungerà ad xx' con un S'_2 contenuto tutto in esso, e quindi sulla quartica data. Similmente l'S'_{n-3} tangente a questa in x'' taglierà quel S^4_{n-7} in un S^4_{n-9}, di cui ogni punto si congiungerà ad $x\ x'\ x''$ mediante un S'_3 contenuto nella quartica data. E così via dicendo. Come si vede, questa costruzione dà un S'_m mediante un S^4_{n-3-2m} in cui esso è contenuto, e quindi serve finchè $m \leqq n-3-2m$, cioè $m \leqq \frac{n-3}{3}$. Fra i punti x della quartica ve ne possono tuttavia essere di quelli eccezionali i quali stiano in spazi lineari S'_m della quartica pei quali m superi anche quel limite.

§ 3.

Classificazione dei fasci di quadriche e delle quartiche mediante i divisori elementari. Teorema di Weierstrass e sua interpretazione geometrica.

62. Abbiamo già notato nei §§ precedenti come tra le quadriche del fascio determinato da due date

$$\varphi \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$
$$f \equiv \Sigma c_{ik} x_i x_k = 0 ,$$

ve ne siano di quelle specializzate un certo numero di volte, cioè aventi dei punti doppi. Se la quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ del fascio è specializzata, dovrà esser nullo il suo discriminante:

$$(1) \ldots\ldots \qquad | \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} | = 0 .$$

Ora questa è un'equazione di grado n, la quale determinerà nel caso più generale n valori per $\lambda : \mu$, ai quali corrisponderanno n quadriche semplicemente specializzate del fascio. Ciascuna di queste avrà un punto doppio x, il quale sarà determinato da $n-1$ delle n equazioni lineari:

$$(2) \ldots\ldots \qquad \lambda \varphi_i(x) + \mu f_i(x) = 0 ,$$

in cui per $\lambda : \mu$ si ponga il corrispondente tra i suddetti n valori.

63. Però può presentarsi il caso particolare che una di quelle quadriche semplicemente specializzate corrisponda ad una radice multipla dell'equazione (1), e più in generale può accadere che ad una radice multipla $\lambda' : \mu'$ di quest'equazione corrisponda una quadrica del fascio specializzata più d' una volta, p. e. h volte. In tal caso quel valore di $\lambda : \mu$ annullerà non solo il discriminante $| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} |$, ma anche i suoi subdeterminanti d'ordine $n-h+1$. E siccome i subdeterminanti di un ordine

qualunque hanno evidentemente le loro prime derivate rispetto a $\lambda:\mu$ espresse linearmente mediante i subdeterminanti d'ordine immediatamente inferiore, così quella radice $\lambda':\mu'$ comune ai subdeterminanti d'ordine $n-h+1$ apparterrà pure secondo gradi di multiplicità crescenti ai subdeterminanti d'ordine superiore. Indicando dunque con $l, l', l'', \ldots, l^{(h-1)}$ gl'indici di multiplicità secondo cui entra il divisore lineare $\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}$ rispettivamente nel determinante $|\lambda a_{ik}+\mu c_{ik}|$, in tutti i suoi subdeterminanti d'ordine $n-1$, in tutti quelli d'ordine $n-2, \ldots$, in tutti quelli d'ordine $n-h+1$; e supponendo che quel divisore lineare non entri più in tutti i subdeterminanti d'ordine $n-h$, cosicchè la quadrica $\lambda'\varphi+\mu'f$ del fascio sia specializzata appunto h volte, e non $h+1$, sarà:

$$l > l' > l'' \ldots\ldots > l^{(h-1)} > 0 ,$$

cosicchè le differenze

$$e=l-l' , \quad e'=l'-l'' , \quad \ldots\ldots , \quad e^{(h-1)}=l^{(h-1)}$$

saranno positive; si può anzi dimostrare che esse sono in questa serie ordinate secondo la loro grandezza, cosicchè $e^{(k)} \geqq e^{(k+1)}$.

La potenza l esima del divisore lineare $\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}$, la quale è contenuta nel discriminante $|\lambda a_{ik}+\mu c_{ik}|$ si può quindi rappresentare con

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e'} \ldots\ldots \left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e^{(h-1)}} ,$$

e perciò queste singole potenze $\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e^{(k)}}$ furono chiamate dal WEIERSTRASS *divisori elementari* (Elementartheiler) del discriminante stesso (*). Ve ne sono diversi gruppi corrispondentemente alle diverse radici distinte di questo.

Ad ogni quadrica specializzata del fascio $\lambda\varphi+\mu f$ corrisponde adunque un gruppo di divisori elementari ed il numero h di questi coincide col numero delle volte che la quadrica stessa è specializzata. Il gruppo dei numeri interi positivi decrescenti, $e\, e'\, e''$, $\ldots, e^{(h-1)}$, rappresentanti i gradi dei divisori elementari di quel gruppo lo chiameremo per brevità gruppo degl'*indici caratteristici*, o semplicemente *gruppo caratteristico*, corrispondente a quella radice del discriminante, ossia a quella quadrica specializzata del fascio. La somma degl'indici caratteristici di un gruppo darà l'ordine di multiplicità della corrispondente radice pel discriminante, e la somma degl'indici stessi a partire dal k esimo darà l'ordine di multiplicità a cui questa radice entra nei subdeterminanti d'ordine $n-k+1$ di questo.

L'insieme poi degli r gruppi caratteristici corrispondenti alle r radici distinte $(r \leqq n)$ $\lambda_1:\mu_1$, $\lambda_2:\mu_2$, $\ldots$, $\lambda_r:\mu_r$ del discriminante, cioè alle r quadriche specia-

---

(*) V. WEIERSTRASS « *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* » (Monatsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 18 Mai 1868).

lizzate, si dirà la *caratteristica* del fascio di quadriche, oppure della loro quartica d'intersezione, e la indicheremo colla seguente notazione introdotta dal Weiler:

$$\left[(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h_1-1)}),\ (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}),\ \ldots,\ (e_r, e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})\right].$$

La somma di tutti gl'indici compresi nella caratteristica dovrà uguagliare n.

64. Ciò premesso, si ha il seguente importantissimo TEOREMA DI WEIERSTRASS: « La condizione necessaria e sufficiente affinchè le due forme quadratiche φ, f di n variabili si possano rispettivamente trasformare in altre due forme quadratiche φ', f' pure di n variabili mediante una sostituzione lineare il cui determinante non sia nullo è che i determinanti delle due forme quadratiche $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda\varphi' + \mu f'$ (dove λ e μ sono indeterminate) abbiano gli stessi divisori elementari (*) ».

Questo teorema, dato dal Weierstrass sotto questa forma analitica, esaurisce completamente, dal punto di vista dell'algebra moderna, ogni questione che si possa fare sui vari casi che può presentare il sistema di due forme quadratiche e sugli invarianti di questo sistema corrispondenti ai casi stessi, dando una classificazione, completa da quel punto di vista, di questi sistemi di forme. Vediamo di tradurlo geometricamente.

Per questo notiamo anzitutto che, ritenendo le n variabili omogenee che entrano in φ ed f, e quelle che entrano in φ' ed f' come coordinate omogenee di punti in due spazii lineari ad $n-1$ dimensioni (i quali spazii possono anche coincidere), le forme quadratiche φ, f e φ', f' rappresentano due coppie di quadriche poste rispettivamente in quei due spazi. La sostituzione lineare (di modulo non nullo) di cui si parla nel teorema si traduce in una trasformazione proiettiva (non specializzata) dei due spazi l'uno nell'altro, e questo teorema ci dà la condizione perchè vi sia una tale proiettività tra i due spazi che in essa si corrispondano le quadriche φ e φ', f ed f'. Quella condizione si può decomporre in due parti distinte: essa ci dice anzitutto che i due fasci φf e $\varphi' f'$ di quadriche debbono avere la stessa caratteristica, e poi che i gruppi caratteristici che entrano in questi devono corrispondere agli stessi valori per la radice $\lambda:\mu$ sia nell'uno sia nell'altro fascio (È chiaro però che, potendosi moltiplicare ad arbitrio una qualunque delle forme quadratiche considerate per un fattore costante arbitrario senza che esse cessino di rappresentare le stesse quadriche, non occorre precisamente che i valori delle radici $\lambda_i:\mu_i$ corrispondenti ai due discriminanti di $\lambda\varphi + \mu$ e di $\lambda\varphi' + \mu f'$ siano uguali, ma solo che siano proporzionali). Le quadriche dei due fasci $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda\varphi' + \mu f'$ corrispondenti allo stesso valore di $\lambda:\mu$ si corrispondono proiettivamente, come formanti due forme di 1ª specie, e in questa corrispondenza φ corrisponde a φ', ed f a f'. La condizione che le due quadriche specializzate dei due fasci corrispondenti ad uno stesso gruppo caratteristico corrispondano allo stesso valore di $\lambda:\mu$ (radice del discriminante) significa dunque che queste quadriche specializzate

(*) Il WEIERSTRASS, dando questo teorema nella memoria citata, esclude il caso in cui tutte le forme quadratiche $\lambda\varphi + \mu f$, qualunque sia $\lambda:\mu$, abbiano discriminante nullo. Quindi nelle applicazioni che noi faremo di quel teorema al fascio di quadriche sarà escluso il caso in cui questo sia tutto composto di quadriche specializzate. Ci riserviamo di ritornare altrove su questo caso.

si corrispondano in quella corrispondenza proiettiva tra i due fasci. Due fasci di quadriche (o le due quartiche corrispondenti) aventi la stessa caratteristica si diranno *della stessa specie*. Ciò posto, il teorema di Weierstrass si traduce nel seguente teorema fondamentale per la geometria delle quartiche e fasci di quadriche:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè si possano trasformare proiettivamente l'uno nell'altro due spazi lineari ad $n-1$ dimensioni in guisa che due date quadriche φ, f dell'uno si trasformino rispettivamente in due date quadriche φ', f' dell'altro è che le loro quartiche d'intersezione siano della stessa specie ed inoltre che i due fasci φf e $\varphi' f'$ da esse determinati, considerati quali forme di prima specie, si possano far corrispondere proiettivamente sì che si corrispondano: φ e φ', f e f', ed inoltre quelle quadriche specializzate dei due fasci, le quali corrispondono allo stesso gruppo caratteristico nella caratteristica comune ai due fasci.

E siccome le particolarità proiettive a cui può dar luogo una figura qualunque di uno spazio lineare (considerata in questo) sono appunto quelle, e solo quelle, che si conservano passando alla figura corrispondente di uno spazio lineare proiettivo a quello, così possiamo conchiudere che il sistema di due quadriche dà luogo, dal punto di vista proiettivo, a queste sole particolarità: 1° la *specie* della quartica in cui quelle si tagliano, specie che è determinata dalla caratteristica, 2° gl'*invarianti assoluti* del sistema, i quali sono i rapporti anarmonici che colle due quadriche date formano le diverse quadriche specializzate del loro fascio.

Dicendo r il numero di queste quadriche specializzate (cioè il numero dei gruppi d'indici che entrano nella caratteristica corrispondente alla specie considerata), questi rapporti anarmonici saranno evidentemente determinati da $r-1$ di essi e quindi $r-1$ saranno gl'invarianti assoluti indipendenti del sistema delle due quadriche.

65. Quando poi si vogliano solo le condizioni perchè la quartica d'intersezione di φ e f si possa trasformare in quella di φ' e f', cioè il fascio φf nel fascio $\varphi' f'$, ma senza che occorra che φ si trasformi precisamente in φ' ed f in f', allora dovranno coincidere nei divisori elementari i determinanti delle forme $\lambda\varphi+\mu f$ e $\lambda(g\varphi'+hf')+\mu(g_1\varphi'+h_1f')$, essendo g, h, g_1, h_1 costanti qualunque. Quindi le due quartiche dovranno avere la stessa caratteristica, ed inoltre, corrispondentemente ai gruppi caratteristici che entrano in questa, esser contenute in quadriche specializzate corrispondenti a radici dei discriminanti di $\lambda\varphi+\mu f$ e $\lambda'\varphi'+\mu' f'$, le quali si corrispondano mediante le formule:

$$\rho\lambda'=g\lambda+g_1\mu\ ,\qquad \rho\mu'=h\lambda+h_1\mu\ ,$$

che formano una trasformazione lineare binaria. Questo prova che gl'invarianti assoluti della quartica d'intersezione di due quadriche φ, f sono precisamente gl'invarianti assoluti della forma binaria in λ, μ che costituisce il determinante della forma $\lambda\varphi+\mu f$, sicchè: gl'invarianti assoluti di una quartica di data specie sono gl'invarianti assoluti o rapporti anarmonici del gruppo delle quadriche specializzate passanti per essa, sicchè se queste quadriche specializzate sono r, saranno $r-3$ gl'invarianti assoluti indipendenti della quartica.

66. Finalmente, può presentarsi il caso intermedio (come ci accadrà appunto in seguito) in cui si vogliano le condizioni perchè si possa trasformare proiettivamente una data quadrica φ ed una quartica φf giacente su essa in una quadrica φ' con una sua quartica $\varphi' f'$, senza che si richieda che f si trasformi precisamente in f'. Allora siccome nella sostituzione lineare binaria considerata al n° precedente si richiederà che sia $h = 0$, così è chiaro che gl'invarianti assoluti di una quartica di data specie su una quadrica data saranno i rapporti anarmonici (tra cui $r-2$ indipendenti) delle r quadriche specializzate passanti per la quartica colla quadrica data.

67. Quanto ai rapporti anarmonici delle quadriche di un fascio, essi si possono sempre avere, non solo analiticamente dai valori di $\lambda:\mu$ che corrispondono a quelle quadriche, ma anche geometricamente mediante il teorema già dimostrato: « Il fascio dei piani polari di un punto qualunque dello spazio rispetto alle quadriche di un fascio corrisponde proiettivamente a queste » (V. n° 51). Quindi la proprietà importante, notata allora, degli S'_{n-3} polari dei punti dello spazio rispetto alla quartica, di proiettare gli r gruppi di punti doppi delle r quadriche specializzate del fascio mediante r piani, i cui mutui rapporti anarmonici sono costanti, riceve ora la sua spiegazione completa nel fatto che questi rapporti anarmonici non sono altro che gl'invarianti assoluti della quartica che si considera.

68. La classificazione delle quartiche (sia che si considerino da sè, sia che si considerino insieme con una o due delle quadriche passanti per esse) è così ridotta dalla nostra interpretazione del teorema di Weierstrass al riconoscere in che cosa si distinguano tra loro le varie *specie* di quartiche, quali noi le abbiamo definite, cioè quale sia il significato geometrico della caratteristica di una specie data di quartiche. Di questo appunto ci occuperemo ora.

Consideriamo un punto doppio di una quadrica specializzata qualunque del fascio: il suo piano polare rispetto ad un'altra qualunque quadrica di questo si potrà pure considerare come polare rispetto a quella (poichè il piano polare rispetto ad una quadrica specializzata di un suo punto doppio è affatto indeterminato) e quindi sarà piano polare del punto stesso rispetto a tutte le quadriche del fascio. Ciò è pure provato dal fatto che, se diciamo x un punto doppio qualunque della quadrica specializzata $\lambda_s\varphi+\mu_s f$, si ha:

$$\lambda_s\varphi_i(x)+\mu_s f_i(x)=0\ , \qquad (i=1,\dots n)$$

le quali n equazioni esprimono pure che il piano polare di x rispetto alla quadrica $\lambda\varphi+\mu f$ qualunque del fascio non dipende da $\lambda:\mu$, poichè le sue coordinate $\lambda\varphi_i(x)+\mu f_i(x)$ sono tutte, in virtù di quelle equazioni, divisibili per $\lambda\mu_s-\mu\lambda_s$, ed i loro quozienti, indipendenti da λ, μ, si possono assumere come coordinate del piano stesso. Viceversa se si cercano quei punti x dello spazio, ciascuno dei quali ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio, è chiaro che per questo basterà che siano proporzionali le coordinate $\varphi_i(x)$, $f_i(x)$ dei piani polari rispetto a due quadriche distinte, φ, f del fascio, cioè che vi sia un tal valore per $\lambda:\mu$ che:

$$\lambda\varphi_i(x)+\mu f_i(x)=0\ .$$

Ora queste n equazioni lineari omogenee nelle x permettono di eliminare queste immediatamente, e così si ottiene l'equazione:

$$| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} | = 0 .$$

Ogni radice distinta di questa, sostituita in quelle equazioni lineari, darà un punto x od infiniti formanti un sistema lineare; e, come si vede, questi punti saranno precisamente i punti doppi di quella quadrica specializzata del fascio, la quale corrisponde a quella radice. Quindi il problema di cercare le quadriche specializzate di un fascio, e quello di cercare quei punti dello spazio che hanno lo stesso piano polare rispetto a due date quadriche od a tutte le quadriche del loro fascio si equivalgono, cioè:

Ogni punto doppio di una quadrica specializzata del fascio ha uno stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche di questo, e viceversa ogni punto avente lo stesso piano polare rispetto a queste è punto doppio di una di esse.

69. Considerando un'altra quadrica specializzata del fascio, siccome il piano polare di un punto qualunque dello spazio rispetto ad essa passa pel sistema dei suoi punti doppi, così passerà per questo sistema il piano polare di un punto doppio della prima quadrica specializzata rispetto a tutto il fascio. In altri termini, due punti doppi appartenenti a quadriche specializzate distinte del fascio sono coniugati rispetto a tutto il fascio. Ciò si vede pure immediatamente dalle equazioni, che caratterizzano due tali punti x, x':

$$\lambda_s \varphi_i(x) + \mu_s f_i(x) = 0$$
$$\lambda_t \varphi_i(x') + \mu_t f_i(x') = 0 ,$$

dalle quali si trae:

$$\lambda_s \varphi(x, x') + \mu_s f(x, x') = 0$$
$$\lambda_t \varphi(x, x') + \mu_t f(x, x') = 0 ,$$

donde finalmente, supponendo $\lambda_s : \mu_s$ e $\lambda_t : \mu_t$ distinti tra loro:

$$\lambda \varphi(x, x') + \mu f(x, x') = 0 ,$$

qualunque sia $\lambda : \mu$; e quest'equazione prova appunto che x, x' sono punti coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio.

Di qui segue un raggruppamento notevole dei punti doppi delle quadriche specializzate del fascio. Diciamo $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ queste quadriche, $h_1, h_2, \ldots, h_r$ il numero delle volte che sono risp. specializzate, sicchè i loro spazi lineari doppi siano S'_{h_1-1}, $S'_{h_2-1}, \ldots, S'_{h_r-1}$. Allora i punti di uno di questi, p. e. del S'_{h_1-1}, hanno ciascuno uno stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio, e tutti questi piani polari dei punti del S'_{h_1-1} formano un Σ'_{h_1-1} di piani, la cui intersezione S'_{n-h_1-1} costituisce lo spazio polare del S'_{h_1-1} rispetto a tutte le quadriche del fascio. Orbene questo S'_{n-h_1-1} conterrà tutti gli spazi doppi delle altre quadriche specializzate del fascio, cioè i suddetti $S'_{h_2-1}, \ldots, S'_{h_r-1}$. Similmente lo spazio polare comune S'_{n-h_2-1} del S'_{h_2-1} rispetto a tutte le quadriche del fascio contiene gli $S'_{h_1-1}, S'_{h_3-1}, \ldots, S'_{h_r-1}$, e via dicendo.

70. In particolare, se supponiamo di essere nel caso più generale in cui le n radici $\lambda : \mu$ dell'equazione $| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} | = 0$ sono tutte distinte, e quindi per la

quartica data passano n quadriche semplicemente specializzate, i punti doppi di queste saranno i soli punti aventi lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio, e questo piano polare per ciascuno di quegli n punti sarà il piano che congiunge gli altri $n-1$, cosicchè essi costituiranno una n upla polare (V. n° 24) comune a tutte quelle quadriche. In questo caso, più generale, la caratteristica è

$$[1\ 1\ 1\ \ldots\ 1\ 1],$$

e se si riferiscono tutte le quadriche del fascio a quella n upla polare comune come sistema di riferimento, le loro equazioni saranno della forma (V. n° 26):

$$\Sigma\, a_i\, x_i^2 = 0\ ,$$

ed in particolare le equazioni delle due quadriche φ, f saranno rispettivamente:

$$\Sigma\, \mu_i\, x_i^2 = 0\quad ,\qquad \Sigma\, \lambda_i\, x_i^2 = 0\ .$$

Si vede dunque come il problema della riduzione simultanea di due quadriche ad equazioni di questo tipo coincida con quello che stiamo studiando.

71. Più generalmente supponiamo soltanto che tutti gl'indici caratteristici siano uguali ad 1 (e quindi in numero di n), ma raggruppati comunque, cioè si abbia la caratteristica:

$$[(11\ldots 1)\ (1\ldots 1)\ \ldots\ (1\ldots 1)\ (1\ldots 1)]\ ,$$

dove siano $h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}, h_r$ i numeri d'indici compresi rispettivamente negli r gruppi caratteristici. Allora se consideriamo il gruppo $(\overbrace{11\ldots 1}^{h_i})$ composto di h_i indici, esso corrisponderà ad una quadrica h_i volte specializzata del fascio, anzi al caso più generale di una tal quadrica, poichè ad una quadrica h_i volte specializzata vedemmo dover corrispondere una radice h_i upla (almeno) di $|\lambda a_{ik} + \mu c_{ik}|$, la quale entri pure nei subdeterminanti d'ordine $n - h_i + 1$, e quindi se, come accade nel caso più generale, quella radice entra solo al grado h_i in quel discriminante, darà necessariamente il gruppo caratteristico $(\overbrace{11\ldots 1}^{h_i})$; e solo ove vi entrasse un maggior numero di volte darebbe un altro gruppo caratteristico. Dunque, il caso più generale in cui vi siano quadriche specializzate $\psi_1, \psi_1, \ldots, \psi_r$ aventi risp. un $S'_{h_1-1}, S'_{h_2-1}, \ldots, S'_{h_r-1}$ doppio è appunto (nel senso detto) quello corrispondente a questa caratteristica. In questo caso lo spazio polare di uno qualunque di quelli rispetto a tutto il fascio di quadriche è perfettamente determinato dal dover passare per gli altri.

72. Già dimostrammo (V. n° 57) che ogni S'_{h_i-1} doppio di una quadrica del fascio ha comuni con un'altra quadrica qualunque di questo dei punti che sono doppi per la quartica che si considera, e che anzi tutti i punti doppi della quartica si hanno in questo modo. Ora in generale quei punti comuni costituiscono un $S^2_{h_i-2}$ e questo spazio quadratico giacerà adunque sulla quartica, e vi figurerà come doppio. La quartica avrà dunque r sistemi di punti doppi (di cui però possono scomparire quelli che corrispondono a quadriche semplicemente specializzate del fascio, per le quali $h_i = 1$),

cioè $S^2_{h_1-2}$, $S^2_{h_2-2}$, ..., $S^2_{h_r-2}$ (esclusi i casi, sui quali ritorneremo, in cui tutto l'S'_{h_i-1} considerato è composto di punti doppi della quartica) tali che due punti doppi appartenenti a due sistemi diversi saranno coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio, cioè saranno congiunti da un S'_1 tutto contenuto nella quartica. Ma col variare della caratteristica variano il numero e la disposizione di questi sistemi di punti doppi della quartica, e questo costituisce appunto la diversità nella *specie* della quartica.

Così nel caso dianzi considerato in cui la caratteristica contiene solo gl'indici caratteristici 1, quei sistemi di punti doppi della quartica $S^2_{h_1-2}$, $S^2_{h_2-2}$, ..., $S^2_{h_r-2}$ non soddisfano ad altre condizioni che quelle dette, e queste caratterizzano perfettamente in tal caso la specie della quartica per ogni sistema di valori dati pei numeri h_1, h_2, ..., h_r (la cui somma in questo caso deve uguagliare n).

73. Più difficile è riconoscere quali singolarità della quartica corrispondano in altri casi ad una data caratteristica. Daremo però alcune regole generali che possono poi servire in ogni caso speciale a risolvere completamente la questione. Ed anzitutto notiamo che quando si è già riconosciuto il significato di due gruppi caratteristici $(e_1, e_1', e_1'', \ldots, e_1^{(h_1-1)})$, e $(e_2, e_2', e_2'', \ldots, e_2^{(h_2-1)})$, si avrà pure il significato del gruppo proveniente dal sommare gl'indici corrispondenti di quei due, cioè:

$$(e_1+e_2, \quad e_1'+e_2', \quad e_1''+e_2'', \quad \ldots\ldots),$$

poichè questo corrisponderà ad una quadrica specializzata del fascio, la quale provenga dal coincidere le due quadriche specializzate corrispondenti ai due gruppi primitivi, come si vede immediatamente supponendo che i due valori di $\lambda : \mu$ corrispondenti a questi divengano infinitamente vicini, e considerando i gradi di multiplicità in cui così tenderanno a comparire come radici del discriminante e dei suoi subdeterminanti. Se supponiamo $h_1 \geqq h_2$, la nuova quadrica che si otterrà sarà ancora h_1 volte specializzata: il suo S'_{h_1-1} doppio proverrà dall'esser venuto l'S'_{h_2-1} doppio dell'una quadrica a stare sul S'_{h_1-1} doppio dell'altra. Ma notiamo che gli ultimi due spazi S'_{h_2-1} e S'_{h_1-1} sono, come vedemmo, coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio. Quindi, venendo l'uno di essi a stare sull'altro, questo diverrà (se ancora non era tale) tangente di determinata specie a tutte le quadriche (V. n° 34). Otteniamo così questo importante risultato:

Se in un gruppo caratteristico $(e, e', e'', \ldots, e^{(h-1)})$ composto di h indici, gli ultimi k soltanto sono uguali ad 1, l'S'_{h-1} doppio della quadrica specializzata corrispondente del fascio sarà tangente di specie $h-k$ a tutte le quadriche del fascio, cioè le taglierà in un S^2_{h-2} (composto di punti doppi della quartica) specializzato $h-k$ volte.

Il caso più semplice in cui ciò accada è quando:

$$e = e' = e'' = \ldots, e^{(h-k-1)} = 2\,; \qquad e^{(h-k)} = e^{(h-k+1)} = \ldots = e^{(h-1)} = 1\,.$$

Ma lo stesso accadrà ancora quando tra i primi $h-k$ indici caratteristici alcuni, od anche tutti, superino il valore 2.

74. In particolare, ricordando come accada il degenerare di una quadrica S^2_{h-2} col suo specializzarsi, avremo come casi particolari dal n° precedente che: Se il numero k degl'indici caratteristici uguali ad 1 di un gruppo caratteristico si riduce a due soli, allora il sistema S^2_{h-2} corrispondente di punti doppi della quartica si scinde in due S'_{h-2}; se vi è un sol indice uguale ad 1, allora l' S'_{h-1} doppio della corrispondente quadrica specializzata del fascio tocca tutte le quadriche di questo lungo un S'_{h-2}, al quale, contato due volte, si riduce il sistema corrispondente di punti doppi della quartica. Finalmente quando nel gruppo caratteristico considerato non vi è alcun indice uguale ad 1, tutto quel S'_{h-1} sarà contenuto nelle quadriche del fascio, e si comporrà completamente di punti doppi della quartica. In questo caso adunque non è solo uno spazio ad $h-2$ dimensioni del S'_{h-1} che si componga di punti doppi della quartica; bensì tutto l' S'_{h-1}.

Ponendo ancora in quest'ultimo caso, oltre a $k=0$, $h=1$, noi vediamo che un gruppo caratteristico composto di un indice solo e rappresenta una quadrica semplicemente specializzata del fascio, il cui punto doppio unico quando quell'indice e supera 1 (e solo allora) sta sulle quadriche del fascio (le quali hanno comune in esso il piano tangente) ed è punto doppio della quartica. Questo del resto si dimostra pure facilmente in modo diretto.

75. Abbiamo già visto (V. n° 47) come lo spazio lineare S'_{m-1} rappresentato dalle equazioni

$$x_i = \sum_r \lambda^{(r)} x_i^{(r)} \qquad (r=1\,,\,\ldots\,,\,m)\,(i=1\,,\,\ldots\,,\,n)\ ,$$

tagli il fascio di quadriche

$$\lambda\varphi + \mu f = 0$$

nel fascio di S^2_{m-2} avente per discriminante

$$|\ \lambda\,\varphi\,(x^{(r)}x^{(s)}) + \mu\,f(x^{(r)}x^{(s)})\ |\ .$$

Imaginando scritto un subdeterminante qualunque di dato ordine di questo determinante, si vede che esso può esprimersi come somma di prodotti di tre determinanti, di cui due formati colle $x_i^{(r)}$ e l'altro è un subdeterminante di quello stesso ordine del discriminante del dato fascio

$$|\ \lambda\,a_{ik} + \mu\,c_{ik}\ |\ .$$

Di quì segue, che ogni divisore lineare in λ, μ comune ai subdeterminanti di un dato ordine $\leq m$ di quest'ultimo discriminante entra pure in generale allo stesso grado nei subdeterminanti dello stesso ordine del discriminante dell'intersezione di un S'_{m-1} qualunque dello spazio col fascio di quadriche. Quindi, ricordando la definizione degl'indici caratteristici, segue che, se uno qualunque dei gruppi caratteristici relativi al fascio dato è

$$(e,\ e',\ e'',\ \ldots,\ e^{(h-1)}),$$

dove $h > n-m$, l'intersezione di quel fascio con un S'_{m-1} qualunque dello spazio

avrà, corrispondentemente al S^2_{m-2} d'intersezione della quadrica specializzata relativa a quel gruppo, il gruppo caratteristico

$$(e^{(n-m)}, e^{(n-m+1)}, \ldots, e^{(h-1)}) .$$

Così in particolare l'intersezione con un piano $(m = n - 1)$ otterrà, in generale, il gruppo caratteristico $(e'e'', \ldots, e^{(h-1)})$; l'intersezione con un S'_{n-3} il gruppo caratteristico $(e''e''', \ldots, e^{(h-1)})$, e così via.

Questa proposizione è importante, e completa un'altra che avevamo trovato al nº 49. Essa ci permette di ridurre la ricerca che stiamo facendo del significato geometrico dei gruppi caratteristici al caso in cui il numero degl'indici contenuti in un gruppo vada diminuendo fino a ridursi ad un solo. Inoltre da essa scaturisce come tra le m quadriche, le quali toccano in generale un S'_{m-1} qualunque dello spazio (nº 48), ne coincidono

$$e^{(n-m)} + e^{(n-m+1)} + \ldots + e^{(h-1)},$$

colla quadrica specializzata h volte del fascio già considerata, cosicchè, se si prescinde da queste quadriche fisse, le quadriche mobili del fascio, le quali toccano un S'_{m-1} qualunque, sono in numero di

$$m - \Sigma e_s^{(n-m)} - \Sigma e_s^{(n-m+1)} - \ldots,$$

od anche, ricordando che la somma di tutti gl'indici caratteristici è n:

$$\Sigma e_s + \Sigma e_s' + \Sigma e_s'' + \ldots + \Sigma e_s^{(n-m-1)} + m - n .$$

In particolare il numero delle quadriche mobili del fascio, le quali toccano un piano dato qualunque è (poichè diventa $m = n - 1$):

$$\Sigma e_s - 1 .$$

76. Finalmente una nuova osservazione ci darà il modo di vedere in ogni caso quale sia il significato geometrico di un gruppo caratteristico, se si terrà pur conto delle osservazioni precedenti. Il punto doppio di una quadrica semplicemente specializzata del fascio, alla quale corrisponda un indice caratteristico (isolato) $\geqq 2$, sta, come vedemmo, su tutte le quadriche del fascio e costituisce un punto della quartica d'intersezione. Ma ci resta a vedere quali particolarità introduca in questo punto doppio il crescere di quell'indice caratteristico; cioè qual differenza vi sia tra i punti doppi della quartica provenienti dai gruppi caratteristici 2, 3, 4, ecc. Consideriamo anzi più in generale, per questo scopo, un punto doppio qualunque x della quartica, il quale appartenga come punto doppio a quella quadrica, specializzata un numero qualsiasi di volte, del fascio $s\varphi + f$, che corrisponde al valore $s = c$ del parametro indeterminato s. Noi vedemmo che in tal caso il punto x ha uno stesso piano tangente ξ per tutte le quadriche del fascio, e che si possono prendere per coordinate di questo piano le quantità costanti

$$\xi_i = \frac{1}{s-c}(s\varphi_i + f_i) ,$$

dove s rimane indeterminata (V. n° 68). Ciò posto noi vedremo che le particolarità del punto doppio x dipendono dalle intersezioni di quel piano col fascio di quadriche. Queste intersezioni sono S^2_{n-3} aventi in x comune un punto doppio: esse formano un fascio, la cui base è un S^4_{n-4} giacente nella quartica considerata e composto di infiniti S_1' uscenti dal punto doppio x (cioè un cono quartico di 1ª specie di vertice x). Potremo riconoscere come si particolarizzi quel fascio di S^2_{n-3}, o questo S^4_{n-4}, considerandone l'intersezione con un piano qualunque ζ dello spazio, poichè basterà poi proiettare quest'intersezione dal punto x per ottenere di nuovo quel fascio e quel S^4_{n-4}. Ora l'intersezione di ξ e ζ colla quadrica $s\varphi+f$ si specializza (V. n° 36) per:

$$\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} & \zeta_1 & \xi_1 \\ . & . & . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} & \zeta_n & \xi_n \\ \zeta_1 & . & \zeta_n & 0 & 0 \\ \xi_1 & . & \xi_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

ossia, ponendo per le ξ_i i loro valori, indipendenti da s come vedemmo:

$$\frac{1}{(s-c)^2}\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} & \zeta_1 & s\varphi_1+f_1 \\ . & . & . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} & \zeta_n & s\varphi_n+f_n \\ \zeta_1 & : & \zeta_n & 0 & 0 \\ s\varphi_1+f_1 & . & s\varphi_n+f_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Moltiplicando in questo determinante le prime n verticali risp. per $x_1, \ldots, x_n$ e sottraendole dall'ultima, e similmente per le orizzontali, e ricordando che $\varphi=0$, $f=0$, quell'equazione diverrà:

$$\frac{1}{(s-c)^2}\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} & \zeta_1 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} & \zeta_n & 0 \\ \zeta_1 & . & \zeta_n & 0 & -\zeta_x \\ 0 & . & 0 & -\zeta_x & 0 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

ovvero, finalmente, ponendo

$$\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} \\ . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} = \Delta(s)\ ;$$

diverrà:

$$-\zeta_x^2 \frac{\Delta(s)}{(s-c)^2} = 0\ .$$

Dunque, notando, che noi dobbiamo sempre supporre che il piano arbitrario ζ non passi per x e quindi non sia $\zeta_x=0$, e ricordando che l'equazione

$$\Delta(s)=0$$

ha per radici i valori di s corrispondenti alle quadriche specializzate del fascio dato, noi vediamo che nell'intersezione del dato fascio con $\xi\zeta$ si ha un fascio di S^2_{n-4} in cui sono specializzate appunto quelle che sono intersezioni con quadriche specializzate del fascio dato, e contano tra le specializzate uno stesso numero di volte che queste; esclusa solo quella quadrica specializzata del dato fascio, la quale corrisponde ad $s=c$, poichè l'equazione trovata

$$\frac{\Delta(s)}{(s-c)^2}=0$$

mostra che se questa conta e volte (essendo $e \geqq 2$), cioè ha per indice caratteristico corrispondente e (se ora supponiamo che la quadrica specializzata considerata del dato fascio sia semplicemente specializzata), la sua intersezione con $\xi\zeta$ avrà per indice caratteristico $e-2$. Quindi, se si conosce il significato geometrico di una radice multipla d'ordine $e-2$ del discriminante, si conoscerà pure quello di una radice multipla di ordine e. Ora noi conosciamo il significato di una radice semplice o doppia: dunque conosceremo pure quello di una radice avente un ordine qualunque di multiplicità.

77. Possiamo dare un' altra forma a questo risultato. A tal fine notiamo che, mentre in un punto qualunque della quartica vedemmo (n° 50) esservi un S'_{n-3} *tangente*, cioè luogo degli S_1', che congiungono quel punto ad uno infinitamente vicino della quartica stessa, invece per un punto doppio x vi è un cono quadrico S^2_{n-3} *tangente*, cioè luogo di questi S_1' (*). Infatti ogni tale S_1' dovrà stare evidentemente nel piano tangente comune in x a tutte le quadriche del fascio dato, e d'altra parte, siccome congiunge il punto doppio x di una certa quadrica specializzata ψ del fascio ad un altro punto di ψ, dovrà esser contenuto in questa quadrica; esso avrà dunque per luogo l' S^2_{n-3} (specializzato una o più volte con x per punto doppio) in cui quel piano tangente comune in x è tagliato da ψ, sicchè questo S^2_{n-3} è appunto lo spazio tangente alla quartica nel punto doppio x di questa.

Ciò posto il risultato del n° precedente, limitandoci ancora al caso di un indice caratteristico unico, si può enunciare così:

Ad un indice caratteristico isolato $e \geqq 2$ *corrisponde un punto doppio* x *della quartica dotato di cono quadrico* S^2_{n-3} *tangente, il quale nel fascio di coni quadrici passanti pel* S^4_{n-4} *(cono quartico) costituito dagli* S'_1 *uscenti da* x *della quartica considerata corrisponde in generale all'indice caratteristico isolato* $e-2$.

Quindi, quel cono quadrico tangente in x *è di* 1ª *specie se* $e=2$, *ma ha un* S'_1 *doppio, cioè è cono di* 2ª *specie, quando* $e \geqq 3$, *e quel* S'_1 *doppio viene a stare su quel* S^4_{n-4}, *cioè sulla quartica considerata, quando* $e \geqq 4$, *ed è in tal caso doppio per quel* S^4_{n-4} *con un cono di* 2ª *specie* S^2_{n-4} *tangente, contenuto nel* S^2_{n-3}. *Per* $e \geqq 5$ *questo* S^2_{n-4} *tangente nel* S_1' *doppio dal* S^4_{n-4} *diventa cono di* 3ª *specie, cioè acquista un* S_2' *doppio passante per questo* S_1', *e per* $e \geqq 6$ *quel* S_1' *viene a stare sul* S^4_{n-4}. *E così via dicendo.*

(*) In generale, *qualunque* siano l'ordine ed il numero delle dimensioni di uno spazio algebrico di punti, sempre in un suo punto doppio lo spazio tangente, invece che lineare, è quadrico; la proposizione si estende anzi a punti multipli qualunque (V. VERONESE, loc. cit., pag. 167).

Così noi abbiamo precisamente quello che cercavamo, cioè in che cosa si distinguano tra loro i punti doppi della quartica provenienti dagl'indici caratteristici isolati 2, 3, 4, 5, 6, ... (*).

78. Si potrebbe usare un metodo analogo per studiare i casi di gruppi caratteristici composti di più indici. Ma quì per brevità ci limiteremo a considerare solo più il caso, in cui il precedente è incluso, nel quale si abbia il gruppo caratteristico

$$(e\ \overbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}^{h})\ ,$$

essendo $e > 2$, e quindi (n° 73) una quadrica ψ del fascio h volte specializzata, avente l'S'_{h-1} doppio tangente di 1ª specie in un certo punto x ed in un piano ξ ad ogni quadrica del fascio. Allora, applicando il risultato del n° 76, se si considera su ξ un S'_{n-3} qualunque $\xi\zeta$, esso taglierà quel fascio in un fascio di S^2_{n-4}, in cui l'intersezione con ψ (quadrica corrispondente ad una radice $(e+h-1)$ upla del discriminante del fascio) corrisponde ad una radice $(e+h-3)$ upla del relativo discriminante. Se questa intersezione con ψ fosse, come nel caso di $e=2$, specializzata soltanto $h-1$ volte, avendo l'intersezione di $\xi\zeta$ col S'_{h-1} doppio di ψ per S'_{h-2} doppio, allora questo dovrebbe necessariamente (n° 73) esser tangente a tutto quel fascio di S^2_{n-4}, e ciò qualunque sia ζ, e quindi l'S'_{h-1} doppio di ψ sarebbe tangente di specie superiore alla 1ª al fascio dato di quadriche, il che non è. Ne segue che la intersezione di $\xi\zeta$ con φ è specializzata h volte (cioè che ξ è piano tangente propriamente detto di ψ), donde segue che in generale la sua caratteristica sarà:

$$(\overbrace{e-2\ .\ 1\ \ldots\ 1}^{h})$$

79. Per ultimo avvertiamo, ricordando come degenerino le quadriche $n-2$ od $n-1$ volte specializzate (V. n° 21), che, allorquando un gruppo caratteristico contiene $n-2$ indici, allora, e solo allora, la quartica S^4_{n-3} si scinderà in due S^2_{n-3} giacenti nei piani in cui si è scissa la corrispondente quadrica specializzata del fascio; e che, allorquando un gruppo caratteristico contiene $n-1$ indici, allora, e solo allora, la quartica si riduce ad un S^2_{n-3} doppio giacente nel piano doppio a cui si riduce la corrispondente quadrica specializzata del fascio e nei punti di quel S^2_{n-3} si toccheranno tutte le altre quadriche di questo. Non può esservi un gruppo caratteristico di n indici (i quali avendo per somma n dovrebbero allora esser tutti uguali ad 1), poichè, se vi fosse, dovrebbe esservi un valore di $\lambda : \mu$ tale che

$$\lambda\, a_{ik} + \mu\, c_{ik} = 0\ ,$$

cioè tutte le quadriche del fascio dovrebbero coincidere.

(*) Questo risultato ci dà alcuni esempi delle specie di punti doppi che si incontreranno quando si farà uno studio delle singolarità che può presentare uno spazio algebrico qualunque contenuto in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Una prima distinzione dei punti doppi in specie (corrispondente alla distinzione dei punti doppi delle superficie dello spazio ordinario in punti conici, biplanari ed uniplanari) sarà data appunto dal cono quadrico tangente, che potrà essere specializzato un numero qualunque di volte. Entro ciascuna di queste specie poi vi saranno delle sottospecie.

§ 4.

Applicazione alla classificazione dei fasci di quadriche nello spazio lineare a tre dimensioni (*).

80. Per applicare le cose dette nel § precedente alla classificazione delle quartiche intersezioni di quadriche in uno spazio lineare a 3 dimensioni terremo conto di tutte le osservazioni, che ivi facemmo. Le varie *specie* di fasci di quadriche o le specie di tali quartiche corrispondono dunque alle seguenti 13 caratteristiche:

[1111], [211], [31], [22], [4];
[(11)11], [(21)1], [(11)2], [(31)], [(22)];
[(11)(11)];
[(111)1], [(211)].

Abbiamo anzitutto cinque specie di quartiche per cui non passano coppie di piani, cioè che non si scindono in coniche. La specie [1111] è quella generale (V. n° 70): questa quartica sta su 4 coni quadrici, i cui vertici formano una quadrupla polare rispetto a tutte le quadriche del fascio. La [211] ha un punto doppio per la quartica con due tangenti distinte (n° 77), intersezioni del piano tangente in quello al fascio di quadriche col cono del fascio corrispondente all' indice caratteristico 2; oltre a questo vi sono solo più due coni nel fascio. La quartica [31] ha un punto doppio, nel quale la coppia di tangenti (il cono S^2_{n-3} tangente, che si considerava al n° 77) acquista un S_1' doppio, cioè coincidono, ha cioè una *cuspide*; oltre al cono che ha questo punto per vertice, il fascio di quadriche ne contiene solo un altro, corrispondente all'indice caratteristico 1. La quartica [22] sta su due soli coni, i cui vertici sono suoi punti doppi (ordinari); ma questi sono congiunti (V. n° 72) da una retta faciente parte della quartica, sicchè questa si scinde nella retta stessa ed una cubica. La quartica [4] poi, caso particolare delle precedenti, contiene (V. al n° 77 il significato generale dell'indice caratteristico isolato 4) la tangente nel punto cuspidale che si aveva per la specie [31] e quindi si scinde in quella retta ed una cubica che la tocca in quel punto.

Poi troviamo quei fasci di quadriche, in cui vi è un gruppo caratteristico contenente 2 indici al quale quindi corrisponde una coppia di piani (V. n° 79). Il caso generale [(11) 11] dà una quartica scissa in 2 coniche che si tagliano in 2 punti.

(*) La classificazione dell' intersezione di due quadriche nello spazio ordinario fu data per la prima volta in modo completo (anche tenendo conto della distinzione tra gli elementi reali e gl'imaginari) dal Painvin nel 1868 (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VII) e nello stesso tempo dal Lüroth (*Zeitschrift für M. u. Ph.* 1868), e fu data più tardi (1876) dal Gundelfinger nelle sue pregevoli note alla 3a edizione dell' « *Analytische Geometrie des Raumes* » di Hesse (V. pag. 518), dove anch'egli la deriva dalla memoria di Weierstrass; con questa differenza però da quanto io qui faccio, che, mentre egli dal Weierstrass prende le forme canoniche delle due forme quadratiche, e da queste forme canoniche, che servirono a questo per stabilire il suo teorema, e che mutano dall'una caratteristica all'altra, egli deduce le proprietà geometriche corrispondenti, io ho invece dedotto queste proprietà geometriche da considerazioni generali prima fatte su quel teorema, basate non su una forma particolare d'equazione, ma bensì sulla teoria geometrica delle quadriche.

Corrispondentemente ai gruppi caratteristici 1 e 1 vi sono due coni propriamente detti nel fascio; i loro vertici hanno lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio. Ma questa proprietà spetta pure (e soltanto) ai punti della retta doppia della coppia di piani che corrisponde ad (11) ed in particolare ai due punti in cui essa taglia tutte le altre quadriche. Così dalla teoria generale si ottengono tutte le proprietà note di questo fascio. La specie [(21) 1] corrisponde al coincidere dei due punti suddetti, cioè al toccarsi delle due coniche (V. n° 73); per queste passa solo più un cono. Per [(11) 2] invece si ottiene nella coppia di coniche, fuori della retta d'intersezione dei loro piani, un punto doppio proveniente dal 2, sicchè si hanno (V. anche n° 72) una conica e due rette che la tagliano e si tagliano mutuamente: il loro punto d'intersezione è vertice del cono (2) che rimane nel fascio. Se poi supponiamo che questo cono s'avvicini indefinitivamente alla coppia di piani abbiamo il caso [(31)], nel quale il punto comune alle due rette nel caso precedente è venuto a coincidere coi due punti, che questi avevano comuni colla conica. Del resto, questo significato del gruppo caratteristico (31) risulta pure direttamente dal teorema dimostrato al n° 78. Nel caso [(22)] ogni punto della retta doppia della coppia di piani è punto doppio della quartica, cioè sta su tutte le quadriche del fascio ed è un loro punto di contatto (V. n° 74), sicchè il fascio si compone di quadriche raccordate lungo una loro generatrice comune e tagliantisi quindi ancora in due generatrici dell'altro sistema.

Nel caso [(11) (11)] vi sono nel fascio due coppie di piani, e quindi la quartica si compone di 4 rette, formanti un quadrilatero sghembo, le cui diagonali, rette doppie di quelle coppie di piani, saranno luogo dei punti aventi lo stesso piano polare rispetto a tutto il fascio di quadriche, e pei punti dell'una diagonale i piani polari faranno fascio intorno all'altra. Ritroviamo così un teorema noto.

Finalmente, vi sono due casi in cui il fascio di quadriche contiene un piano contato due volte, cioè le quadriche si toccano lungo una conica (V. n° 79). Il caso generale è [(111) 1]: la conica non è in tal caso specializzata, e nel fascio di quadriche vi è un cono corrispondente al gruppo caratteristico 1. Caso particolare è [(211)]: la conica si scinde (V. n° 73) in due rette, generatrici di diverso sistema, lungo le quali le quadriche del fascio sono raccordate.

Così si è visto con quanta semplicità le considerazioni generali da noi prima sviluppate si applichino al caso di $n=4$; ed avremo più tardi occasione di applicarle ai valori 5 e 6 di n. Qui vogliamo ancora notare come la formula generale data al n° 75 ci dia immediatamente nelle varie specie di fasci di quadriche quante siano quelle mobili che toccano un piano qualunque dello spazio. Nei fasci [1111], [211], [31], [22], [4] esse sono sempre in numero di 3; nei fasci [(11)11], [(21)1], [(11)2], [(31)] sono solo 2; negli altri fasci, cioè [(22)], [(11)(11)], [(111)1], [(211)] vi è una sola quadrica (mobile) che tocchi un piano dato qualunque. Quella stessa formula generale citata dà il numero delle quadriche mobili che toccano una retta data qualunque: esso è 2 per tutte le specie di fasci, salvo per le specie [(111)1], [(211)], per le quali esso è 1.

81. Se poi si domandassero gl'invarianti assoluti dei fasci di quadriche o delle loro quartiche d'intersezione, noi vediamo che ve n'è uno solo nel caso generale [1111]

ed è il rapporto anarmonico dei quattro coni che allora vi sono nel fascio. Negli altri casi la quartica non ha invarianti assoluti, in virtù dell'interpretazione geometrica da noi data del teorema di Weierstrass, e se si prendono due quartiche della stessa specie, che non sia però quella generale, si può sempre stabilire una proiettività tra due spazi tale che in essa quelle due curve si corrispondano. Se $r < 4$ è il numero di gruppi caratteristici (quadriche specializzate) corrispondenti a quella specie di quartiche, si potranno prendere ad arbitrio $3-r$ quadriche dell'un fascio come corrispondenti a $3-r$ quadriche fissate ad arbitrio nell'altro, in una proiettività tra due spazi, nella quale i due fasci di quadriche si corrisponderanno, cosicchè, se il numero dei gruppi caratteristici di una specie di quartiche è $r < 4$, vi saranno almeno ∞^{3-r} proiettività tra due spazi, nelle quali due quartiche date di quella specie si corrispondano. In particolare una tal quartica si trasformerà in se stessa con (almeno) ∞^{3-r} proiettività. Due quartiche [211] a punto doppio possono servire a determinare (se non individuare) una proiettività tra due spazi; una di esse si trasforma proiettivamente in se stessa in un numero determinato di modi. Ma ogni quartica della specie [31], oppure [22], ecc. si trasforma proiettivamente in se stessa in ∞^1 modi, ed ogni quartica della specie [4] in ∞^2 modi. Noi riconosciamo in questo modo come le cubiche sghembe e le quartiche dotate di cuspidi siano della specie di quelle curve che furono studiate da Klein e Lie (*) sotto il nome di curve V, mentre non sono tali le quartiche a punto doppio, e tanto meno le quartiche generali. Benchè su ogni quartica a punto doppio si possa stabilire una corrispondenza proiettiva tra i suoi punti in infiniti modi, pure questa non farà parte in generale di una corrispondenza proiettiva tra due spazi. Invece, con qualche riflessione sulle ultime cose dette, si vede che una corrispondenza proiettiva tra i punti di una cubica fa sempre parte di una corrispondenza proiettiva tra i punti dello spazio, e che lo stesso vale per la quartica a cuspide, purchè la proiettività stabilita tra i suoi punti soddisfi a due condizioni, di cui una è, che la cuspide corrisponda a se stessa.

Come dicemmo, solo le quartiche della specie più generale [1111] hanno un invariante assoluto, e due tali quartiche si possono trasformare proiettivamente l'una nell'altra solo quando quell'invariante abbia lo stesso valore. Questo invariante assoluto non è altro (V. n° 67) che il rapporto anarmonico costante dei 4 piani che proiettano i vertici dei 4 coni del fascio dalla retta polare di un punto qualunque dello spazio rispetto al fascio stesso. Questo rapporto anarmonico essendo costante, noi vediamo che quelle polari formano un complesso tetraedrale, avente appunto quel rapporto anarmonico.

Quando si studiassero le quartiche come poste su una data quadrica, cosicchè si dovesse sempre soddisfare nelle proiettività alla condizione che questa si trasformi in se stessa, od in un'altra pure assegnata, allora (V. n° 66) agl'invarianti assoluti già considerati se ne aggiungerebbe uno, cioè il rapporto anarmonico che quella quadrica determina con 3 delle quadriche specializzate del fascio (ove il numero di queste quadriche sia $\geqq 3$, cioè nei casi [1111], [211], [(11)11]).

(*) V. Klein et Lie: « *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* ». Comptes-rendus de l'Ac. des S. 1870, 1er sem. (vol. 70, pag. 1222 e 1275). In questo lavoro sono appunto notate tra le più semplici curve sghembe di quella famiglia le cubiche e le quartiche dotate di cuspide (V. pag. 1224).

§ 5.

Schiere di quadriche.

82. Abbiamo definito il fascio di quadriche considerando il punto come elemento dello spazio lineare S ad $n-1$ dimensioni, e considerando per conseguenza le quadriche come luoghi di punti di 2° ordine. Se consideriamo invece il piano come elemento dello spazio lineare Σ pure ad $n-1$ dimensioni, dovremo considerare le quadriche come inviluppi di piani di 2ª classe, e la teoria svolta nei §§ precedenti sarà ancora applicabile perfettamente con pochi scambi di parole, essendo i due spazi S e Σ perfettamente scambiabili tra loro (e in ciò sta, come già notammo, la vera causa della dualità). Enuncieremo dunque senz'altro le proposizioni che c'importano.

Date due quadriche come inviluppi di piani

$$\Phi \equiv \Sigma A_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0$$

$$F \equiv \Sigma C_{ik}\, \xi\;\; \xi_k = 0\ ,$$

l'insieme di tutte le quadriche che toccano i piani comuni a queste formano un sistema semplicemente infinito rappresentato dall'equazione

$$l\,\Phi + m F = 0\ ,$$

dove al rapporto $l:m$ vanno dati tutti i valori possibili; diremo questo sistema una *schiera* di quadriche. I piani tangenti comuni formano un Σ^4_{n-3}, che diremo *sviluppabile di* 4ª *classe*, e che costituisce la *base* della schiera. Per ogni spazio lineare di punti S'_i passano dei Σ^2_{n-i-3} appartenenti alle quadriche della schiera, e questi Σ^2_{n-i-3} nello spazio Σ'_{n-i-2} dei piani passanti pel S'_i formano una schiera, avente per sviluppabile di base il Σ^4_{n-i-4} dei piani appartenenti alla base della schiera data. In particolare per ogni S'_{n-4} i piani, che vi passano, delle quadriche della schiera formano una nuova schiera di Σ_1^2 aventi comuni 4 piani tangenti, che sono piani della sviluppabile di 4ª classe, e ciò giustifica questo nome. Per ogni S'_{n-3} poi passano infinite coppie di piani tangenti alle quadriche date, e queste coppie formano un'involuzione quadratica in un fascio di piani.

83. Ogni Σ'_{i-1}, cioè ogni S'_{n-i-1}, è toccato in generale da i quadriche della schiera. In particolare ogni piano dello spazio $(i=1)$ è toccato da una sola quadrica, mentre per ogni punto $(i=n-1)$ ne passano $n-1$. Ma ogni quadrica h volte specializzata come inviluppo, la quale stia nella schiera, conta almeno $i+h-n$ volte tra le i quadriche suddette.

Per un punto x qualunque passano, come dicemmo, $n-1$ quadriche della schiera. Se dal punto stesso conduciamo i piani tangenti a tutte le quadriche di questa, notammo che essi formeranno una schiera di Σ^2_{n-3}: ora tra queste ve ne saranno in generale $n-1$ specializzate, cioè aventi un piano doppio e questi $n-1$ piani doppi saranno i piani tangenti in x alle $n-1$ quadriche della schiera passanti per x. Ora essi

formano una $(n-1)$ upla polare rispetto a quella schiera di Σ^2_{n-3} e quindi anche rispetto alla schiera data di quadriche, cioè: *I piani tangenti in un punto qualunque dello spazio alle quadriche della schiera passanti per esso sono coniugati tra loro rispetto ad ogni quadrica della schiera.*

84. I poli di un piano rispetto alla schiera di quadriche formano un S'_1 proiettivo alla schiera stessa; lo diremo l'S'_1 *polare* del piano rispetto alla schiera. Esso taglia il piano dato nel suo punto di contatto con quella quadrica della schiera che lo tocca. Ma se questo piano fa parte della sviluppabile comune alla schiera di quadriche, allora quel S'_1 vi giace sopra e costituisce la serie dei punti di contatto di quel piano colle diverse quadriche. Ora tra le quadriche di una schiera ve ne sono in generale n semplicemente specializzate come inviluppo, e ridotte quindi come luogo ad un piano doppio su cui sta il nucleo S^2_{n-3} della quadrica stessa; e si hanno così n piani formanti una n upla polare rispetto a tutte le quadriche della schiera. L'S'_1 polare di un piano qualunque dello spazio rispetto alla schiera taglia quei piani fissi nei poli di quello rispetto alle corrispondenti quadriche specializzate. Dunque, in virtù della corrispondenza proiettiva tra quegli S'_1 e le quadriche della schiera, vediamo che il gruppo degli n punti d'intersezione di un S'_1 polare colla n upla polare di piani si mantiene proiettivo a se stesso col mutare del S'_1. In particolare tra questi S'_1 corrispondenti proiettivamente alle quadriche della schiera e contenenti tali gruppi di n punti vi sono gli S'_1 di contatto dei piani della sviluppabile.

85. Questi piani essendo in numero di ∞^{n-3}, quegli S'_1 di contatto avranno per luogo una ∞^{n-2} di punti formanti una superficie-luogo che è assai importante di considerare. È facile vedere che il nucleo di ogni quadrica specializzata della schiera è contenuto in quella superficie come *spazio doppio.* Ciò è analogo a quanto accade nel fascio di quadriche. Se in questo si considera un piano tangente (propriamente detto) ad una quadrica specializzata un numero qualunque h di volte, esso la taglierà in un S^2_{n-3} specializzato $h+1$ volte, avente per S'_h doppio un S'_h passante per l'S'_{h-1} doppio di quella: quel S'_h taglierà le altre quadriche del fascio in un S^2_{h-1}, parte della quartica d'intersezione, in ciascun punto del quale questi avrà un S'_{n-3} tangente il quale giacerà nel piano stesso. In particolare, per $h=1$ vi saranno in ogni piano tangente alla quadrica semplicemente specializzata del fascio due punti della quartica (posti sul S'_1 di contatto) nei quali l'S'_{n-3} tangente alla quartica sta nel piano stesso. Se il punto doppio della quartica specializzata stesse sulla quartica (come punto doppio), allora di quei due punti uno sarebbe sempre fisso in esso. Ciò posto, passando allo spazio Σ di piani, noi abbiamo:

Ogni quadrica-inviluppo semplicemente specializzata di una schiera ha per nucleo un S^2_{n-3}, i cui punti sono doppi per la superficie considerata, in quanto che per un S'_{n-3} tangente di questo nucleo in un suo punto qualunque passano due diversi piani della sviluppabile i cui S'_1 di contatto si tagliano nel punto stesso, sicchè v'è ragione di considerare questo punto come doppio in quella superficie. Più generalmente siavi (per eccezione) nella schiera una quadrica-inviluppo h volte specializzata, avente quindi per nucleo un S^2_{n-2-h} giacente in un S'_{n-1-h}. Allora per ogni S'_{n-2-h}

giacente in questo e tangente a quel nucleo in un punto qualunque x passerà un Σ^2_{h-1} di piani della sviluppabile aventi gli S'_1 di contatto passanti per x, sicchè per ogni punto x di quel nucleo passerà un cono S^2_h composto di ∞^{h-1} S'_1 passanti per esso ed appartenenti alla superficie considerata. I punti di contatto degli S'_1 di questo S^2_h con una quadrica qualunque della schiera formano un S^2_{h-1} che varia con quella. Si potrebbe chiamare quel nucleo S^2_{n-2-h} di quadrica h volte specializzata come inviluppo della schiera *spazio doppio di specie h esima* per la superficie-luogo considerata.

86. Non stiamo ad enunciare le proposizioni corrispondenti per la sviluppabile di 4ª classe e la schiera di quadriche a quelle dimostrate nei §§ 1 e 2 sulla polarità rispetto ad una quartica od un fascio di quadriche, sugli spazi quadratici e lineari contenuti nella quartica e sulla generazione di questa mediante sistemi reciproci. Facciamo invece qualche osservazione sulla classificazione delle sviluppabili stesse analoga a quelle fatte nel § 3 sulla classificazione delle quartiche.

La considerazione del discriminante dell'equazione tangenziale

$$l\Phi + mF = 0$$

e dei suoi subdeterminanti permetterà di applicare ad una coppia di quadriche-inviluppi Φ, F ed alla schiera da loro determinata il teorema di Weierstrass. E notiamo che la trasformazione proiettiva dei piani dello spazio Φ che si considera, coincide con una trasformazione proiettiva dei punti dello spazio S, cosicchè otterremo di nuovo dal teorema di Weierstrass interpretato geometricamente le condizioni necessarie e sufficienti perchè due quadriche (luoghi di punti od inviluppi di piani) si possano trasformare mediante una proiettività in altre due quadriche date. Di qui segue che, classificando la posizione mutua che possono avere due quadriche, considerandole prima come luoghi di punti, poi come inviluppi di piani, si dovranno ottenere gli stessi casi. Anzi si può dimostrare (*) che se A e B sono i determinanti, supposti non nulli, delle due forme φ, f di cui Φ, F sono le forme aggiunte, il determinante di $l\Phi + mF$ avrà gli stessi divisori elementari che il determinante di $Alf + Bm\varphi$; quindi non solo la quartica d'intersezione di due quadriche e la sviluppabile dei loro piani tangenti comuni avranno la stessa caratteristica, ma inoltre le quadriche specializzate, risp. come luogo e come inviluppo, del loro fascio e della loro schiera, le quali corrispondono agli stessi gruppi caratteristici, si corrisponderanno proiettivamente, e in questa corrispondenza proiettiva così determinata tra il fascio e la schiera le due quadriche date si corrisponderanno inversamente.

87. Consideriamo un piano doppio di una quadrica-inviluppo specializzata della schiera: esso avrà lo stesso polo rispetto a tutta la schiera di quadriche, e quindi, ove sia tangente all'una di esse, le toccherà tutte nello stesso punto. In questo caso adunque ogni S'_1 passante per quel punto e giacente in quel piano si potrà consi-

(*) V. una nostra nota nel prossimo fascicolo del *Giornale di Matematiche*. — (Gennaio 1884)

derare come faciente parte di quella superficie, che dianzi consideravamo, luogo degli S'_1 di contatto dei piani della sviluppabile di 4ª classe colle quadriche della schiera; laonde quel piano (contato due volte almeno) si separerà dalla superficie stessa.

88. Alla caratteristica [11 . . . 11] corrisponde la schiera più generale di quadriche con n quadriche semplicemente specializzate come inviluppi, i cui nuclei stanno sugli n piani formanti la n upla polare comune. In generale, ad un gruppo caratteristico qualunque contenente h indici corrisponde nella schiera una quadrica h volte specializzata come inviluppo, di cui soltanto la posizione rispetto alla schiera stessa dipende dal valore di quegli indici. Il caso in cui questi sono tutti uguali ad 1 è quello più generale. Se k tra essi sono uguali a 2 e gli altri tutti uguali ad 1, allora il Σ'_{k-1} di piani doppi della quadrica, ossia l'S'_{n-k-1} che ne contiene il nucleo, sarà tangente di specie k esima a tutte le quadriche della schiera. Per valori degl'indici maggiori di 2 si hanno posizioni particolari del nucleo di quella quadrica rispetto a tutta la schiera. Così, mentre il gruppo caratteristico 2 significa solo che il piano doppio (contenente il nucleo) di una quadrica semplicemente specializzata tocca in un punto tutta la schiera, il gruppo caratteristico 3 significa che inoltre il nucleo di quella quadrica passa per questo punto, ed il gruppo caratteristico 4 che l'S'_{n-3} tangente a quel nucleo in quel punto è pure tangente, ma di 2ª specie, a tutta la schiera di quadriche. E così via.

89. Per un S'_{n-h-1} qualunque dello spazio conducendo i piani tangenti alle quadriche di una schiera, vedemmo che essi formano nel Σ'_{h-1} dei piani passanti per quel S'_{n-h-1} una schiera di Σ^2_{h-2}. Se in particolare quel S'_{n-h-1} ha rispetto a tutta la schiera di quadriche uno stesso S'_{h-1} polare, questo taglierà tutte quelle quadriche precisamente nei luoghi dei punti di contatto della suddetta schiera di Σ^2_{h-2} colla schiera data di quadriche, sicchè potremo dire che le intersezioni di quel S'_{h-1} colla schiera di quadriche faranno ancora una schiera di quadriche S^2_{h-1}. Ora un S'_{h-1} siffatto, che goda cioè della proprietà di avere uno stesso S'_{n-h-2} polare rispetto alla schiera di quadriche, si ottiene sempre in quello che contiene il nucleo di una quadrica della schiera specializzata $n-h$ volte. Dunque, noi vediamo che ogni tale spazio taglia la schiera di quadriche data in una nuova schiera di quadriche (a numero minore di dimensioni), della quale fa parte, come risulta dal ragionamento tenuto, il nucleo di quella quadrica specializzata. Della stessa proprietà godrà evidentemente ogni spazio lineare intersezione di quelli che contengono i nuclei di due o più quadriche specializzate qualunque della schiera.

90. Della superficie luogo degli S'_1, in cui i piani della sviluppabile toccano le quadriche della schiera, si trova facilmente l'equazione, e per conseguenza l'ordine. Per questo notiamo che l'equazione locale della quadrica avente per equazione tangenziale

$$l\,\Phi + m\,F = 0$$

sarà della forma:

$$\varphi\, l^{n-1} + \varphi_1\, l^{n-2} m + \ldots + \varphi_{n-1}\, m^{n-1} = 0\ ,$$

dove $\varphi . \varphi_1 , \ldots , \varphi_{n-1}$ sono funzioni quadratiche delle coordinate di punti. Facendo variare $l : m$ si hanno così le equazioni locali delle quadriche della data schiera. Ora è chiaro che la superficie suddetta non è altro che il luogo delle intersezioni di ogni quadrica della schiera colla infinitamente vicina e che essa tocca appunto ogni quadrica della schiera lungo questa quartica d'intersezione con quella infinitamente vicina. Quindi, mentre per un punto qualunque dello spazio passano $n-1$ quadriche della schiera, i cui parametri $l : m$ sono radici dell'equazione dianzi scritta, in cui si siano poste le coordinate di quel punto, invece per un punto di quella superficie due di quelle quadriche (o di quei valori di $l : m$) verranno a coincidere. Ne segue che l'equazione locale di essa sarà data dal discriminante di quell'equazione. Questo discriminante essendo di grado $2(n-2)$ nei coefficienti, e questi di grado 2 nelle coordinate di punti, si avrà così un' equazione di grado $4(n-2)$ in queste, cosicchè conchiudiamo che questa superficie, cui dà luogo la sviluppabile di 4^a classe, è di ordine $4(n-2)$, ossia è un $S_{n-2}^{4(n-2)}$.

91. Più, in generale, consideriamo un punto pel quale coincidano k delle $n-1$ quadriche della schiera che vi passano. Dovranno soddisfare a quell'equazione ed alle sue prime $k-1$ derivate, cioè ad un sistema di k equazioni che si vede facilmente potersi ridurre ad esser tutte di grado $n-k$ nel parametro $l : m$ e che sono di grado 2 nelle coordinate di punti. Ora, da una formula generale, che dà l'*ordine* di un sistema qualunque di equazioni, risulta che quel sistema è dell'ordine $2^{k-1} . k\ (n-k)$. Quindi conchiudiamo che i punti pei quali passano k quadriche della schiera infinitamente vicine formano (nel caso più generale) uno spazio algebrico $S_{n-k}^{[2^{k-1} . k(n-k)]}$. Si potrebbero chiamare tutti questi spazi algebrici, cui dà luogo la sviluppabile considerata, *spazi cuspidali* di questa dei vari ordini. I casi estremi corrispondono a $k=2$, che dà appunto l'$S_{n-2}^{4(n-2)}$ di cui parlammo al n° precedente, ed a $k=n-1$, che dà un $S_1^{[2^{n-2} . n-1]}$ per ogni punto del quale coincidono tutte le quadriche della schiera, che vi passano.

Nello spazio lineare a 3 dimensioni, $n=4$, noi vediamo così che la sviluppabile di 4^a classe, base di una schiera di quadriche, dà per luogo una superficie d'ordine 8, e per linea cuspidale una curva d'ordine 12; e queste sono proprietà note di quella sviluppabile.

92. Consideriamo una quadrica qualunque φ della schiera: la sua intersezione con quel $S_{n-2}^{4(n-2)}$ conterrà, come già notammo, una quartica di contatto, la quale quindi conta due volte. La parte rimanente dell'intersezione sarà dunque dell'ordine $2 . 4(n-2) - 2 . 4 = 8(n-3)$, cioè sarà un $S_{n-3}^{8(n-3)}$. D'altronde ogni S'_1 di quel $S_{n-2}^{4(n-2)}$ essendo già tangente a φ non può tagliarla in un altro punto, senza giacervi completamente. Adunque quel $S_{n-3}^{8(n-3)}$, che è la parte rimanente dell' intersezione di φ col $S_{n-2}^{4(n-2)}$ si compone tutto di S'_1, ciascuno dei quali è formato dai punti di contatto della schiera di quadriche con un piano, pure tangente a φ. Consideriamo in uno di quegli S'_1 il punto di contatto con una quadrica qualunque f

della schiera: questo punto apparterrà alla quartica in cui f taglia la quadrica fissa φ, e l'S'_{n-3} tangente nel punto stesso a quella quartica dovrà stare sui piani tangenti in esso ad f e φ, piani, che passano entrambi per quel S'_1, cosicchè quel S'_{n-3} tangente alla quartica sarà tangente di 2^a specie a φ, cioè la toccherà lungo quel S'_1. Un tal punto di una quartica giacente su φ si dirà *punto singolare* di quella quartica rispetto a φ. Noi giungiamo dunque a questa conclusione: $L'S^{8(n-3)}_{n-3}$ *in cui φ è tagliata (non toccata) dalla superficie-luogo* $S^{4(n-2)}_{n-2}$ *della sviluppabile è composto di* ∞^{n-4} S'_1 *ciascuno dei quali contiene un punto singolare (rispetto a φ) di ogni quartica d'intersezione di φ colle altre quadriche della schiera, anzi tocca quella quartica in quel punto singolare.*

Come tutti gli S'_1 polari dei piani dello spazio rispetto alla schiera di quadriche, così anche questi S'_1 composti di punti singolari delle quartiche che queste determinano su φ corrisponderanno proiettivamente alla schiera di quadriche e quindi saranno proiettivi tra loro. Ognuno di essi contiene un punto di ciascun nucleo di quadriche specializzate della schiera, punto che va considerato come singolare per la corrispondente intersezione di φ colla quadrica specializzata.

Notiamo poi che viceversa ogni punto singolare della quartica in cui φ è tagliata da un'altra quadrica qualunque f della schiera è compreso nel $S^{8(n-3)}_{n-3}$ suddetto; in fatti per definizione il suo S'_{n-3} tangente alla quartica toccherà φ secondo un S'_1, che sarà luogo dei punti di contatto di φ col fascio dei piani passanti pel S'_{n-3}: tra questi piani ve n'è uno tangente nel punto considerato ad f, e questo piano sarà in conseguenza tangente ad f e φ, cioè farà parte della sviluppabile considerata, ed inoltre l'S'_1 considerato sarà appunto quello che congiunge i punti di contatto di quel piano con quelle quadriche. È dunque provato l'asserto.

93. Come abbiamo considerato l'intersezione di una quadrica qualunque φ della schiera col $S^{4(n-2)}_{n-2}$, così si può in generale considerarne l'intersezione col $S^{[2^{k-1}\cdot k(n-k)]}_{n-k}$, che vedemmo (n° 91) essere luogo dei punti d'intersezione di k quadriche infinitamente vicine della schiera. Se consideriamo con φ le $k-1$ consecutive, avremo k quadriche tagliantisi in un $S^{2^k}_{n-k-1}$, il quale giacerà su φ: in ogni suo punto vi sarà contatto k-punto, com'è facile vedere, col suddetto $S^{[2^{k-1}\cdot k(n-k)]}_{n-k}$, cosicchè l'intersezione $S^{[2^k\cdot k(n-k)]}_{n-k-1}$, di questo con φ si comporrà di quel $S^{2^k}_{n-k-1}$ contato k volte ed inoltre di un $S^{[2^k\cdot k(n-k-1)]}_{n-k-1}$, sicchè questo si può riguardare come l'intersezione propriamente detta che cercavamo. Facendo crescer k a partire da 2 si hanno così vari spazi algebrici su φ, ciascuno contenuto nei precedenti. I punti di quello che corrisponde ad un dato valore di k godono della proprietà che per ciascuno di essi passano oltre a φ altre $n-2$ quadriche della schiera, di cui k sono infinitamente vicine.

§. 6.

Quartiche su una quadrica e serie di quartiche omofocali.

94. Consideriamo una quartica qualunque Q giacente su una quadrica data φ, cioè intersezione di un fascio di quadriche, di cui questa fa parte. L'S'_{n-3} tangente in un suo punto qualunque x alla quartica Q taglierà quel fascio di quadriche secondo un fascio di S^2_{n-4} (coni di vertice x), tra cui ve ne saranno in generale $n-3$ aventi un S'_1 doppio passante per x; orbene rispetto alle $n-3$ corrispondenti quadriche del fascio dato quel punto x si dirà *singolare* (di 1° ordine). In particolare un punto singolare x di Q rispetto a φ sarà, come appunto già definimmo al n° 92, un punto nel quale l'S'_{n-3} tangente a Q è tangente di 2ª specie a φ, cioè la tocca secondo un S'_1. Questo S'_1 di contatto si dirà composto dei *punti corrispondenti* al punto singolare x. I piani tangenti in essi a φ sono tangenti in x rispettivamente alle varie quadriche che passano per Q (V. n° 92).

Sia f una qualunque di queste quadriche. Il punto considerato x di f e φ, avrà per piano tangente ad f un piano tangente a φ. Dunque starà sulla quadrica che è polare di φ rispetto ad f; e viceversa, cosicchè l'S_{n-4} dei punti singolari della quartica $\varphi\, f$ (rispetto a φ) è determinato dall'intersezione di questa colla quadrica polare di φ rispetto ad f, e forma quindi un S^8_{n-4} determinato dalle equazioni;

$$\varphi = 0\ , \qquad f = 0\ , \qquad \Phi(f_i) = 0\ .$$

95. Chiameremo *punto singolare* di 2° ordine della quartica Q un punto singolare (rispetto a φ), il cui S_1' di punti corrispondenti appartenga a Q, punto singolare di 3° ordine un punto singolare il cui S'_1 corrispondente si componga di punti singolari di 1° ordine, ed in generale *punto singolare d'ordine* k un punto singolare il cui S'_1 corrispondente si componga di punti singolari d'ordine $k-2$. È facile vedere che basta che sia singolare d'ordine $k-2$ uno solo dei punti corrispondenti perchè siano tutti tali. Si trova inoltre senza difficoltà, partendo dalle equazioni, che abbiamo date, dei punti singolari di 1° ordine, che le equazioni dei punti singolari d'ordine k saranno:

$$\varphi = 0\ , \quad f = 0\ , \quad \Phi(f_i) = 0\ , \quad f\Big(\Phi_i(f_i)\Big) = 0\ , \quad \Phi\Big[f_i\Big(\Phi_i(f_i)\Big)\Big] = 0\ ,$$
$$f\Big\{\Phi_i\Big[f_i\Big(\Phi_i(f_i)\Big)\Big]\Big\} = 0\ , \quad \ldots\ldots\ldots$$

dove intendiamo che in genere s'indichi:

$$\Theta_i(\chi_i) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial\,\Theta(\chi_1, \ldots, \chi_n)}{\partial \chi_i}\ ,$$

e dove l'ultima equazione contiene $k+1$ simboli tra Φ ed f, cosicchè secondo che k è pari od impari, essa comincia con f oppure con Φ. Quelle equazioni mostrano che i punti singolari d'ordine k formano un $S^{2^{k+2}}_{n-3-k}$, e che si possono ottenere mediante la successiva costruzione di quadriche reciproche polari rispetto alle due quadriche date φ, f.

Nel caso in cui queste siano nella posizione più generale, ed anzi in tutti i casi in cui la caratteristica della schiera o del fascio da esse determinato contiene solo indici uguali ad 1, si possono porre le loro equazioni sotto la forma:

$$\varphi \equiv \Sigma x_i^2 = 0$$
$$f \equiv \Sigma s_i x_i^2 = 0 \ .$$

Sarà per conseguenza $\Phi(\xi) \equiv \Sigma \xi_i^2$, e quindi le equazioni precedenti che determinano i punti singolari d'ordine k della quartica $f\varphi$ su φ prendono la forma semplicissima:

$$\Sigma x_i^2 = 0\ , \quad \Sigma s_i x_i^2 = 0\ , \quad \Sigma s_i^2 x_i^2 = 0\ , \quad \Sigma s_i^3 x_i^2 = 0\ , \quad \ldots\ldots \Sigma s_i^{k+1} x_i^2 = 0\ .$$

96. In ciascun punto singolare x della quartica Q abbiamo visto che i piani tangenti a φ nei punti del S'_1 corrispondente ad x non sono altro che i piani tangenti in x alle varie quadriche passanti per Q, cosicchè queste quadriche del fascio fanno corrispondere proiettivamente tra loro i punti di quegli S'_1. Consideriamo una qualunque, f, di queste quadriche e la schiera di quadriche che essa determina con φ. Questa schiera taglierà φ secondo un sistema di quartiche (tra cui è compresa Q), che diremo serie di *quartiche omofocali.* Le principali proprietà di una tal serie di quartiche poste su φ furono già trovate alla fine del § precedente (n^i 92, 93). Queste quartiche godono cioè della proprietà di aver comuni gli S'_1 corrispondenti ai punti singolari, sicchè tutti questi S'_1 formano su φ un $S_{n-3}^{8(n-3)}$ che è perfettamente determinato da una di quelle quartiche, p. e. da Q. Su ogni tale S'_1 un punto qualunque è singolare per una determinata quartica della serie, la quale tocca l'S'_1 in esso ed è corrispondente ad un punto singolare per tutte le altre quartiche, e si ha in tal modo una corrispondenza proiettiva tra i punti di questi S'_1 e le quartiche della serie aventi quei punti per punti singolari. L' S'_{n-3} tangente a φ lungo un tale S'_1 è tangente a tutte le quartiche del sistema rispettivamente nei loro punti singolari posti su questo S'_1 e di qui segue che ogni spazio lineare di φ passante per quel S'_1 e contenuto per conseguenza in quel S'_{n-3} è tangente a tutte le quartiche della serie nei punti singolari, cioè le taglia secondo spazi quadratici specializzati aventi questi punti doppi. In particolare ogni S'_1 della serie considerata taglia ogni quartica del sistema in due punti che coincidono nel punto singolare; ed ogni S'_2 di φ passante per un tale S'_1 taglia ciascuna quartica in un S^2_1 che si scinde in due S'_1 aventi comune il punto singolare corrispondente.

97. Dalle cose dette nel § precedente, risulta come ogni punto del $S_{n-3}^{8(n-3)}$ considerato goda della proprietà che due delle $n-2$ quartiche omofocali che in generale passano pel punto stesso coincidono. Più in generale si può dimostrare che gli spazi $S_{n-k-1}^{\left[2^k.k(n-k-1)\right]}$ che ivi (n° 93) considerammo come luoghi di quei punti pei quali coincidono k delle $n-2$ quartiche omofocali, che vi passano, sono i luoghi degli $\infty' S^{2^{k+1}}_{n-k-2}$ di punti singolari d'ordine $k-1$ appartenenti alle ∞' quartiche omofocali;

e precisamente ogni punto del $S_{n-k-1}^{[2^k . k(n-k-1)]}$ suddetto è singolare d'ordine $k-1$ per quella quartica nella quale coincidono appunto k delle $n-2$ quartiche omofocali chè vi passano.

Di qui poi segue che se indichiamo, come al n° 90, con

$$\varphi l^{n-1} + \varphi_1 l^{n-2} m + \ldots\ldots + \varphi_{n-1} m^{n-1} = 0$$

la forma aggiunta nelle x della forma $l\Phi(\xi) + mF(\xi)$, sicchè questa equazione e le sue prime k derivate rispetto ad m, ponendovi poi $l=0$ diventano:

$$\varphi_{n-1} (\equiv f) = 0 \,, \quad \varphi_{n-2} = 0 \,, \quad \varphi_{n-3} = 0 \,, \quad \ldots \,, \quad \varphi_{n-k-1} = 0 \,,$$

queste insieme colla

$$\varphi = 0$$

determineranno i punti singolari d'ordine k della quartica $f\ \varphi$ su φ. Esse hanno forma diversa da quella data al n° 95 per la determinazione degli stessi punti singolari. Però i due sistemi di equazioni si equivalgono.

98. Quelle proprietà di un sistema di quartiche omofocali che furono viste al n° 96 ed in particolare il fatto che tutti gli S'_1 di φ considerati formano un $S_{n-3}^{8(n-3)}$, che è perfettamente determinato da una qualunque di quelle quartiche, mostrano che queste formano un sistema semplicemente infinito, che è completamente determinato da una qualunque di esse. La quartica Q è determinata come intersezione di un fascio di quadriche di cui fa parte φ; orbene qualunque sia la quadrica f che si prende in questo fascio, la schiera di quadriche determinata da f e φ taglierà sempre φ nello stesso sistema semplicemente infinito di quartiche omofocali, sicchè variando f nel fascio suddetto questo sistema di quartiche non muta e quindi ogni quadrica della schiera $f\varphi$ descriverà a sua volta un fascio avente per base una delle quartiche omofocali (*).

Si ha così un sistema doppiamente infinito di quadriche, il cui studio non sarebbe privo d'interesse. Esso si compone di ∞^1 fasci di quadriche, poichè ogni quadrica del sistema determina con φ un fascio, che fa parte di quello. Esso è pure composto di ∞^1 schiere di quadriche, poichè la schiera che una quadrica qualunque

---

(*) Questo teorema interessante si può anche enunciare così: Siano date oltre ad una quadrica φ altre due quadriche f e g; se queste son tali che il fascio di quadriche $f\varphi$ e la schiera $g\varphi$ abbiano, oltre a φ, un' altra quadrica comune, anche il fascio di quadriche $g\varphi$ e la schiera $f\varphi$ avranno comune, oltre a φ, una quadrica diversa da φ. — La dimostrazione che ne ho dato sopra basta pel mio scopo; sarebbe però desiderabile una dimostrazione *diretta* di questo teorema, ma non mi è riuscito di trovarne una tale che, oltre ad essere diretta, valga ancora per una posizione mutua qualunque di quelle quadriche. Nel caso, in cui la caratteristica del fascio o della schiera $f\varphi$ abbia tutti gl'indici uguali ad 1, la dimostrazione è assai semplice, poichè si potrà assumere: $\varphi = \Sigma x^2$, $f = \Sigma k_i x_i^2$ e quindi le forme aggiunte saranno: $\Phi = \Sigma \xi_i^2$, $F = \Sigma \frac{\xi_i^2}{k_i}$. Una quadrica del fascio $f\varphi$ sarà $\Sigma (k_i + l) x_i^2$ e la sua forma aggiunta $\Sigma \frac{\xi_i^2}{k_i + l}$. La quadrica g per ipotesi determina con φ una schiera, in cui suppongo stia precisamente quella quadrica del fascio $f\varphi$ (oltre a φ), cosicchè g sarà della forma $\Sigma \xi_i^2 \left(\lambda + \frac{1}{k_i + l}\right)$,

del sistema determina con φ è tutta contenuta nel sistema. Tutti i fasci del sistema si corrispondono proiettivamente, essendo in essi corrispondenti quelle quadriche che stanno in una stessa schiera del sistema, e analogamente si corrispondono proiettivamente le schiere del sistema. Due schiere qualunque, ovvero due fasci qualunque di quadriche del sistema non hanno alcuna quadrica comune, salvo φ, mentre un fascio ed una schiera hanno sempre comune una quadrica oltre a φ (la qual quadrica può però venir a coincidere con φ).

99. Il sistema di quadriche considerato è polare reciproco di se stesso rispetto alla quadrica φ. In fatti, si consideri un suo fascio qualunque, e in questo sia f la quadrica infinitamente prossima a φ. La schiera $f\,\varphi$ appartiene pure al sistema, ed è facile vedere con considerazioni infinitesimali che essa è appunto polare di quel fascio rispetto a φ. Così si vede come i fasci e le schiere del sistema si corrispondano gli uni alle altre, essendo polari reciproci rispetto a φ. Ed è appunto un fascio ed una schiera del sistema, i quali si corrispondano in questa polarità, che avranno comune oltre a φ solo una quadrica infinitamente vicina a questa. Questa polarità poi mostra che vi è una corrispondenza proiettiva non solo tra i fasci di quadriche del sistema o tra le schiere del sistema stesso, ma anche tra quelli e queste.

100. Si ha una rappresentazione molto semplice di questo sistema doppiamente infinito di quadriche considerando il luogo dei poli di un piano dello spazio (o l'inviluppo dei piani polari di un punto) rispetto alle quadriche del sistema. Se P è il polo rispetto a φ, il luogo dei poli relativi ad un fascio di quadriche del sistema

---

ossia in coordinate di punti $\Sigma \frac{x_i^2}{\lambda + \frac{1}{k_i + l}}$. Nel fascio che questa quadrica g determina con φ una quadrica qualunque sarà $\Sigma x_i^2 \left(\mu + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{k_i + l}}\right)$, mentre nella schiera $f\varphi$ una quadrica qualunque è $\Sigma \xi_i^2 \left(m + \frac{1}{k_i}\right)$, ed il teorema consiste in questo, che si possono sempre determinare m e μ in modo che questa quadrica coincida con quella, pel che basta che sia:

$$\text{cost.} = \left(m + \frac{1}{k_i}\right) \left(\mu + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{k_i + l}}\right) = \frac{(m k_i + 1)[(\mu\lambda + 1) k_i + \mu(l\lambda + 1) + l]}{[\lambda k_i + l\lambda + 1] . k_i}$$

Di qui (trascurando l'ipotesi $m = \infty$, $\mu = \infty$, che conduce solo alla quadrica comune φ) si traggono le due equazioni: $m(l\lambda + 1) - \lambda = 0$, $\mu(l\lambda + 1) + l = 0$, ossia: $m = \frac{\lambda}{l\lambda + 1}$, $\mu = -\frac{l}{l\lambda + 1}$, formule che determinano perfettamente m e μ. Si ha così una dimostrazione diretta del teorema. Di più queste formule mostrano che solo quando $l\lambda = -1$ la quadrica considerata comune alla schiera $f\varphi$ ed al fascio $g\varphi$ viene a coincidere ($m = \mu = \infty$) con quella quadrica che questi hanno sempre comune, cioè con φ. Inoltre, considerando in esse come fissa l'una delle due quantità l, λ, e l'altra come variabile, esse stabiliscono una corrispondenza proiettiva tra questi parametri ed i parametri m e μ, dalla quale si ha una verificazione delle proposizioni che sopra si esporranno.

Noterò finalmente, che il teorema di cui si tratta fu per lo spazio a 3 dimensioni enunciato, credo per la prima volta dal Darboux nella sua opera « *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* etc. » (1873) a pag. 59, ma dimostrato pel solo caso appunto in cui le quadriche considerate si possono rappresentare con somme di quadrati.

passante per φ è un S_1^{n-1} (V. n° 55) passante per P: gli S'_1 che congiungono P ai punti di quel S_1^{n-1} saranno luoghi dei poli relativi alle schiere di quadriche che congiungono φ alle quadriche del fascio considerato. Il luogo di questi S_1' sarà un cono di vertice P a 2 dimensioni e d'ordine $n-2$, nel quale esisterà un sistema semplicemente infinito di S_1^{n-1}, luoghi dei poli relativi a fasci di quadriche del sistema. Ed il fatto che in quel cono ogni S_1' taglia ogni S_1^{n-1} in un punto determinato oltre a P, mentre due S_1' ovvero due S_1^{n-1} non si tagliano che in P, conferma quanto dicemmo sul sistema di quadriche. Così pure si vede che gli S_1' saranno punteggiati proiettivamente dagli S_1^{n-2} e questi da quelli. Finalmente possiamo far corrispondere ad ogni S_1^{n-2} l'S_1' che lo tocca in P e viceversa, ed allora le punteggiate poste su un S_1' e su un S_1^{n-2} si potranno far corrispondere proiettivamente mediante risp. gli S_1^{n-2} e gli S_1' corrispondentisi. — Viceversa, da questa rappresentazione su quel cono, si potrebbe facilmente dedurre una dimostrazione del teorema del n° 98 e della nota relativa.

101. Tutti i fasci e tutte le schiere contenuti nel sistema hanno la stessa caratteristica. Consideriamo in fatti una schiera passante per φ: se in essa prendiamo un'altra quadrica qualunque, il fascio che essa determinerà con φ avrà la stessa caratteristica della schiera (V. n° 86), anzi gli stessi invarianti assoluti, e quindi avranno la stessa caratteristica tutti i fasci così ottenuti; e similmente si scorge che quella caratteristica e quegl'invarianti assoluti appartengono pure alle schiere del sistema. Quegl'invarianti assoluti dipendono dalle quadriche specializzate risp. come luoghi e come inviluppi dei fasci e delle schiere. Ora le quadriche specializzate, come luogo e quelle specializzate come inviluppo, si corrispondono nella polarità rispetto a φ. — Se consideriamo una quadrica h volte specializzata, come inviluppo di una schiera passante per φ, il suo nucleo S^2_{n-h-2} godrà rispetto alla sviluppabile di base delle proprietà viste al n° 85, e quindi taglierà φ in un S^4_{n-h-3}, i cui punti saranno doppi di specie h *esima* per quella sviluppabile, cioè saranno punti per ciascuno dei quali passerà un cono S_h tutto composto di S'_1 della sviluppabile, i quali staranno tutti su φ e saranno perciò composti di punti singolari delle quartiche omofocali; anzi in questo modo si avranno tutti questi punti singolari. Tutti quegli S^4_{n-h-3} contenuti in φ si diranno *quartiche focali* o semplicemente *focali* di quella serie di quartiche date (e di qui il nome dato a queste di quartiche *omofocali*). Poichè essi dipendono solo evidentemente da questo sistema di quartiche, il quale non muta cambiando la schiera di quadriche, così potremo conchiudere che i nuclei delle quadriche specializzate delle varie schiere formano fasci insieme coll'intersezione di φ cogli spazi lineari in cui i nuclei stessi sono contenuti (spazi lineari, che sono gli stessi per tutte quelle schiere).

102. Data la caratteristica di una quartica su φ e quindi anche di tutte le quartiche omofocali, gl'invarianti assoluti di quella quartica saranno dati dagl'invarianti assoluti del gruppo composto di φ e delle quadriche specializzate del fascio che determina quella quartica. Invece, se si vogliono gl'invarianti assoluti del sistema di quartiche omofocali (cioè quelle quantità, che occorre e basta abbiano lo stesso

valore per due serie omofocali di quartiche aventi la stessa caratteristica, affinchè queste serie si possano trasformare proiettivamente l'una nell'altra) non occorrerà considerare anche φ in quel gruppo.

Da un risultato avuto al n° 75 ricaviamo per dualità che, se nella caratteristica di una serie di quartiche omofocali poste su φ s'indicano con e i primi indici dei vari gruppi caratteristici, il numero delle quartiche (variabili) della serie che passano per un punto qualunque di φ è:

$$\Sigma e - 2.$$

103. Noteremo finalmente che, ponendo $n = 4$ nei risultati degli ultimi §§, otteniamo per lo spazio lineare a 3 dimensioni le seguenti proposizioni:

La sviluppabile circoscritta ad una schiera di quadriche è in generale di 4^a classe d'ordine 8 ed ha uno spigolo di regresso d'ordine 12. Essa tocca una quadrica qualunque della schiera secondo una quartica e la taglia secondo 8 rette, cioè 2 quaterne di generatrici dei due sistemi, le quali sono precisamente le generatrici tangenti a quella quartica (*). In ogni quadrica φ della schiera le altre determinano come intersezione un sistema di quartiche omofocali, cioè tangenti a due quaterne fisse di generatrici di φ: gli 8 punti di contatto con queste sono per ciascuna quartica i punti singolari rispetto a φ (*singolari* in quanto che hanno per tangente non una tangente ordinaria di φ, ma una sua generatrice). Sulle 8 generatrici di φ si hanno così 8 punteggiate dei punti singolari, tutte proiettive tra loro ed al sistema di quartiche omofocali. In particolare vi sono, nel caso più generale, nella schiera 4 quadriche specializzate, i cui nuclei sono 4 coniche doppie della sviluppabile, le quali tagliano φ in 4 quaterne di punti, le quali non mutano cambiando la schiera ma lasciando fisso il sistema di quartiche omofocali e godono delle proprietà che per ogni punto di una di esse passano due delle generatrici dei punti singolari, sicchè quei 4 . 4 punti non sono altro che i 16 punti d'intersezione delle 8 generatrici suddette. In ognuna di queste stanno 4 di quei punti, uno per ogni quaterna; e, come dicemmo, questi gruppi di 4 punti sono proiettivi al gruppo delle 4 quadriche specializzate della schiera, sicchè possiamo aggiungere alle proposizioni enunciate dallo Chasles quest'altra: che i rapporti anarmonici delle due quaterne di generatrici singolari di φ sono uguali. Essi costituiscono l'invariante assoluto della serie di quartiche omofocali su φ. Se ad esso aggiungiamo un rapporto anarmonico in cui entri un punto singolare di una data quartica del sistema, avremo i due invarianti assoluti di questa quartica.

(*) V. Chasles « *Propriétés des courbes à double courbure du 4e ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre* ». Comptes-rendus, 1862 (vol. 54, p. 317 e 418). Ivi sono pure dati altri caratteri per la quartica e la sviluppabile di 4^a classe; si potrebbe cercarne gli analoghi per uno spazio a più dimensioni.

SULLA

GEOMETRIA DELLA RETTA

E DELLE SUE SERIE QUADRATICHE (*)

PER

CORRADO SEGRE

Approvata nell'adunanza del 30 Dicembre 1883

> Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5.
>
> (KLEIN. — *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. — Mathematische Annalen*, Bd. V, S. 261).

§ 1.

Generalità sulla geometria della retta.

104. Dicesi *retta* l'elemento di una quadrica non specializzata a 4 dimensioni (**). Una tal quadrica R è sempre contenuta, come sappiamo, in uno spazio lineare a 5 dimensioni S, il cui elemento a noi non interessa se non è contenuto nella quadrica R. Per non avere ambiguità con ciò che diremo in seguito noi non chiameremo più *punto* l'elemento di S, nè *piano* ogni spazio lineare a 4 dimensioni contenuto in S, ma li indicheremo rispettivamente col nome generico di *elemento* (S_0'),

(*) Questa Memoria costituiva la 3ª parte della nostra dissertazione di laurea, di cui le due prime parti riguardanti la geometria delle quadriche in uno spazio lineare ad n dimensioni formano una prima Memoria intitolata: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, la quale è pure stampata (prima di questa) nelle *Memorie* di quest'Accademia. Siccome in questa seconda Memoria si fa continuo uso dei risultati della prima, abbiamo creduto bene lasciarvi inalterato l'ordine dei vari numeri: ordine che fa seguito a quello dei numeri della prima. Per un riassunto poi del contenuto di questa 2ª Memoria si legga la prefazione della 1ª. (Marzo 1884).

(**) Questa definizione è la più conveniente per uno studio della geometria della retta indipendente da quella del punto e del piano; essa permette, come vedremo, di giungere a questi nel modo più naturale da quel punto di vista. Essa ha anche il vantaggio che, con soli mutamenti di parole, la geometria che fondiamo su questa definizione darà la geometria di qualunque spazio quadratico a 4 dimensioni, in cui l'elemento sia diverso dalla retta ordinaria.

Ho poi preferito ritenere l'elemento dello spazio lineare a 5 dimensioni in cui sta la quadrica di rette come assolutamente incognito (rispetto alle rette), anzi che dire, come talvolta si fa, che quell'elemento è il complesso lineare di rette, il quale diventa *speciale* quando sta su quella quadrica. Non vi è differenza sostanziale tra i due concetti; ma il primo mi sembra più conveniente.

e colla notazione S_4'. Ed in generale la lettera S accompagnata da indici secondo il solito metodo rappresenterà uno spazio qualunque contenuto in S, mentre quegli spazi speciali che sono contenuti nella quadrica R, cioè che sono tutti composti di rette, s'indicheranno spesso colla lettera R accompagnata da indici.

105. La prima domanda importante che si presenta per lo studio delle rette come elementi della quadrica R è se vi siano in questa spazii lineari ed in qual numero. Ora dai risultati generali ottenuti nella Parte 1ª del presente lavoro, nei quali si ponga $n=6$, si vede (V. nº 30) che in R vi sono ∞^5 spazi lineari semplicemente infiniti R_1', i quali noi diremo *fasci di rette*, sì che per ogni retta passano ∞^2 fasci; e inoltre vi sono ∞^3 spazi lineari doppiamente infiniti R_2' tali che ogni fascio R_1' è contenuto in due di essi, ed ogni elemento di R, cioè ogni retta, in ∞^1 di essi. Nè vi sono in R sistemi lineari di numero di dimensioni maggiore di due. Risulta inoltre da quella teoria generale che questi spazi lineari a 2 dimensioni formano due sistemi ben distinti: chiameremo *punti* (di rette) quelli dell'un sistema, e *piani* (di rette) quelli dell'altro sistema. La quadrica R, di cui si tratta, ha per numero di dimensioni (4) un multiplo di 4, e quindi (V. nº 40) due R_2' in generale hanno un elemento comune soltanto se sono dello stesso sistema.

Dunque:

Due punti hanno sempre comune una retta. Due piani hanno sempre comune una retta. Un punto ed un piano non hanno in generale comune alcuna retta.

Per ogni retta passa un numero semplicemente infinito di punti e di piani.

Converremo di dire che due rette *si tagliano* (od anche che *si appoggiano* l'una sull'altra) quando appartengono ad uno stesso fascio R_1'. Allora dalle cose dette in generale ai n.ⁱ 29, 30, segue:

Due rette qualunque non si tagliano in generale. Se due rette si tagliano, esse individuano un fascio nel quale sono contenute, e questo fascio a sua volta è contenuto in un punto di rette ed in un piano di rette perfettamente individuati, cosicchè ogni retta che tagli le prime due è contenuta o in questo piano od in quel punto (*), *vale a dire: tre rette che si taglino o stanno in un piano o stanno in un punto.*

Come si vede, benchè in generale un punto ed un piano non abbiano rette comuni, pure, per eccezione, possono averne comune un fascio. In tal caso diremo che il punto ed il piano sono *uniti*. Ciò posto si ha il seguente teorema:

Tre punti sono in generale uniti ad un piano e tre piani uniti ad un punto.

(*) Mi permetto di dire, che una retta è *contenuta* in un punto, e che un punto *passa* per una retta, quando nel linguaggio ordinario si usano al contrario le parole *passare* e *contenere;* ma, così facendo, risalta meglio la dualità perfetta tra punto e piano, che nella nomenclatura della geometria ordinaria è affatto trascurata.

In fatti consideriamo tre punti qualunque: avranno comuni in generale a due a due tre rette distinte, le quali si taglieranno mutuamente (quelle che stanno in uno stesso punto), determinando a due a due dei fasci di rette contenuti rispettivamente in quei punti: ora ciascuno di questi fasci è pur contenuto in un piano, il quale coinciderà con quel piano che è individuato dal contenere quelle tre rette, e sarà unito ai tre punti, come si voleva dimostrare. — Analogamente scambiando le parole *punto* e *piano*.

Questo ragionamento mostra però come possa accadere che non sia individuato il piano unito ai tre punti (od il punto unito a tre piani), e precisamente che ciò accade sempre quando questi tre punti hanno comune una retta, nel qual caso ogni piano passante per questa è unito ai tre punti, anzi a tutti gli altri punti che passano per la retta. Insomma gli ∞^1 punti, e gli ∞^1 piani, i quali passano per una data retta sono tra loro uniti, ed hanno comuni gli ∞^2 fasci di rette, che vedemmo passare per la retta data.

106. Le cose viste al n.° precedente mostrano come la geometria della retta conduce in un modo naturalissimo alla considerazione del punto e del piano, alle relazioni che passano tra punti, piani e rette, ed alla dualità perfetta che passa tra punti e piani. Questa dualità si basa ora sul fatto che gli ∞^3 punti e gli ∞^3 piani costituiscono i due sistemi distinti di spazi lineari doppiamente infiniti di rette, che solo esistono. Ora, come nella quadrica ordinaria i 2 sistemi di generatrici hanno proprietà identiche, così nella R, spazio di rette, quei due sistemi di spazi lineari doppiamente infiniti si equivalgono perfettamente, sicchè ogni proposizione, che vale per l'uno, vale pure per l'altro. Donde precisamente la dualità tra le proposizioni che riguardano i punti e quelle che riguardano i piani.

107. Da quel modo di concepire i punti ed i piani segue anche immediatamente una proposizione importante per tutta la geometria pura della retta. Consideriamo una trasformazione proiettiva qualunque dello spazio S a 5 dimensioni: essa trasformerà pure ogni spazio lineare di questo in altro tale spazio lineare. Dunque, se essa è tale che la quadrica R a 4 dimensioni si trasformi in se stessa, gli spazi lineari a 2 dimensioni che essa contiene si trasformeranno pure in spazi lineari a 2 dimensioni contenuti in essa, e la trasformazione proiettiva o sarà tale che ognuno dei due sistemi di tali spazi contenuti in R si trasformi in se stesso, oppure tale che ciascuno di essi si trasformi nell'altro. Però in entrambi i casi due tali R_2' di diverso sistema i quali siano uniti, cioè abbiano comune un R_1', conserveranno la stessa proprietà dopo la trasformazione. Dunque si ottengono in tal modo due specie di trasformazioni per lo spazio (ordinario) di punti e piani: entrambe sono univoche, ma l'una trasforma i punti in punti, i piani in piani, un punto ed un piano uniti in un punto ed un piano uniti; mentre l'altra trasforma i punti in piani, i piani in punti, un punto ed un piano uniti in un piano ed un punto uniti. Ora questi caratteri mostrano che nello spazio ordinario la prima di queste è una *collineazione* od *omografia*, l'altra una *reciprocità*. Dunque: *Ogni trasformazione proiettiva dello spazio S a 5 dimen-*

sioni tali che la quadrica R a 4 dimensioni si trasformi in se stessa è per lo spazio ordinario una collineazione ovvero una reciprocità. E viceversa. — Questo teorema è dovuto al *Klein* (*).

108. Per gli spazi contenuti nella quadrica R a 4 dimensioni si usano le seguenti denominazioni: quelli a tre dimensioni R_3 si dicono *complessi* di rette, quelli a due dimensioni R_2 *sistemi* di rette, quelli ad una dimensione R_1 *rigate*. In virtù di un teorema del Klein enunciato nella nota al n° 39, ogni complesso algebrico di rette è determinato come intersezione di R con un altro spazio algebrico, pure a 4 dimensioni, di S: l'ordine di questo spazio algebrico si suol chiamare *grado* del complesso (benchè la denominazione sia impropria, perocchè è chiaro che appunto il doppio di quel numero dovrebbe dirsi *grado* di quell'intersezione; tuttavia quel teorema di Klein dà un carattere di opportunità a quella denominazione). Di qui segue che ogni fascio di rette contiene tante rette di un complesso algebrico quante sono le unità contenute nel grado di questo.

Per un sistema algebrico di rette R_2 bisogna dare, come si è visto più in generale per le quadriche a numero pari di dimensioni (V. n° 41), due numeri diversi: il numero cioè degli elementi (rette) che esso ha comuni con ogni piano, il qual numero dicesi *classe* del sistema, ed il numero degli elementi che esso ha comuni con ogni punto cioè *l'ordine* del sistema. Un sistema di rette d'ordine μ e classe ν s'indica più brevemente con $(\mu\ \nu)$.

Due complessi di gradi m, m' hanno comune un sistema di rette di ordine e classe uguali ad $m m'$; questo sistema dicesi *congruenza* di *grado* $m m'$.

Dicesi *grado* di una rigata R_1 il suo ordine come spazio algebrico ad 1 dimensione di S. Vedremo che ciò equivale a dire che il grado è il numero di quelle rette contenute nella rigata (cioè *generatrici* di questa), le quali tagliano una retta qualunque. Un punto ed un piano qualunque non contengono in generale alcuna retta di una data rigata. I punti ed i piani che contengono rette della rigata sono ∞^2 e diconsi punti e piani di questa; sicchè essa, mentre avendo riguardo alle sue rette costituisce appunto una rigata, avendo invece riguardo ai suoi punti ed ai suoi piani costituisce rispettivamente una superficie-luogo ed una superficie-inviluppo, nel senso ordinario di queste parole.

109. Se nel teorema generale dimostrato al n° 41 sul numero degli elementi comuni a due spazi algebrici a p dimensioni di una quadrica a numero pari $2p$ di dimensioni poniamo $p=2$ abbiamo immediatamente il seguente teorema dovuto ad *Halphen* (**) e importantissimo per la risoluzione di molte questioni anche all'infuori della geometria della retta:

Due sistemi di rette $(\mu\ \nu)$, $(\mu_1\ \nu_1)$ *hanno comuni* $\mu\mu_1 + \nu\nu_1$ *rette.*

(*) Lo enunciò nella memoria « *Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen* » del 4° vol. dei Mathematische Annalen, a pag. 356, e lo dimostrò poi nella bellissima memoria « *Liniengeometrie und metrische Geometrie* » del 5° vol. dei Math. Ann. a pag. 262.

(**) V. Halphen « *Sur les droites qui satisfont à des conditions données* » Comptes-rendus, 1871

Di quì segue immediatamente come corollario che: Un sistema di rette (μ, ν) ha comune con un complesso di grado m una rigata di grado $m(\mu+\nu)$. Ma è più naturale dimostrare questa proposizione osservando che un sistema di rette (μ, ν) è un $R_2^{\mu+\nu}$ e quindi è tagliato da un S_4^{m} (la cui intersezione con R determina un complesso di grado m) secondo un $R_1^{m(\mu+\nu)}$.

§ 2.

Complessi e congruenze lineari; rigate quadriche.

110. Nello spazio S a 5 dimensioni un S_4' qualunque determina su R un R_3^2, che dicesi *complesso lineare di rette*, un S_3' qualunque contiene un R_2^2 che dicesi congruenza lineare, ed un S_2' contiene un R_1^2 che diremo *rigata quadrica* (« Regelschaar »).

Dalla teoria generale (V. n° 30) segue che un complesso lineare R_3^2 contiene in generale ∞^3 fasci di rette, sì che ogni punto ed ogni piano dello spazio ne contengono un fascio, e che per ogni retta del complesso ne passano ∞^1. — Segue pure da quella (n° 40) che una congruenza lineare generale, come quadrica a 2 dimensioni R_2^2, contiene due sistemi diversi di ∞^1 fasci tali che due fasci dello stesso sistema non hanno rette comuni, mentre hanno una retta comune due fasci di diverso sistema: dunque i piani ed i punti in cui stanno i fasci dell'un sistema saranno uniti rispettivamente ai punti ed ai piani dei fasci dell'altro sistema, il che mostra che quei piani e quei punti passano per due certe rette, *direttrici* della congruenza, sì che i fasci dell'un sistema appartengono ai punti dell'una direttrice ed ai piani dell'altra, mentre l'altro sistema di fasci è costituito dai fasci, che appartengono ai punti di questa seconda direttrice ed ai piani della prima. Quindi la congruenza lineare è costituita dalle rette, che ne tagliano le direttrici. — Finalmente una rigata quadrica, considerata come una quadrica R_1^2 in uno spazio a 2 dimensioni (conica), non contiene evidentemente spazi lineari.

111. Un complesso lineare R_3^2 dicesi *speciale* quando l'S_4' in cui esso è contenuto è tangente ad R (cioè quando ha un elemento doppio). In tal caso sappiamo dalla teoria generale che l'elemento R_0' di contatto è congiunto agli altri elementi del R_3^2 mediante degli R_1' (contenuti in R). Dunque un complesso lineare speciale è costituito dalle rette che ne tagliano una fissa (l'R_0' di contatto); questa dicesi *asse* del complesso speciale.

Mentre un S_4' non può essere che semplicemente tangente ad R, un S_3' può avere con questa 2 specie di contatto, e un S_2' 3 specie di contatto (V. n° 34). Una congruenza lineare dicesi semplicemente *speciale* quando sta su un S_3' sempli-

---

e 1872 (il teorema è dimostrato a pag. 41 del vol. 74). Lo stesso teorema fu dimostrato più tardi dallo ZEUTHEN mediante il principio di corrispondenza sul piano, da esso trovato (Comptes-rendus, 1874, 1° sem., pag. 1555). Ma si giudicherà, credo, che la dimostrazione presente di quel teorema è più semplice delle precedenti, ed anche più naturale dal punto di vista della pura geometria della retta.

cemente tangente ad R: in questo caso segue dalla teoria generale che la congruenza lineare consta di ∞' fasci di rette passanti per una retta fissa (l'elemento di contatto), in cui coincidono in questo caso le due direttrici, sì che ogni piano (ed ogni punto) passante per questa contiene un fascio determinato di rette della congruenza. Di qui segue immediatamente che considerando i piani ed i punti contenenti una retta fissa come formanti due forme di prima specie, nella congruenza speciale composta di ∞' fasci passanti per una retta fissa r questi fasci corrispondono proiettivamente sia alla serie degli ∞' punti in cui stanno, sia a quella degli ∞' piani in cui stanno, cosicchè anche queste 2 serie di punti e piani si corrisponderanno proiettivamente; il che costituisce una proprietà importante della congruenza lineare speciale, che può anche servire per definizione. — La congruenza lineare è doppiamente specializzata quando l' S_3' che la contiene ha un contatto di 2^a specie con R; in tal caso essa si scinde in un punto ed un piano uniti aventi comune il fascio di rette che è l' R_1' di contatto di quel S_3'.

Una rigata quadrica R_1^2 può specializzarsi come nel piano ordinario si può specializzare una curva di 2^o ordine. La rigata semplicemente specializzata si scinde in due R_1' distinti, cioè in 2 fasci aventi comune una retta (elemento di contatto di R col S_2' che contiene la rigata). Quando l' S_2' contenente la rigata ha un contatto di 2^a specie con R, allora la rigata quadrica si riduce ad un fascio doppio, che è quello di contatto. Quando l' S_2' ha un contatto di 3^a specie con R, allora vi è contenuto completamente, cioè è un punto od un piano di rette (*).

112. Come la geometria della retta nello spazio si considera da noi come geometria di una quadrica R a 4 dimensioni in uno spazio S a 5, così la geometria delle rette di un complesso lineare si potrà considerare come quella di una quadrica R_3^2 a 3 dimensioni in uno spazio lineare a 4 dimensioni S_4, la qual quadrica però sarà specializzata, cioè avrà un elemento doppio, quando il complesso lineare sarà speciale. E la geometria delle rette di una congruenza lineare sarà la geometria di una quadrica R_2^2 nello spazio lineare a tre dimensioni, cioè coinciderà perfettamente colla geometria su una quadrica nello spazio ordinario; se la congruenza è speciale, questa quadrica avrà un punto doppio (sarà cioè un cono quadrico ordinario), e se la congruenza è doppiamente specializzata, quella quadrica si scinderà in una coppia di piani. Finalmente la geometria delle rette di una rigata quadrica si può considerare come quella di una quadrica R_1^2 ad una dimensione nello spazio lineare a 2 dimensioni (p. e. una conica nel piano ordinario), la quale si scinderà quando la rigata quadrica si scinda in due fasci.

(*) Se introduciamo coordinate per gli elementi dello spazio S a 5 dimensioni, e una equazione quadratica qualunque, di discriminante non nullo, per rappresentare R, avremo immediatamente, come caso particolare da quelle generali date ai numeri 35, 36, le equazioni, che esprimono le condizioni perchè un complesso od una congruenza lineare, od una rigata quadrica si specializzino, sia che essi siano dati mediante rette in essi contenute, sia che siano dati come intersezioni di complessi lineari. Queste condizioni furono date dal KLEIN colla sua solita eleganza nella memoria « *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen* » (Math. Ann. Bd. V, pag. 278 e seg.). Simultaneamente furono trovate, ma solo pel caso in cui il sistema di riferimento è un tetraedro, dal PASCH (« *Zur Theorie der linearen Complexe* », Crelle's Journal, Bd. 75).

Soltanto il fascio di rette ed il punto e il piano di rette sono spazi di rette essenzialmente lineari (rispettivamente ad 1 e 2 dimensioni). Quindi la geometria nel fascio di rette e la geometria sul punto e sul piano di rette sono le teorie delle forme lineari di 1^a e 2^a specie.

113. Una serie lineare di S_4' dello spazio S determina come intersezioni su R una serie, che diremo pure *lineare* di complessi lineari. In particolare un *fascio* di complessi lineari sarà formato da ∞^1 complessi aventi comune una congruenza lineare; una serie lineare doppia sarà composta dai complessi lineari aventi comune una rigata quadrica; una serie lineare tripla dai complessi lineari aventi comuni due rette. Quanto alla serie lineare quadrupla, essa sarebbe determinata dagli S_4' che passano per un elemento fisso S_0 di S. Ma questi elementi di S quando non stanno su R dobbiamo farli sparire dai nostri enunciati; ciò si può ottenere, come ci accadrà spesso di fare in seguito, sostituendo alla considerazione degli elementi di S quella dei complessi lineari di rette, in cui gli S_4' polari degli elementi stessi rispetto ad R tagliano questa quadrica. Così facendo ed introducendo anche la denominazione di *involutori* per due complessi lineari, i quali stiano in S_4' coniugati rispetto ad R (cioè passanti l'uno pel polo dell'altro), è chiaro dalla teoria generale della polarità rispetto ad una quadrica che la definizione data delle serie lineari di complessi lineari conduce immediatamente a questa conclusione:

Una serie lineare m upla di complessi lineari comprende tutti i complessi involutori a tutti i complessi di una serie, lineare $(4-m)$ *upla.* — Due tali serie diconsi *involutorie.* In particolare adunque una serie lineare quadrupla comprende tutti i complessi lineari involutori ad uno fisso.

Se un complesso lineare è speciale, i complessi lineari che sono in involuzione con esso sono quelli che passano pel suo asse. Se due complessi speciali sono involutori, i loro assi si tagliano, e viceversa. Da queste proposizioni, che sono solo casi particolari di teoremi generali visti nella 1^a parte di questo lavoro, segue immediatamente:

Due serie lineari involutorie di complessi lineari godono della proprietà che le rette comuni ai complessi dell'una sono gli assi dei complessi speciali dell'altra serie, e viceversa.

In particolare: Tra i complessi lineari involutori ad un complesso fisso quelli speciali hanno per assi le rette di questo; quella serie quadrupla di complessi lineari non ha rette comuni, salvo quando il complesso a cui è involutoria sia speciale, nel qual caso tutti i complessi della serie passano per l'asse di questo. — Una serie tripla di complessi lineari è involutoria ad un fascio di complessi: essa comprende tutti i complessi lineari passanti per 2 rette fisse, sicchè queste saranno gli assi dei 2 soli complessi speciali del fascio; e la congruenza delle rette comuni ai complessi di questo si compone di rette appoggiate su quelle due fisse (che sono le 2 direttrici della congruenza), cioè degli assi dei complessi speciali appartenenti alla serie tripla. Questa congruenza lineare però può essere speciale: in tal caso coincideranno i due com-

plessi speciali del fascio, ossia le 2 rette comuni ai complessi della serie tripla. Se poi la congruenza è doppiamente specializzata, cioè scissa in un punto ed un piano uniti, allora tutte le rette del fascio doppio di questa congruenza saranno assi di complessi speciali costituenti in tal caso tutto il fascio di complessi, mentre la serie tripla si comporrà dei complessi lineari che contengono quel fascio di rette. — Finalmente ad ogni serie doppia di complessi lineari è involutoria un'altra serie doppia in guisa che gli assi dei complessi speciali dell'una serie costituiscono la rigata quadrica che comprende tutte le rette comuni ai complessi dell'altra serie, e la rigata quadrica delle rette comuni ai complessi della prima serie si compone degli assi dei complessi speciali della seconda serie. Quindi queste due rigate quadriche sono tali che ogni retta dell'una taglia ogni retta dell'altra; i punti ed i piani delle rette delle due rigate sono perciò gli stessi e formano quindi una stessa *superficie* di 2° grado, nel senso ordinario di questa parola. Tali due rigate si diranno rigate quadriche *coniugate* e noi vediamo che esse sono caratterizzate nella geometria ordinaria del giacere su una stessa superficie di 2° grado. — Una delle due serie doppie di complessi lineari può essere *speciale*, cioè avere per rigata quadrica degli assi dei suoi complessi speciali una rigata quadrica specializzata, cioè degenerata in una coppia di fasci aventi una retta comune; in tal caso è chiaro che le rette comuni a quei complessi speciali e quindi anche a tutta la serie costituiscono quei 2 fasci che stanno rispettivamente negli stessi piani e negli stessi punti dei 2 fasci precedenti ma presi in modo inverso (poichè devono tagliare tutte le rette di quelli). Quindi questi nuovi fasci costituiscono gli assi dei complessi speciali della serie involutoria a quella, la quale dunque sarà pure speciale. Così vediamo come le due rigate quadriche coniugate si scindano simultaneamente in coppie di fasci ed in quale posizione mutua questi stiano. Può poi una delle due rigate quadriche essere doppiamente specializzata, cioè comporsi di due fasci coincidenti; in tal caso risulta tosto dalla teoria generale che anche l'altra sarà tale e che le due serie doppie involutorie avranno comune questo fascio di complessi lineari speciali, che è pure fascio di rette comuni a tutti i complessi delle due serie.

114. Abbiamo visto come in un fascio di complessi lineari ve ne siano in generale due speciali: ciò del resto risultava tosto dal fatto che nello spazio S in un fascio qualunque di S'_4 ve ne sono due tangenti ad R. Notiamo inoltre che due S'_4 di quel fascio sono coniugati rispetto ad R quando sono armonici coniugati rispetto a quei due S'_4 tangenti. Quindi possiamo anche definire due complessi lineari *involutori* come quelli che sono armonici coniugati rispetto ai due complessi speciali del loro fascio.

Se consideriamo le rette di un complesso lineare non speciale come formanti una quadrica R^2_3 in uno spazio lineare a 4 dimensioni, è chiaro che il complesso lineare contiene ∞^4 congruenze lineari, di cui due qualunque hanno comune una rigata quadrica, per la quale passano ∞^1 congruenze lineari del complesso, le quali diremo formare un *fascio*. Tra esse ve ne sono in generale due speciali (semplicemente specializzate); le direttrici delle congruenze del fascio costituiscono la rigata quadrica coniugata a quella considerata del complesso lineare, e per ciascuna delle

due congruenze speciali esse coincidono. Diremo che due congruenze lineari del complesso lineare sono *involutorie*, quando sono coniugate armoniche rispetto alle due congruenze speciali del loro fascio. È chiaro dalla considerazione della quadrica R nello spazio S a 5 dimensioni che per due congruenze lineari involutorie di un dato complesso lineare si possono sempre far passare (e in modo perfettamente determinato) due complessi lineari involutori tra loro ed al dato.

Similmente nella geometria delle rette di una congruenza lineare considerata come una quadrica R^2_4 in uno spazio lineare a 3 dimensioni si trova che la congruenza contiene ∞^3 rigate quadriche, le quali si tagliano a 2 a 2 in coppie di rette. Quelle rigate che passano per una stessa coppia di rette diremo formare un *fascio* (e considerate come luoghi di punti od inviluppi di piani formano realmente nel senso ordinario delle parole un fascio ed una schiera di superficie quadriche); tra esse ve ne sono due speciali, cioè scisse in coppie di fasci. Quando due rigate quadriche di una congruenza lineare sono coniugate armoniche rispetto alle 2 rigate speciali del loro fascio, diremo che esse sono *involutorie*.

Finalmente, tra le rette di una rigata quadrica si è condotti a considerarvi le coppie di un'involuzione: in ogni involuzione vi sono due coppie speciali, cioè due rette doppie. Due coppie di rette della rigata quadrica si potrebbero chiamare *involutorie*, quando sono coniugate armoniche rispetto alle due coppie speciali della involuzione da esse determinata; del resto è noto che in tal caso gli elementi di quelle 2 coppie sono tra loro coniugati armonici, sicchè 2 coppie involutorie di rette di una rigata quadrica formano un gruppo armonico.

115. Dalle proposizioni generali ottenute nel § 2 della 1ª parte segue immediatamente:

Esistono nello spazio R di rette ∞^{15} gruppi di 6 complessi lineari tali che due complessi qualunque del gruppo sono involutori. Esistono in un complesso lineare di rette ∞^{10} gruppi di 5 congruenze lineari mutuamente involutorie. Vi sono in una congruenza lineare generale ∞^6 gruppi di 4 rigate quadriche tra loro involutorie. Vi sono in una rigata quadrica generale ∞^3 gruppi di 3 coppie di rette a due a due involutorie, cioè armoniche.

In un gruppo di 6 complessi lineari involutori uno qualunque di essi è tagliato dagli altri secondo 5 congruenze lineari involutorie; la congruenza determinata da due di essi è tagliata dagli altri 4 secondo 4 rigate quadriche involutorie; e finalmente la rigata quadrica determinata da tre di essi è tagliata dagli altri 3 secondo 3 coppie di rette formanti 3 gruppi armonici. Queste proprietà potrebbero servire come punto di partenza per lo studio della notevole figura, a cui dà luogo il gruppo di 6 complessi lineari involutori, studio che è dovuto al KLEIN (*).

116. Consideriamo una quadrica qualunque φ in uno spazio a più dimensioni; preso fuori di essa un punto qualunque P di questo ed il suo piano polare π rispetto

(*) KLEIN. *Zur Theorie der Liniencomplexe 1 und 2 Grades.* Math. Ann. Bd. 2, S. 198.

a φ, essi determinano una trasformazione proiettiva notevole di quello spazio in se stesso, facendo cioè corrispondere tra loro due punti che stiano in un S'_1 passante per P e siano coniugati armonici rispetto a P e al punto d'intersezione del S'_1 stesso con π. È facile vedere che si corrisponderanno i punti di due piani i quali facciano fascio con π e siano coniugati armonici rispetto a π ed al piano del loro fascio passante per P. Dalla definizione del piano polare rispetto ad una quadrica risulta poi immediatamente che in quella trasformazione la quadrica φ si trasforma in se stessa. Uno spazio lineare qualunque (contenuto in quello considerato) avrà per corrispondente un altro spazio lineare ad altrettante dimensioni, il quale coinciderà col primo sia quando passi pel punto P, sia quando stia nel piano π. In particolare gli spazi lineari di φ si corrisponderanno tra loro e se il numero delle dimensioni di φ è numero pari $2p$ si corrisponderanno l'uno all'altro i due sistemi distinti di S'_p che sono contenuti in φ, sì che due S'_p corrispondenti si taglieranno in un S'_{p-1} giacente su π (*). — Ciò premesso abbiamo particolarizzando:

Un complesso lineare di rette c determina una corrispondenza nello spazio in cui sono coniugati a coppie: le rette dello spazio, in modo che le rette che tagliano una coppia di rette coniugate appartengono al complesso; i punti ed i piani dello spazio in modo che un punto ed un piano corrispondenti hanno comune un fascio di rette del complesso; i complessi lineari qualunque in modo che due complessi corrispondenti fanno fascio col complesso dato e sono coniugati armonici rispetto a questo ed a quel suo complesso involutorio che sta nel fascio stesso; e via dicendo. In particolare corrispondono a se stessi rispetto al complesso lineare le sue rette e i complessi lineari, che gli sono involutori.

In un complesso lineare di rette considerando una congruenza lineare qualunque, essa determina una corrispondenza tra le rette del complesso a due a due, essendo corrispondenti due rette del complesso tali che quelle che le tagliano costituiscono una rigata quadrica contenuta nella congruenza lineare. Si vede facilmente che questa definizione delle rette corrispondenti equivale a quest'altra: siano date le direttrici della congruenza considerata e per esse e la retta di cui si vuole la corrispondente rispetto a questa congruenza si conduca una rigata quadrica, nella quale si prenda quella generatrice che è coniugata armonica della retta data rispetto a quelle direttrici: la retta così ottenuta sarà la corrispondente di quella. In tal modo si fanno corrispondere tra loro i fasci di rette del complesso lineare e quindi anche i punti ed i piani dello spazio, poichè ogni punto ed ogni piano dello spazio contengono un tal fascio. Questa corrispondenza involutoria nello spazio ordinario non è altro che la involuzione chiamata dai Tedeschi « geschaart », la quale si può anche considerare indipendentemente da quel complesso lineare.

In una congruenza lineare considerando una rigata quadrica qualunque, essa determina una corrispondenza tra le rette di quella congruenza, in modo che ai suoi

(*) Si può considerare una corrispondenza in cui invece di un punto P ed un piano π si adoperano due spazi lineari qualunque fissi, polari l'uno dell'altro rispetto a φ. Sugli S'_1 che li tagliano si prendono come corrispondenti i punti coniugati armonici rispetto ai 2 punti in cui si tagliano. Si ha così una corrispondenza proiettiva involutoria, nella quale la quadrica φ corrisponde a se stessa.

fasci dell'un sistema corrispondono quelli dell'altro, essendo corrispondenti due fasci aventi comune una retta di quella rigata. Allora ad una retta qualunque della congruenza ne corrisponde un'altra che si determina come retta comune ai due fasci che corrispondono rispetto alla data rigata a quei due che contengono la prima retta. Da questa costruzione segue che due rette corrispondenti così costrutte sono le diagonali di un quadrilatero sghembo, di cui 2 lati opposti sono le direttrici della congruenza, e gli altri 2 appartengono alla rigata quadrica, e quindi sono, nel senso ordinario della parola, polari reciproche rispetto a questa, considerata come superficie quadrica. Quindi la corrispondenza considerata si riduce alla polarità rispetto ad una quadrica ordinaria.

§ 3.

Cenno sulle rigate, specialmente cubiche e quartiche.

117. Le rigate non sono altro, come vedemmo, che spazi ad una dimensione sullo spazio quadratico R a 4 dimensioni. Tutte le loro principali proprietà si possono ottenere considerandole come tali. Così un R^g_1 su R ha degli S'_2 *osculatori* che si ottengono congiungendone 3 elementi consecutivi; alcuni di questi S'_2 in numero finito taglieranno R in un S^2_1 speciale, cioè scisso in due S'_1. Per eccezione poi l'R^g_1 può esser tale che in un suo elemento vi sia un S'_2 *stazionario*, cioè congiungente quell'elemento non solo a due, ma a tre elementi consecutivi. Dunque:

Ogni generatrice di una rigata qualunque ha una rigata quadrica osculatrice (*), la quale congiunge quella generatrice alle 2 consecutive ed ha quindi la rigata quadrica coniugata composta delle tangenti principali (usando i termini della geometria dello spazio ordinario di punti) della superficie aventi in quella generatrice i punti di contatto. Vi sono poi in generale alcune generatrici, per ciascuna delle quali la rigata quadrica osculatrice si scinde in due fasci, di cui uno passante per le generatrici stesse. Una tale generatrice sarà una generatrice *singolare*, cioè sarà caratterizzata dal tagliare la generatrice consecutiva, donde segue immediatamente che i suoi punti avranno uno stesso piano tangente. Per eccezione poi può la rigata avere una generatrice tale che la rigata quadrica osculatoria sia *stazionaria*, cioè contenga anche le 3 generatrici consecutive: le rette della rigata coniugata sono allora tangenti quadripunte della superficie. Queste generatrici, i cui punti sono punti di contatto di tangenti quadripunte, furono dal Voss, che prima le considerò (**), chiamate « hyperbolische Erzeugende », cioè *generatrici iperboliche*.

Similmente di un R^g_1 su R possiamo considerare in ogni elemento l'S'_3 osculatore, il quale lo congiunge ai 3 elementi consecutivi, e l'S'_4 osculatore, il quale lo congiunge ai 4 elementi consecutivi; sia quello sia questo possono divenire stazionari pel contenere ancora un altro elemento consecutivo (l'S'_3 soltanto per degli R^g_1 speciali), e possono divenire tangenti alla quadrica R. Dunque:

(*) V. Plücker. *Théorie générale des surfaces réglées.* — Annali di matematica, T. 1°, serie 2ª (1867), alla pag. 163.

(**) V. Voss. *Zur Theorie der windschiefen Flächen.* — Mathematische Annalen, VIII a pag. 94

Ogni generatrice di una rigata ha una congruenza lineare osculatrice, la quale la contiene insieme colle tre generatrici consecutive, e un complesso lineare osculatore, che la congiunge alle 4 generatrici consecutive. È chiaro che le due direttrici di quella congruenza sono tangenti quadripunte della superficie, cosicchè vi sono su ogni generatrice in generale 2 punti di contatto di tangenti quadripunte, e quindi la curva delle tangenti quadripunte è tagliata da ogni generatrice in 2 punti. Vi sono alcune generatrici particolari tangenti a quella curva; quelle cioè per cui la congruenza lineare osculatrice è speciale. Vi sono poi anche rigate speciali aventi qualche generatrice in cui la congruenza lineare osculatrice è stazionaria; allora le direttrici di questa congruenza hanno contatto 5 - punto colla superficie. — In ogni rigata vi sono in generale generatrici per le quali il complesso lineare osculatore diventa speciale: allora l'asse di questo è tangente 5 - punto della superficie. Vi sono poi anche generatrici in cui il complesso lineare osculatore è stazionario, cioè congiunge 6 generatrici consecutive.

118. È pure facile dimostrare l'esistenza e le proprietà della curva doppia della rigata. Consideriamo l'R^g_1 su R ed in un suo elemento qualunque si prenda l'S'_4 tangente ad R: taglierà l'R^g_1 in altri $g-2$ elementi. Dunque:

Ogni generatrice di una rigata di grado g si appoggia su altre $g-2$, cosicchè la curva doppia della superficie taglia ogni generatrice in $g-2$ punti.

Ed altre proposizioni ancora si otterrebbero col nostro metodo colla stessa facilità, ma le lasciamo da parte per non dilungarci troppo.

119. Dai teoremi dimostrati al n° 7 risulta che un modo naturale di classificare le rigate di dato grado g è di distinguerle anzitutto a seconda che non stanno in un complesso lineare, o stanno in un complesso lineare, o stanno in una congruenza lineare (Si potrebbe aggiungere il caso in cui stanno in un piano od in un punto di rette, ma allora si hanno inviluppi piani di classe g e coni d'ordine g, e di queste rigate speciali è più conveniente occuparsi a parte, come spazi algebrici ad una dimensione contenuti in spazi lineari a 2 dimensioni). In particolare lo studio delle rigate di una congruenza lineare è lo studio degli S_1 su un S'_2, vale a dire equivale perfettamente alla geometria delle curve su una quadrica ordinaria; dove questa quadrica si specializzerà in un cono quando la congruenza lineare, che si considera, diventi speciale per venire ad essere infinitamente vicine le sue direttrici. Questa equivalenza perfetta tra la geometria delle rigate di una congruenza lineare e la geometria delle curve su una quadrica ordinaria è assai importante, come vedremo tosto.

120. Dalle cose dette alla fine del n° 7 segue che una rigata cubica sta sempre in una congruenza lineare, generale o speciale (*), sicchè la geometria delle rigate cubiche equivale alla geometria delle cubiche su una quadrica, la quale si

(*) Questa semplicissima dimostrazione diretta di questo teorema sulle rigate cubiche si trova nella memoria del CLIFFORD « *On the classification of Loci* », che già avemmo occasione di citare (Philosoph. Transact., vol. 169. V. pag. 664).

riduce ad un cono quando quella congruenza lineare è speciale. Ora è noto che una cubica sghemba nello spazio lineare a 3 dimensioni non può presentare altra particolarità che lo scindersi; inoltre considerando la cubica su una quadrica è noto che essa è tagliata da ogni generatrice di un sistema di questa in un punto solo e da ogni generatrice dell'altro sistema in 2 punti e che in quest'ultimo sistema vi sono 2 generatrici tangenti alla cubica. Considerando invece la cubica su un cono quadrico, essa passa pel vertice di questo, taglia ogni generatrice in un altro punto e tocca nel vertice una sola generatrice. Dunque:

Vi sono due specie di rigate cubiche (*): *la* 1ª *specie appartiene ad una congruenza lineare generale, cioè ha due direttrici di cui una doppia come luogo e semplice come inviluppo, l'altra semplice come luogo e doppia come inviluppo, vale a dire pei punti della* 1ª *direttrice nei piani della* 2ª *passano due generatrici della rigata, mentre pei punti della* 2ª *direttrice nei piani della* 1ª *passa una sola generatrice della rigata; vi sono due punti sulla* 1ª *direttrice coi due piani che li congiungono alla* 2ª, *per ciascuno dei quali accade che le due generatrici della rigata cubica coincidono* (*punti e piani* cuspidali *delle due direttrici*). — *La* 2ª *specie di rigate cubiche comprende quelle appartenenti ad una congruenza lineare speciale, la cui direttrice è non solo direttrice, ma anche generatrice della rigata, sì che in ogni punto ed in ogni piano di essa sta solo un'altra generatrice, la quale viene a coincidere colla direttrice per un certo punto ed un certo piano* (*cuspidali*).

Notando anche che una cubica insieme con una sua corda costituisce l'intersezione completa di infinite quadriche, avremo la seguente proposizione, che ci gioverà più tardi:

Una rigata cubica insieme con un fascio di rette qualunque avente il centro sulla direttrice che è doppia come luogo di punti ed il piano passante per la direttrice doppia come inviluppo costituisce l'intersezione completa della congruenza lineare a cui essa appartiene con infiniti complessi quadratici.

121. Venendo finalmente alle rigate di 4° grado risulta pure immediatamente dal fatto che ogni S_1^4 sta in un S'_4 od in un S'_3 od in un S'_2 (nº 7) che ogni tal rigata sta in un solo complesso lineare oppure in una congruenza lineare (non considerando la rigata che si riduce ad un cono o ad un inviluppo piano). Le rigate quartiche che stanno in un solo complesso lineare si vede facilmente che hanno per curva doppia una cubica, la quale può scindersi in vari modi, come si scorge nei lavori di *Cayley* e *Cremona*. Quanto poi alle rigate quartiche che stanno in una congruenza lineare, il loro studio coincide con quello delle curve di 4° ordine segnate su una quadrica ordinaria. Ora è noto che queste curve si distinguono in 2 specie: quelle di 1ª specie sono intersezioni di un fascio di quadriche e sono quindi tagliate

(*) V. Cayley. « *On skew surfaces, otherwise scrolls* », Philosophical Transactions, 1864, vol. 154, e precisamente alle pag. 568–571 (Cubic scrolls).

in 2 punti da ogni generatrice di ciascun sistema della quadrica fissa; mentre quelle di 2ª specie non stanno su altre quadriche e sono tagliate dalle generatrici di un sistema in 3 punti, da quelle dell'altro in un punto solo. Dunque:

Vi sono due specie di rigate di 4° grado appartenenti ad una congruenza lineare. Ogni rigata della 1ª specie è intersezione di quella congruenza con infiniti complessi quadratici e quindi ha entrambe le direttrici della congruenza lineare per rette doppie sia come luoghi di punti, sia come inviluppi di piani. Una rigata della 2ª specie invece non appartiene ad alcun complesso quadratico (il quale non contenga tutta la congruenza lineare) ed ha in ogni fascio di rette della congruenza di un sistema 3 generatrici, in ogni fascio dell'altro sistema una sola generatrice, cosicchè una direttrice è tripla come luogo e semplice come inviluppo, mentre l'altra è semplice come luogo e tripla come inviluppo. — La congruenza lineare a cui appartengono queste rigate di 4° grado può anche specializzarsi venendo le due direttrici a coincidere.

Noi in seguito avremo solo da considerare tra le rigate di 4° grado quelle appartenenti ad una congruenza lineare ed intersezioni di questa con complessi quadratici, cioè quelle di 1ª specie; quindi le indicheremo per brevità col nome di rigate *biquadratiche*. Ad esse sono applicabili tutte le proprietà delle ordinarie quartiche d'intersezione di quadriche, di cui alcune furono appunto trovate in questo lavoro.

§ 4.

Complesso e congruenza quadratici e rigata biquadratica. Loro generazioni, e spazi notevoli in essi contenuti.

122. Dalle definizioni date del complesso quadratico, della congruenza quadratica e della rigata biquadratica risulta che essi non sono altro che quartiche (intersezioni di quadriche) rispettivamente a 3, a 2 e ad 1, dimensioni. Quindi basterà che noi nella teoria delle quartiche svolta nella 2ª Parte di questo lavoro poniamo successivamente $n=6$, 5, 4, per avere la teoria di quelli. Però bisognerà notare che tra le quadriche passanti per quelle quartiche che vogliamo considerare ve n'è sempre una notevole: quella che ha per elementi le rette. Pel complesso quadratico essa è lo spazio R_4 a 4 dimensioni di rette; per la congruenza quadratica essa è il complesso lineare R_3 di rette in cui questa congruenza è sempre contenuta; per la rigata biquadratica essa è la congruenza lineare di rette R_2 che la contiene. In ciascuno dei tre casi questa quadrica, che nel fascio delle quadriche passanti per la quartica considerata ha speciale importanza, va sempre considerata più particolarmente delle altre: le trasformazioni proiettive degli spazi lineari che noi ora consideriamo, trattandosi di geometria della retta, devono sempre esser tali da trasformare quella tal quadrica in se stessa. Quindi una prima osservazione da fare è se quella quadrica si specializza (come luogo, poichè noi l'abbiamo definita od ottenuta solo come superficie-luogo), e in qual modo. Ora, quanto al complesso quadratico l'R_4 in cui è

contenuto non si specializza, poichè definimmo appunto la retta come l'elemento di una quadrica a 4 dimensioni non specializzata. Per la congruenza quadratica invece vi saranno da distinguere due classi diverse, secondo che il complesso lineare R_3 cui essa appartiene è generale oppure è speciale, cioè composto delle rette che ne tagliano una fissa. E per la rigata biquadratica vi saranno da distinguere 3 classi distinte secondo che la congruenza lineare cui essa appartiene è generale, o semplicemente specializzata, cioè colle due direttrici infinitamente vicine, o doppiamente specializzata, cioè decomposta in un punto ed un piano in posizione unita.

Risulta pure dalle date definizioni che una congruenza quadratica si può sempre ottenere come intersezione del complesso lineare in cui è contenuta con un conveniente complesso quadratico, e che una rigata biquadratica si può ottenere come intersezione della congruenza lineare che la contiene con un complesso quadratico, ovvero come intersezione di una congruenza quadratica e di un complesso lineare convenienti.

123. Come per una quartica a quante si vogliano dimensioni, così per ciascuna delle tre, che noi ora particolarmente consideriamo, vi sarà una caratteristica, la quale ci darà la *specie* del complesso quadratico, della congruenza quadratica o della rigata biquadratica. La somma degl'indici contenuti in quella caratteristica sarà rispettivamente uguale a 6, 5, 4. Ogni gruppo caratteristico con h indici rappresenta in generale, come vedemmo (V. § 3 della 2ª Parte) una quadrica h volte specializzata passante per la quartica che si considera, e quindi un S'_{h-1}, doppio per quella quadrica, e tale che da un suo punto qualunque gli S_1' che vanno ad un punto mobile della quartica la tagliano ancora in un altro punto. Ogni punto di quel S'_{h-1} posto sulla quartica è doppio per questa ed ha lo stesso piano tangente a tutte le quadriche del fascio. Per le quartiche da noi considerate abbiamo così le *rette doppie* di un complesso quadratico (*), di una congruenza quadratica e di una rigata biquadratica. Ricordando le cose dette al nº 116 e la teoria generale svolta nel § 3 della 2ª Parte, noi abbiamo successivamente:

Un complesso quadratico della specie più generale [1 1 1 1 1 1] *ha* 6 *soli complessi lineari* fondamentali, *cioè complessi lineari tali che il complesso quadratico corrisponde a se stesso rispetto a ciascuno di essi* (**); *questi* 6 *complessi lineari sono a due a due in involuzione e formano quindi un gruppo di quelli considerati al nº* 115. *Un complesso quadratico di specie qualunque ha altrettante serie lineari di complessi fondamentali quanti sono i gruppi d'indici della sua caratteristica; ogni serie lineare di complessi fondamentali è tante volte infinita quante*

(*) È facile vedere che questa definizione delle rette doppie di un complesso quadratico coincide con quella primitiva di Plücker, cosa del resto che risulterà pure in seguito.

(**) La classificazione dei complessi quadratici fu data dal Weiler nel 1873 nella memoria « *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades* » (Math. Ann. Bd. VII, S. 145-207), la quale, benchè assai pregevole, ha però alcuni difetti, che già notai nella prefazione. — La denominazione di *complessi fondamentali* è usata dal Weiler (loc. cit., pag. 148) nel senso di complessi di riferimento delle equazioni; ma siccome tra questi complessi (quali vengono dalle equazioni canoniche del Weierstrass) ve ne sono alcuni privi affatto d'importanza geometrica pel complesso quadratico, preferisco chiamare *fondamentali* solo i complessi lineari che godono della proprietà importante suesposta.

sono le unità, meno una, contenute nel numero d' indici del gruppo caratteristico corrispondente. Ancora due complessi fondamentali saranno involutori, purchè però appartengano a serie lineari diverse. Tutti i complessi fondamentali speciali hanno per assi delle rette doppie del complesso quadratico e determinano in tal modo tutte *le rette doppie di questo. Quindi, mentre nel caso più generale il complesso non ha rette doppie, in un caso qualunque ogni gruppo caratteristico di* h *indici dà origine ad un* $S^2{}_{h-2}$ *di rette doppie del complesso, escluso il caso in cui quegli* h *indici fossero tutti* > 1, *nel qual caso tutta la serie lineare* $h-1$ *volte infinita di complessi fondamentali corrispondenti si compone di complessi speciali, i cui assi formanti un* $S'{}_{h-1}$ *sono rette doppie del complesso quadratico. Così un gruppo caratteristico composto di due indici corrisponde ad un fascio di complessi lineari fondamentali, tra cui i due speciali hanno per assi due rette doppie del complesso quadratico, le quali coincidono se il primo di quegli indici è maggiore di* 1; *ma, se entrambi quegli indici sono maggiori di* 1, *allora quel fascio si comporrà tutto di complessi lineari speciali, cioè si avrà in tal caso pel complesso quadratico un fascio di rette doppie. Due rette doppie appartenenti a due serie diverse si tagliano sempre e il fascio di rette da esse determinato fa parte del complesso quadratico. Tre rette doppie appartenenti a serie diverse si tagliano mutuamente e determinano un piano od un punto, le cui rette stanno tutte nel complesso quadratico. Ad un gruppo caratteristico composto di un solo indice corrisponde una retta doppia, cioè un complesso fondamentale speciale, solo quando quell'indice sia* > 1. — Vedremo più tardi quali proprietà distinguano tra loro queste rette doppie.

124. *Una congruenza quadratica appartenente ad un complesso lineare non speciale* R_3 *ha nel caso più generale* $[11111]$ 5 *sole congruenze lineari* fondamentali, *cioè congruenze lineari contenute in quel complesso lineare tali che la congruenza quadratica corrisponde a se stessa rispetto a ciascuna di esse* (nel senso del n° 116), *e quindi anche rispetto all'unico complesso lineare involutorio ad* R_3 *che si può far passare per ciascuna di quelle congruenze lineari; sicchè una congruenza quadratica ha per ogni congruenza fondamentale un complesso lineare* fondamentale *involutorio a quello in cui essa giace, tale cioè che essa corrisponde a se stessa rispetto ad esso. — Passando ai casi particolari, ad ogni gruppo di* h *indici della caratteristica di una congruenza quadratica corrisponde una serie lineare* $h-1$ *volte infinita di congruenze fondamentali di questa, e quindi anche di suoi complessi fondamentali. Gli assi delle congruenze fondamentali speciali (o dei complessi fondamentali speciali, il che fa lo stesso) di una congruenza quadratica sono rette doppie di questa. Quindi il gruppo di* h *indici caratteristici dà origine ad un* $S^2{}_{h-2}$ *di rette doppie, salvo il caso, in cui quegli indici siano tutti* > 1, *poichè allora si ha un* $S'{}_{h-1}$ *di rette doppie, cioè tutta la serie lineare* $h-1$ *volte infinita di congruenze fondamentali si comporrà di congruenze speciali. Due congruenze fondamentali (o complessi fondamentali) appartenenti a serie lineari diverse sono sempre involutorie; in particolare due rette doppie della congruenza quadratica provenienti da serie diverse si tagliano sempre. Ad un gruppo caratteristico composto di un indice solo* > 1 *corrisponde una retta doppia (isolata).*

Cose simili si trovano nel caso in cui il complesso lineare, al quale appartiene la congruenza quadratica, sia speciale. In tal caso nella caratteristica della congruenza vi sarà un indice caratteristico isolato. il quale corrisponderà appunto alla quadrica a 3 dimensioni speciale R_3 delle rette di quel complesso lineare: quell' indice caratteristico verrà distinto dagli altri con una lineetta orizzontale posta al disopra.

125. *Una rigata biquadratica della specie più generale* [1 1 1 1] *ha* 4 *rigate quadriche della congruenza lineare (supposta non speciale) cui essa appartiene* fondamentali, *cioè tali che rispetto a ciascuna di quelle* 4 *quadriche la rigata biquadratica è polare di se stessa; ciascuna di quelle* 4 *quadriche poi è polare di se stessa rispetto a ciascun' altra. Vi è un determinato gruppo di* 4 *complessi lineari involutori tra loro ed ai complessi lineari passanti per quella congruenza lineare (cioè passanti essi stessi per le direttrici di questa) e che tagliano questa congruenza appunto secondo le* 4 *rigate quadriche fondamentali: questi complessi lineari sono pure tali che rispetto a ciascuno di essi la rigata biquadratica corrisponde a se stessa. — La rigata biquadratica può poi avere uno o due fasci di quadriche fondamentali, ma in tal caso essa stessa si scinde in due rigate quadriche. Se poi una rigata quadrica fondamentale è speciale, cioè scissa in due fasci aventi comune una retta, questa sarà una generatrice doppia per la rigata biquadratica.* — Del resto la classificazione delle rigate biquadratiche coincide con quella già fatta (V. n° 80) delle quartiche intersezioni di quadriche a 2 dimensioni e quindi si deduce immediatamente da questa con solo cambiamento di parole E questo appunto faremo più tardi.

La congruenza lineare cui appartiene la rigata biquadratica può essere speciale, avendo le due direttrici infinitamente vicine, od anche doppiamente specializzata scindendosi in un piano ed un punto uniti; nel 1° caso nella caratteristica della rigata biquadratica vi sarà un indice caratteristico isolato corrispondente alla congruenza lineare speciale, nel 2° caso il gruppo di due indici caratteristici. Noteremo sempre con una lineetta orizzontale superiore nel 1° caso quell' indice, nel 2° quella coppia d'indici, che si riferiscono alla congruenza lineare.

126. Passiamo ora alla ricerca degli spazi più semplici di rette contenuti nel complesso e nella congruenza quadratici ed alla generazione proiettiva di essi e della rigata biquadratica. Basterà perciò che particolarizziamo i risultati del § 2 della 2ª Parte (*).

(*) Nella generazione con sistemi reciproci di piani di una quadrica a più dimensioni vedemmo (n° 44) che l'ordine d'infinità di quei sistemi di piani si può scegliere ad arbitrio da un certo minimo in su. Noi nelle applicazioni ci limitiamo a considerare questo minimo ordine d'infinità, come quello che dà il modo più importante in generale di generare la quadrica. Se si tenesse anche conto degli altri modi si avrebbe ad esempio che ogni complesso quadratico si può generare mediante *due spazi reciproci di rette*, cioè due spazi in cui ad ogni retta dell'uno corrisponde un complesso lineare di rette e viceversa; sarebbe cioè il complesso quadratico il luogo di quelle rette che stanno nei complessi lineari corrispondenti. Un caso particolare semplicissimo ben noto di questo modo di generazione è quello del complesso *tetraedrale* (la cui caratteristica vedremo essere [(11)(11)(11)] come luogo di quelle rette di uno spazio che tagliano le rette corrispondenti di uno spazio *omografico*; un altro

Ogni complesso quadratico ha ∞^1 *generazioni* (V. n° 56) corrispondentemente al fascio di S^2_4 che nello spazio lineare S a 5 dimensioni passano per esso. Ora ogni S^2_4 contiene in generale ∞^3 S_2' formanti 2 sistemi distinti, sì che due che siano dello stesso sistema hanno un elemento comune e quindi stanno in un S_4', mentre ciò non accade per due di diverso sistema, i quali possono però avere per eccezione un S_1' comune e quindi stare in un S_3'. Per un elemento qualunque del S^2_4 passano ∞^1 S_2' di ciascun sistema. Un S_4^2 non contiene degli S_3', a meno che sia due volte specializzato, cioè abbia un S_1' doppio, nel qual caso gli S_3' che contiene passeranno per questo. Finalmente ricordiamo un risultato ottenuto alla fine del n° 45 sul modo di generare un S_4^2. Tagliando poi tutto con R, quadrica a 4 dimensioni delle rette, noi abbiamo:

Un complesso quadratico ha ∞^1 generazioni. Per ciascuna generazione esso contiene due diversi sistemi di ∞^3 rigate quadriche tali che due rigate dello stesso sistema sono contenute in un complesso lineare e possono aver comune (per eccezione) una sola retta, mentre due rigate di diverso sistema non stanno in generale in uno stesso complesso lineare, ma per eccezione possono stare in una congruenza lineare avendo di comune in tal caso due rette. Due rigate quadriche di generazioni diverse non hanno in generale nulla di comune. Per ogni retta del complesso passano ∞^1 rigate quadriche di ciascun sistema di una data generazione. — Notevole tra le ∞^1 generazioni è quella che corrisponde ad R: essa si ha considerando le rette comuni al complesso ed ai piani e punti di rette dello spazio, sicchè i due sistemi di rigate quadriche appartenenti a questa generazione sono costituiti dalle ∞^3 coniche e dagli ∞^3 coni del complesso quadratico. — Notevoli sono pure quelle generazioni che corrispondono agli S_4^2 specializzati: per ogni generazione corrispondente ad un S_4^2 semplicemente specializzato i due sistemi di rigate quadriche coincidono e ognuna delle ∞^3 quadriche rigate che così si hanno è involutoria al complesso fondamentale del dato complesso quadratico, il quale corrisponde a quel S_4^2, vale a dire ogni rigata quadrica di quella generazione corrisponde a se stessa rispetto a quel complesso fondamentale ed ha quindi la rigata quadrica coniugata contenuta in questo. Queste generazioni speciali sono tante quanti sono i complessi fondamentali isolati del dato complesso quadratico, cioè quanti sono gl'indici caratteristici isolati nella caratteristica di questo. Ma se in questa caratteristica entra un gruppo caratteristico composto di due o più indici, allora la generazione a cui quello corrisponde sarà due o più volte specializzata e conterrà quindi non solo rigate quadriche, ma congruenze lineari contenute nel complesso quadratico (mentre in generale il complesso non contiene delle congruenze lineari). In tal caso queste congruenze lineari formano due diversi sistemi pas-

---

caso notevole, che credo non sia ancora stato considerato, è quello del complesso delle rette di uno spazio che tagliano le rette corrispondenti di uno spazio *correlativo*. Questo complesso quadratico è più generale di quello tetraedrale, avendo per caratteristica [(11)(11)11]; la sua superficie singolare è perciò, come vedremo, scissa in due quadriche tagliantisi in 4 rette, e queste quadriche non sono altro risp. che il luogo dei punti e l'inviluppo dei piani, i quali sono in posizione unita cogli elementi corrispondenti nella correlatività. Lo studio di questa in relazione con quel complesso quadratico è assai interessante; ma qui debbo limitarmi a quest'indicazione.

santi sempre per le rette doppie del complesso corrispondenti a quel gruppo caratteristico e tali che due congruenze dello stesso sistema non hanno altre rette comuni, mentre due congruenze di diverso sistema hanno comune una rigata quadrica.

Si può sempre generare il complesso quadratico con due stelle reciproche di complessi lineari passanti per 2 rigate quadriche prese ad arbitrio nel complesso quadratico, in modo però che una di esse appartenga all'uno, l'altra all'altro dei due diversi sistemi di una stessa generazione; ad ogni complesso lineare e ad ogni congruenza lineare dell'una stella corrisponderanno nell'altra rispettivamente una congruenza ed un complesso lineari, e le intersezioni dei complessi e delle congruenze corrispondenti saranno rigate quadriche che costituiranno i due sistemi appartenenti a quella generazione e genereranno completamente il dato complesso quadratico. Non si può in generale generare il complesso quadratico mediante le intersezioni di due fasci proiettivi di complessi lineari; ciò è solo possibile quando vi è nella caratteristica un gruppo di due o più indici, cioè quando vi è una generazione due o più volte specializzata del complesso quadratico. In tal caso nei due diversi sistemi di congruenze lineari che vedemmo costituire quella generazione si potranno prendere ad arbitrio due congruenze dello stesso sistema come sostegni di due fasci proiettivi di complessi lineari atti a generare il complesso quadratico; le congruenze d'intersezione dei complessi lineari corrispondenti costituiranno l'altro sistema. Viceversa due fasci proiettivi di complessi lineari generano un complesso quadratico, di cui la caratteristica contiene almeno un gruppo di due o più indici. Quindi noi siamo in grado di dire dal semplice esame della caratteristica di un complesso quadratico se esso sia generabile con fasci proiettivi di complessi lineari, o se si può soltanto generarlo con stelle reciproche; ed inoltre in quanti modi si possa generarlo coll'uno o coll'altro mezzo (*).

127. Passando ora alla congruenza quadratica, quartica in uno spazio a 4 dimensioni, noi sappiamo che un S^2_3 qualunque contiene solo in generale degli S'_1 e non degli S'_2 e quindi è generabile solo con stelle reciproche e non con fasci proiettivi; salvo il caso in cui quel S^2_3 sia specializzato per uno od infiniti elementi doppi, nel qual caso esso contiene degli S'_2 passanti per gli elementi doppi ed è generabile con fasci proiettivi di S'_3 passanti per questi. Inoltre se supponiamo l'S^2_3 semplicemente specializzato sappiamo che gli S'_2 contenuti in esso formano due sistemi, sì che due S'_2 si tagliano, oltre che nell'elemento doppio, in un S'_1 solo quando siano di di-

(*) Alcune delle proposizioni così trovate, cioè quelle sulle rigate quadriche contenute in un complesso quadratico qualunque, formanti ∞' generazioni, ciascuna con 2 diversi sistemi, e sulla generabilità di ogni tal complesso mediante due stelle reciproche di complessi e congruenze lineari, furono trovati recentemente per tutt'altra via dallo Schur nella sua notevole « *Inauguraldissertation* » intitolata « *Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1. und 2. Grades* » (Berlin, 1879) (V. specialmente a pag. 33-36). È questo il primo lavoro in cui si siano studiati sinteticamente i complessi quadratici generali, poichè prima di esso lo studio sintetico si era limitato ad alcuni complessi notevoli, come quello tetraedale ed i complessi quadratici che si possono generare con fasci proiettivi di complessi lineari. — Quanto alle ∞^4 rigate quadriche contenute in un complesso quadratico qualunque esse furono prima trovate mediante la rappresentazione del complesso sullo spazio lineare a 3 dimensioni del Caporali nella memoria « *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado* » (Memorie della R. A. d. Lincei, serie 3ª, vol. 2°, anno 1877-78) a pag. 13.

verso sistema, e quindi allora soltanto essi son contenuti in un S'_3. Per ogni elemento del S^2_3 speciale passa un determinato S'_2 per ciascun sistema. Osserviamo anche che due S'_2 appartenenti a due diversi S^2_3 speciali hanno sempre un elemento comune, il quale apparterrà alla quartica d'intersezione di quei due S^2_3. Ciò premesso, possiamo enunciare le seguenti proposizioni intorno alle congruenze quadratiche.

Una congruenza quadratica si può generare in infiniti modi mediante stelle reciproche di congruenze lineari appartenenti al complesso lineare che la contiene. Essa ha poi per generazioni notevoli quelle che corrispondono ai vari gruppi di indici della sua caratteristica, e quindi 5 *nel caso più generale. Per ciascuna generazione siffatta la congruenza contiene* 2 *sistemi distinti di* ∞^1 *rigate quadriche, sì che per ogni retta della congruenza ne passa una di ciascun sistema. Ciascuna di queste rigate quadriche corrisponde a se stessa rispetto alla congruenza lineare fondamentale (od al fascio di congruenze fondamentali) della congruenza quadratica, che corrisponde a quella generazione. Due rigate della stessa generazione non hanno rette comuni se sono dello stesso sistema (od hanno solo comune ogni retta doppia della congruenza quadratica, la quale corrisponda a quella generazione), ma hanno due rette comuni, cioè stanno in una congruenza lineare se sono di diverso sistema. Due rigate quadriche di generazioni diverse hanno comune una sola retta della congruenza quadratica.*

Per ciascuna delle generazioni considerate di una congruenza quadratica si può costrurre questa come luogo delle rigate d'intersezione delle congruenze lineari corrispondenti di due fasci proiettivi di congruenze lineari del dato complesso lineare (contenente la congruenza quadratica), i cui sostegni sono due rigate quadriche arbitrarie dello stesso sistema di quella generazione della congruenza quadratica: le rigate d'intersezione così ottenute formano appunto l'altro sistema di quella generazione (*).

128. Finalmente per la rigata biquadratica notiamo che ogni quadrica nello spazio lineare a 3 dimensioni si genera con 2 fasci proiettivi di S'_2 in infiniti (∞^2) modi formanti due sistemi diversi (se la quadrica non è specializzata) corrispondenti ai due sistemi di generatrici che stanno su quella quadrica. Quindi anche ogni quartica su una quadrica fissa φ si può generare come intersezione di due fasci proiettivi di S^2_1 di φ (intendendo per *fascio* di S^2_1 l'insieme di tutti quelli che passano per 2 elementi fissi di φ) in ∞^3 modi; la quartica contiene le 2 coppie di elementi formanti le basi di quei due fasci. Si possono prendere ad arbitrio solo 3 dei 4 elementi detti, poichè per l'S'_1 congiungente una coppia di questi passerà solo una determinata quadrica del fascio, la quale avrà solo una generatrice passante pel terzo ele-

(*) Anche i teoremi sulle 5 coppie di sistemi di rigate quadriche contenute nel caso più generale in una congruenza quadratica, e la generazione di questa con fasci proiettivi di congruenze lineari si trovano nella memoria dello SCHUR (pag. 17, 18). Ma quanto all'esistenza dei 10 sistemi di rigate quadriche, essa era già nota prima di questa memoria. Essa fu accennata, credo per la prima volta, dal LIE nella memoria già citata « *Ueber Complexe, etc.* » Math. Ann., V a pag. 247 nella 2ª nota, e fu poi dimostrata e approfondita dal CREMONA nello scritto « *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* » (Atti della R. Acc. d. Lincei, serie II, anno 3°, 1875).

mento e dello stesso sistema di quel S'_1 e quella generatrice taglierà φ ancora in un altro determinato elemento, che è il quarto elemento cercato. Queste proprietà valendo per uno spazio lineare qualunque a 3 dimensioni dànno oltre a teoremi noti per lo spazio ordinario i seguenti per la rigata biquadratica in una congruenza lineare di rette:

Ogni rigata biquadratica si può generare in ∞^3 modi come luogo delle coppie mobili di rette d'intersezione delle rigate quadriche corrispondenti di due fasci appartenenti ad una stessa congruenza (Un tal fascio, considerate le rigate quadriche come superficie luoghi di punti si compone di quadriche passanti per 4 rette fisse; i due fasci poi che generano la rigata biquadratica hanno comuni 2 rette di queste quaterne, cioè le due direttrici della congruenza lineare, sicchè due quadriche dei due fasci hanno ancora due altre rette comuni). I sostegni di quei due fasci sono due coppie di generatrici della rigata biquadratica; tre di queste generatrici si possono prendere ad arbitrio, ma allora la quarta è perfettamente determinata.

§ 5.

Polarità rispetto ai complessi quadratici. Proprietà diverse di questi.

129. La teoria generale svolta nel § 1 della 2ª Parte sulla polarità rispetto ad una quartica o ad un fascio di quadriche in uno spazio di un numero qualunque di dimensioni ci dà immediatamente i seguenti risultati.

Ogni retta r dello spazio ha un fascio di complessi lineari *polari* rispetto ad un dato complesso quadratico Q: essi corrispondono alle ∞^1 generazioni di questo (essendo essi gli S^2_3 d'intersezione con R degli S'_4 polari di r rispetto alle quadriche S^2_4 di un fascio di base Q, che comprende R) e la corrispondenza è proiettiva, sicchè tutti i fasci di complessi lineari polari di rette dello spazio son fatti corrispondere proiettivamente tra loro dalle generazioni a cui corrispondono (*). Del fascio di complessi lineari polari di r fa parte il complesso speciale avente r per asse (la generazione di Q a cui esso corrisponde è quella proveniente da R, cioè formata di coni e coniche di Q) ed un altro complesso lineare speciale, il cui asse r' dicesi *retta polare* di r rispetto a Q, e che corrisponde ad una generazione particolare di Q, la quale però varia con r. La congruenza base del fascio di complessi polari

(*) Si potrebbero considerare non solo i complessi polari di una retta, cioè di un complesso lineare speciale, rispetto ad un complesso quadratico, ma anche quelli di un complesso lineare qualunque non speciale. Allora il fascio di complessi polari di un complesso lineare qualunque comprenderebbe pure questo, e conterrebbe due complessi lineari speciali, le cui direttrici sarebbero coniugate rispetto a questo. La teoria ordinaria della polarità rispetto ad un complesso quadratico riescirebbe in tal modo più completa. Del resto questa estensione non presenta difficoltà, e quindi la ometto per brevità. — Per la stessa ragione ho omesso in questa 3ª Parte del mio lavoro di fare applicazione delle teorie generali svolte nelle prime due parti allo spazio dei complessi lineari, cioè alla teoria delle serie quadratiche di complessi lineari, dei fasci di tali serie, ecc., applicazione così evidente da parer superflua.

di r, cioè la congruenza lineare di direttrici r, r', dicesi *congruenza polare* di r. Quando la retta r appartiene al complesso quadratico Q, allora i suoi complessi polari diconsi *tangenti*, e la congruenza lineare polare *congruenza tangente* in r a Q: questa congruenza è speciale, poichè la polare r' di r viene in tal caso a coincidere con r.

Se si considerano delle rette dello spazio soltanto i complessi polari corrispondenti ad una determinata generazione del complesso quadratico, esse dànno luogo a proprietà, che sono casi particolari della polarità rispetto ad una quadrica qualunque. Così se una retta sta nel complesso polare di un'altra retta, il suo complesso polare passerà per questa; e altre proposizioni analoghe che si trovano immediatamente e che non stiamo neppure a sviluppare, tanto più che si trovano già, almeno in parte, nell'opera del Plücker (*). Notiamo anche come le ∞^3 rigate quadriche, formanti 2 sistemi distinti, contenute in Q, ed a cui dà origine una generazione del complesso quadratico, dànno il modo di costrurre geometricamente di una retta data il complesso polare rispetto ad una generazione; questo modo è dovuto allo Schur (**).

130. Se si considera una determinata generazione di Q, affinchè il complesso polare di una retta r rispetto a quella generazione sia speciale e quindi abbia per asse la retta polare r' di r ci vuole una condizione, cosicchè le rette r per cui si verifica tale proprietà e le loro polari r' formeranno due complessi che vogliamo studiare. Perciò notiamo che la relazione tra gli elementi r, r' della quadrica a 4 dimensioni R dello spazio lineare a 5 dimensioni S è questa che rispetto ad una quadrica data C pure a 4 dimensioni (corrispondente alla generazione considerata di Q) r ha per S'_4 polare l'S'_4 tangente in r' ad R. A questo fine basta evidentemente che r stia oltre che in R anche sulla quadrica R' polare di R rispetto a C, cioè nella quartica RR' che diremo K, ed allora r' sarà elemento di contatto di R con un S'_4 tangente ad R ed R'. Tutti questi elementi di contatto formano su R una quartica L omofocale alla quartica K (V. numeri 96, 99). Dunque:

Le rette r *dello spazio a cui corrispondono per complessi polari in una determinata generazione del complesso quadratico* Q *dei complessi lineari speciali di assi* r', *come pure questi assi stessi, costituiscono a loro volta due complessi quadratici* K, L, *i quali sono omofocali* (cioè godono l'uno rispetto all'altro di proprietà che presto vedremo).

Se poi varia quella generazione, cioè se C muta nel fascio CR di base Q, allora muta la polare R' di R rispetto a C e quindi mutano quei due complessi quadratici K, L. Ma non mutano gli elementi comuni a K e Q, giacchè questi elementi godono della proprietà di essere elementi singolari (come vedemmo al n° 94) per la quartica Q (come posta su R). Noi diremo *rette singolari* di un complesso quadratico ciò che diventano per questo gli elementi che definimmo come *singolari* per una quartica qualunque. Ciò posto avremo:

(*) V. Plücker. *Neue Geometrie des Raumes*, pag. 306.

(**) V. Schur, loc. cit., pag. 36 e seg.

Variando la generazione considerata del complesso quadratico Q varia pure il complesso K considerato, ma descrivendo un fascio, cioè passando sempre per una congruenza di 4° grado, che costituisce l'insieme delle rette singolari di Q.

Dalla definizione data al n° 94 degli elementi singolari di una quartica qualunque risulta che una retta singolare di Q è caratterizzata dall'avere una congruenza lineare tangente non semplicemente speciale, ma doppiamente specializzata, cioè scissa in un piano ed un punto uniti, cioè dall'avere tutti i complessi polari speciali cogli assi formanti il fascio di rette che è comune a quel piano ed a quel punto. Questo fascio dicesi di *rette corrispondenti* a quella retta singolare (*), e quel piano e quel punto si dicono *singolari* rispetto al complesso quadratico Q. — Ciò posto, risulta di nuovo evidente che gli ∞^1 complessi quadratici K, che corrispondono alle ∞^1 generazioni di Q, devono formare un fascio avente per base la congruenza delle rette singolari di Q, perocchè una retta r comune a due di quei complessi quadratici ha rispetto a due diverse generazioni di Q per complessi polari dei complessi lineari speciali, e quindi ha complessi polari speciali rispetto a tutte le generazioni, sicchè appartiene a tutti quegli ∞^1 complessi quadratici ed è retta singolare di Q.

131. La considerazione dei due complessi omofocali K ed L per ciascuna generazione del complesso quadratico Q è molto importante (**). Essa intanto ci ha già dato il significato geometrico di quel fascio di complessi quadratici che si vedono comparire quando si cercano le rette singolari di Q. Ma ci condurrà ancora ad altri risultati. Se consideriamo una generazione determinata di Q, p. e. quella che corrisponde alla quadrica C, allora risulta dalla teoria della polarità rispetto ad una quadrica sola C che ad un S'_1 od S'_2 contenuti in R corrispondono come polari rispetto à C un sistema lineare semplicemente o doppiamente infinito di S'_4 tangenti ad R' (quadrica polare di R rispetto a C): i loro elementi di contatto con questa formano pure un S'_1 od un S'_2 contenuto in R', i quali tagliano R in 2 elementi ovvero in un S^2_1 facienti parte di $R'R$, cioè di K. E ai due diversi sistemi di S'_2 contenuti in R corrispondono per tal modo due sistemi di S_1^2 contenuti in K. Notiamo inoltre che agli elementi di un S'_2 di R' corrispondono come S'_4 polari rispetto a C gli S'_4 tangenti a R negli elementi di un S'_2 contenuto in questo, e se i primi furono presi su RR', cioè su un S^2_1 di K, questi ultimi staranno in un S^2_1 di L. In somma, dal fatto che L è la quartica di contatto di R colla sviluppabile degli S'_4 tangenti comuni di R e R', segue che essa si può determinare come intersezione di R colla quadrica polare di R' rispetto ad R, mentre K è appunto l'intersezione di R' con R. Ciò posto, usando i termini della geometria della retta, abbiamo le seguenti proposizioni:

In una data generazione di Q i complessi lineari polari delle rette di un fascio f formano pure un fascio proiettivo a quello ed avente per direttrici due rette r'_1, r'_2 *del complesso* L, *polari delle due rette* r_1, r_2 *di quel fascio* f, *le*

(*) V. Klein. *Zur Theorie der Complexe ersten und zweiten Grades*, n° 25.
(**) Essa è dovuta allo Schur. Loc. cit., pag. 40.

quali appartengono al complesso K. *Ma vi sono anche in* f *due rette* p'_1, p'_2 *di* L, *le quali sono polari di due certe rette* p_1, p_2 *di* K, *che si appoggiano ad* r'_1, r'_2.

Nella stessa generazione di Q *i complessi polari delle rette di un punto o di un piano formano una stella di complessi lineari aventi comune una rigata quadrica, che diremo collo Schur* rigata polare *del punto o del piano rispetto a quella generazione di* Q. *Le rette di questa rigata appartengono al complesso* K *ed hanno per rette polari quelle rette del complesso* L, *che stanno in quel punto od in quel piano (formandovi un cono quadrico od una conica). Le rette della rigata coniugata a quella appartengono al complesso* L *e sono le polari delle rette di* K *che stanno in quel punto od in quel piano (formandovi pure un cono quadrico od una conica).*

Variando il punto od il piano nello spazio, le rigate polari dei punti e le rigate polari dei piani dello spazio formeranno i due sistemi diversi di ∞^3 *rigate di una generazione del complesso quadratico* K, *mentre le rigate coniugate a quelle formeranno i due sistemi di rigate di una generazione del complesso quadratico* L, *che già notammo esser omofocale a quello.*

132. Cambiando poi la generazione considerata di Q mutano pure i complessi K ed L e le rigate polari dei punti e dei piani dello spazio. Quanto a queste rigate notiamo che dal risultato generale del n° 53 segue che il luogo degli S'_2 polari di un S'_2 qualunque di R rispetto alle ∞' quadriche a 4 dimensioni del fascio RC è un S^3_3 che passa per quel S'_2 e quindi taglia ancora R in un $S_2^{(3,2)}$. Dunque:

Le rigate quadriche polari di un piano (o di un punto) rispetto alle diverse generazioni di un complesso quadratico, ossia le rette le cui polari rispetto a questo complesso stanno in quel piano (od in quel punto) formano un sistema di rette di 3° *ordine e* 2ª *classe (o* 3ª *classe e* 2° *ordine). Le rigate coniugate a quelle, cioè le rette polari delle rette di quel piano (o punto) formano pure un sistema di rette di* 3° *ordine e* 2ª *classe (o* 3ª *classe e* 2° *ordine)* (*).

Quanto alla 2ª parte di quest'enunciato essa è conseguenza evidente della 1ª parte, e del resto si potrebbe dimostrare direttamente collo stesso metodo semplicissimo usato per questa. E collo stesso metodo ancora si dimostrano le seguenti proposizioni:

Le rette polari di un dato fascio di rette rispetto ad un complesso quadratico formano una rigata di 3° *grado, e così pure le rette che hanno per polari le rette del fascio dato* (**). *Aggiungiamo poi che la prima rigata di* 3° *grado delle polari del fascio dato di rette è costituita dalle direttrici (non poste nel fascio stesso) delle* ∞' *congruenze lineari polari delle rette di questo fascio rispetto al complesso, congruenze che costituiscono pure un complesso quadratico contenente anche tutte*

(*) Queste proposizioni, insieme con altre notevoli, son dovute al Bertini (« *Sui complessi di 2° grado* ». Giornale di matematiche, 1879, vol. 17. — V. ni 4 e 6).

(**) V. Bertini, *ibid.*, ni 3 e 5, dove gli enunciati differiscono solo apparentemente da questi.

le rette del piano e quelle del punto in cui sta quel fascio (complesso avente, per quanto vedremo più tardi, la caratteristica $[(11)22]$, e la superficie singolare composta di quella superficie rigata, di quel piano e di quel punto). *Ogni retta di quel complesso quadratico gode della proprietà che la sua congruenza polare rispetto al dato contiene una retta di quel fascio, cioè che essa e la sua retta polare tagliano una stessa retta di questo.* Ecc., ecc.

133. Proponiamoci questa questione: Data una retta r, è individuata la retta polare r' rispetto ad un dato complesso quadratico Q; viceversa, se è data r' quante sono le rette r di cui essa è polare? Nello spazio S a 5 dimensioni abbiamo dunque l'S'_4 tangente nell'elemento r' ad R e vogliamo cercare un altro elemento r di R tale che abbia quel S'_4 per polare rispetto ad una quadrica del fascio avente la quartica Q per base. Ora i poli di quel S'_4 rispetto a questo fascio di quadriche formano (V. n° 55, dove si pone $n=6$) un $S^5{}_1$, che taglierà R, oltre che in r', in altri 9 elementi. Dunque:

Ogni retta dello spazio è in generale polare di altre 9 *rette rispetto ad un dato complesso quadratico.*

134. Notiamo ancora, riguardo alle rette polari, che una retta del complesso Q ha se stessa per polare rispetto a questo; cerchiamo se vi è una retta r non appartenente al complesso, ma ancora tale che la sua polare r' abbia la stessa retta r per polare. Nello spazio S sulla quadrica R a 4 dimensioni si tratterà di trovare due elementi r, r', tali che gli S'_4 tangenti in r, r' ad R siano polari risp. di r' ed r rispetto a due quadriche del fascio passante per Q, e quindi che per l'S'_3 di loro intersezione passino gli S'_4 polari sia di r, sia di r' rispetto a *tutte* le quadriche del fascio, ed in particolare gli S'_4 polari di r e di r' rispetto ad ognuna delle quadriche specializzate del fascio stesso. Ora o questa quadrica specializzata è tale che gli S'_4 polari di r e di r' rispetto ad essa sono distinti, ed in tal caso il suo elemento doppio (o la sua serie di elementi doppi) dovrà stare su entrambi quegli S'_4 polari e quindi anche sul S'_3 in cui essi si tagliano; oppure essa è tale che quei due S'_4 polari rispetto ad essa coincidono, ma perciò dovrà l'S'_1 che congiunge r ed r' contenere un elemento doppio della quadrica stessa. D'altronde nel caso generale in cui Q ha la caratteristica $[111\,111]$, cioè in cui vi sono nel fascio 6 quadriche distinte semplicemente specializzate, quel S'_1 non può contenere che gli elementi doppi di due di queste, e deve contenerne due, poichè l'S'_3 polare deve passare pei rimanenti ed è individuato dal passare per 4 tali elementi; è poi chiaro che queste condizioni sono sufficienti, cioè che ogni S'_1, il quale congiunga 2 dei 6 elementi doppi delle 6 quadriche specializzate taglia R in due elementi r, r' soddisfacienti alla questione. Dunque:

Le $\binom{6}{2}=15$ *congruenze lineari di* 6 *complessi fondamentali di un complesso quadratico generale presi a due a due sono le sole congruenze non speciali che siano polari rispetto a quello di entrambe le direttrici; vale a dire le loro* 15

coppie di direttrici sono le sole coppie di rette in ciascuna delle quali ognuna delle due rette sia polare dell'altra rispetto al complesso quadratico (*).

La dimostrazione data mostra anche come vada modificato il teorema quando il complesso quadratico non sia più generale. Così pel complesso quadratico $[(11)1111]$ le rette che sono reciprocamente polari rispetto ad esso sono oltre le $\binom{4}{2} = 6$ coppie di direttrici delle congruenze dei 4 complessi lineari fondamentali isolati presi due a due, tutte le rette di 4 rigate quadriche, le rigate comuni a tre di quei 4 complessi. E così pel complesso quadratico $[(111)111]$ vi sono le 3 coppie di direttrici delle congruenze dai 3 complessi fondamentali isolati e poi tutte le rette delle congruenze stesse. Ecc., ecc.

135. Ritornando alle varie generazioni del complesso quadratico Q ed ai corrispondenti complessi quadratici K ed L, passiamo a considerare le generazioni speciali che corrispondono a quadriche a 4 dimensioni specializzate C. Quando C sia semplicemente specializzata, e quindi coincidano per essa i due sistemi di S'_2, notiamo che K è il luogo degli elementi di R, i cui S'_4 polari rispetto a C toccano R, mentre L è il luogo degli elementi di contatto; quindi la considerazione del S'_4 polare dell'elemento doppio di C rispetto ad R mostra che L si riduce all'intersezione, contata due volte, di quel S'_4 con R, mentre K si ha costruendo su quel S'_4 la quadrica a 3 dimensioni polare di L rispetto all'intersezione del S'_4 con C e proiettandola poi dall'elemento doppio di C, con che si ottiene pure una quadrica semplicemente specializzata avente questo elemento come doppio e tagliante R secondo K. Dunque: Una generazione specializzata di Q (V. n° 126) gode della proprietà che il complesso quadratico K delle rette, che hanno per complessi polari rispetto ad essa dei complessi lineari speciali è tale che gli assi di questi, cioè le polari delle rette di K rispetto a Q sono le rette del complesso lineare L fondamentale di Q e corrispondente a quella generazione. Questo complesso è pure fondamentale per K (come del resto tutti i complessi fondamentali di Q); un punto e un piano che si corrispondano rispetto ad esso hanno la stessa rigata polare rispetto alla generazione considerata di Q, rigata che, muovendosi quel punto o quel piano viene a formare il complesso K, anzi la generazione specializzata di K, che corrisponde al complesso fondamentale L. Ogni retta di L è polare rispetto a Q di due rette di K, rette che si corrispondono rispetto ad L; cosicchè il complesso quadratico K è rappresentato sul complesso lineare L con una corrispondenza (2, 1). E siccome risulta evidente che K è un complesso quadratico generale, così si vede che va risposto affermativamente alla domanda che lo Schur fa e lascia sospesa a questo proposito (**).

(*) Questo teorema è dovuto al Klein (loc. cit., n° 23), e si trova dimostrato geometricamente nella memoria del Bertini al n° 12, con una dimostrazione notevole, anche perchè conduce ad altre proposizioni, ma che però non presenta il vantaggio, che ha la nostra, di far uso esclusivo della geometria della retta.

(**) V. Schur, loc. cit., pag. 46 e nota ultima.

§. 6.

Rette singolari di un complesso quadratico. Complessi omofocali. Superficie singolare. Invarianti assoluti.

136. Abbiamo già definito nel § precedente che cosa s'intenda per una retta *singolare* e per fascio delle sue rette *corrispondenti*. Ciò posto dalla data definizione (V. n° 130) e dalle cose esposte in generale ai n[i] 92, 94 e seg. sui punti singolari di una quartica qualunque risultano immediatamente tutte le proposizioni seguenti:

Una retta singolare r del complesso quadratico Q ha per complessi polari rispetto a questo un fascio di complessi speciali, i cui assi formano un fascio colla retta stessa, il fascio delle rette corrispondenti a quella retta singolare. Questo fascio è contenuto in un piano ed in un punto che diconsi *singolari* rispetto al complesso e godono della proprietà che la conica ed il cono di rette del complesso, che giacciono rispettivamente in essi, si scindono in due coppie di fasci, venendo ad avere r come retta doppia (V. n° 96). Viceversa ogni punto od ogni piano, per cui le rette del complesso che vi giacciono formano due fasci di rette, è singolare rispetto al complesso, cioè la retta comune a quei due fasci è retta singolare del complesso ed ha quel punto, o quel piano per punto o piano singolare corrispondente. Ogni retta singolare r è dunque contenuta in 3 piani π, α, β ed in 3 punti P, A, B in modo che il fascio delle sue rette corrispondenti è il fascio comune a P e π, e che nel piano π le rette del complesso formano due fasci contenuti nei punti A e B, e nel punto P le rette del complesso formano due fasci contenuti nei piani α e β. Da quanto dicemmo segue che P e π sono punto e piano singolari corrispondenti ad r e che anche i punti A, B ed i piani α, β sono singolari, ma corrispondenti a rette singolari del complesso diverse da r in generale.

Le rette singolari di un complesso quadratico qualunque formano in generale una congruenza di 4° grado, e noi non solo ne conosciamo le equazioni più generali (V. n° 94), ma abbiamo anche visto nel § precedente (n° 130) quale sia il significato geometrico del fascio di complessi quadratici passanti per quella congruenza.

137. Diremo *retta singolare di* 2° *ordine* di un complesso quadratico (V. n° 95) una retta singolare tale che il fascio delle sue rette corrispondenti si componga di rette appartenenti al complesso stesso, e *retta singolare di* 3° *ordine* una retta singolare le cui rette corrispondenti siano pure singolari (di 1° ordine). *Un complesso quadratico ha nel caso più generale per rette singolari di* 2° *ordine le generatrici di una rigata di grado* 16*; ed ha pure in generale* 32 *rette singolari di* 3° *ordine appartenenti naturalmente a quella rigata.* Questi numeri risultano dal fatto che le equazioni, le quali determinano queste rette singolari di 2° e 3° ordine, equazioni da noi date sotto la forma più generale (V. n° 95) sono quadratiche ed in numero rispettivamente di 4 e di 5 (*).

(*) Il Klein (loc. cit., n° 25) considerò pure sotto altro nome queste due specie di rette singolari

138. Noi abbiamo già visto che il complesso quadratico contiene ∞^4 rigate quadriche, come caso particolare del numero degli S_1^2 contenuti in una quartica qualunque. Similmente come caso particolare dei risultati del n° 60 abbiamo che il complesso quadratico contiene $\infty^2 S_1'$, cioè fasci di rette. I punti ed i piani in cui questi fasci son contenuti sono appunto i punti ed i piani singolari già considerati. Questi punti e questi piani essendo in numero doppiamente infinito formano dunque ciò che nella geometria ordinaria si chiama rispettivamente superficie-luogo e superficie-inviluppo, cosicchè al complesso quadratico corrisponde una superficie dei punti singolari ed una superficie dei piani singolari. Vedremo presto la relazione intima in cui stanno.

139. Nello spazio S lineare a 5 dimensioni una schiera di quadriche che comprenda R taglia questa secondo un sistema di quartiche, che dicemmo omofocali (V. n° 96). Diremo dunque *complessi quadratici omofocali* i complessi di rette da esse costituiti; e dai risultati generali ivi trovati avremo immediatamente i teoremi seguenti:

Una serie di complessi quadratici omofocali si compone di complessi tali che una retta singolare dell'uno ha per rette corrispondenti rette singolari degli altri, cosicchè vi è un complesso di rette di grado 12 (un $S_{n-3}^{8(n-3)}$ per $n=6$, cioè un S_3^{24}. — V. n° 92) composto di ∞^2 fasci che sono di rette corrispondenti a rette singolari per ogni complesso quadratico della serie, sicchè quel complesso di rette comprende tutte le congruenze di rette singolari dei complessi quadratici della serie. In ogni suo fascio ogni retta è singolare per uno di questi complessi e così le rette di tutti i fasci vengono a corrispondere proiettivamente tra loro ed ai complessi quadratici di cui sono rette singolari. I punti ed i piani di quei fasci sono punti e piani singolari per tutta la serie omofocale, sicchè questa si compone di complessi aventi comuni le superficie dei punti e dei piani singolari (*).

Nella schiera delle quadriche, che colle intersezioni con R determinano un sistema di quartiche omofocali ve ne sono in generale, come vedemmo, di quelle specializzate (1, 2, ovvero 3 volte) come inviluppi ed i loro nuclei tagliano R in quartiche (a 2, 1, ovvero 0 dimensioni), che indistintamente chiamammo (n° 101) *focali* per quel sistema di quartiche. Una quadrica semplicemente specializzata determina su R una quartica, che si riduce ad un R_3^2 doppio, contenente l'R_2^4 focale; ma una quadrica specializzata più d'una volta passa, come luogo, per ogni elemento dello spazio S, e quindi la quartica corrispondente svanisce, e solo rimane a rappresentarla una focale. Esprimendoci dunque colla geometria della retta abbiamo:

---

d'ordine superiore e ne diede pure le equazioni, ma solo pel caso da lui considerato in quel lavoro, in cui cioè il complesso quadratico ha 6 complessi fondamentali isolati, i quali si assumono per riferimento; allora le equazioni prendono la forma semplicissima, che noi pure abbiamo dato da un punto di vista più generale alla fine del n° 95.

(*) Non viceversa tutti i complessi quadratici aventi comuni i punti ed i piani singolari formano sempre una serie omofocale. Ciò è solo vero nel caso generale ed in molti casi particolari; non però in tutti, come si vedrà nel seguito. Soltanto quelle che io chiamo *focali* della serie definiscono questa in modo completo, ma esse non sono sempre definite dalla superficie dei punti e piani singolari. Questa osservazione importante, pare non fosse stata fatta finora.

Tutti i complessi quadratici (propriamente detti) di una serie omofocale hanno la stessa caratteristica, ed hanno pure comuni tutti gl' invarianti assoluti meno uno, cioè gl' invarianti assoluti del gruppo composto dei complessi quadratici specializzati *della serie. Questi complessi quadratici specializzati corrispondono ai gruppi caratteristici di quella caratteristica e sono tante volte specializzati quanti sono gli indici di quei gruppi. Un complesso quadratico semplicemente specializzato è costituito, come luogo di rette, dal complesso lineare fondamentale, contato due volte, che corrisponde a quel gruppo caratteristico. In questo complesso lineare vi è allora una congruenza quadratica* focale *per la serie omofocale di complessi quadratici; le rette di quella congruenza fungono da rette singolari per quel complesso quadratico speciale, sì che in ogni fascio di rette singolari vi è sempre una retta di quella congruenza quadratica. Invece un complesso quadratico specializzato più d'una volta della serie omofocale comprende, come luogo, tutte le rette dello spazio, ed è solo più rappresentato da una* focale *(rigata biquadratica, oppure quaterna di generatrici di una rigata quadrica), le cui rette fungono ancora come rette singolari per quel complesso quadratico, sì che vi è sempre una di esse in ciascun fascio di rette singolari della serie omofocale. Più precisamente ad un gruppo caratteristico contenente* 2 *o* 3 *indici (non occorre considerare il caso di* 4 *o più indici, poichè allora, e solo allora, ogni complesso quadratico della serie si scinde in due complessi lineari) corrisponde, come sappiamo, un sistema lineare semplicemente o doppiamente infinito di complessi lineari, che sono fondamentali per tutta la serie di complessi quadratici omofocali; le loro rette comuni formano rispettivamente una congruenza lineare od una rigata quadrica (generali o speciali), nella quale vi è rispettivamente una rigata biquadratica* focale *od una quaterna di rette* focale, *tali che ognuno degli* ∞^2 *fasci di rette singolari della serie omofocale contiene una retta di quella rigata biquadratica o di quella quaterna di rette.*

Ogni congruenza quadratica, rigata biquadratica o quaterna di rette (di una rigata quadrica), che così corrisponde come focale *ad un gruppo caratteristico composto di* 1, 2 *o* 3 *indici, si compone dunque di rette tali che ognuno degli* ∞^2 *fasci di rette singolari ne contiene una. Ma dalle cose viste ai* n[i] 85 *e* 101 *sui punti doppi dalle varie specie di una sviluppabile di* 4ª *classe segue che viceversa ogni retta di una congruenza quadratica focale sta in generale su due di quei fasci, ogni retta di una rigata biquadratica focale su* ∞^1 *fasci, formanti una congruenza lineare speciale avente quella retta per direttrice, e finalmente ogni retta di una quaterna focale sta su* ∞^2 *fasci di rette singolari formanti un complesso lineare speciale avente quella retta per asse. In questi ultimi due casi se nei fasci si prendono precisamente quelle rette che sono singolari per un determinato complesso della serie, le rette singolari di questo appoggiate su una retta di una rigata biquadratica focale formeranno una rigata quadrica e le rette singolari appoggiate su una retta di una quaterna focale formeranno una congruenza lineare.*

Una schiera di quadriche, che comprende una data quadrica R, è perfettamente determinata quando oltre a questa sia data un'altra quadrica, comunque questa sia specializzata come inviluppo. Dunque:

Esiste sempre una ed una sola serie di complessi quadratici omofocali avente una data congruenza quadratica focale, od una data rigata biquadratica focale od ancora una data quaterna focale (di rette d'una rigata quadrica), qualunque sia questa focale data.

Questi risultati hanno un'importanza capitale pel problema, di cui ci occuperemo poi della classificazione dei complessi quadratici. Aggiungiamo che da una proposizione del n° 102 segue che:

Per una retta qualunque dello spazio passano in generale 4 complessi quadratici di una serie omofocale, ma quando tra essi ve ne siano di quelli specializzati più di una volta, ai quali perciò corrisponda un gruppo caratteristico contenente più di un indice, cioè $(e\ e'\ e'' \dots)$, *allora un tale complesso fisso conta* $e' + e'' + \dots$ *volte tra i complessi quadratici passanti per la retta stessa, sicchè il numero dei complessi mobili passanti per una retta qualunque dello spazio è diminuito di altrettanto* (*).

140. Da un complesso quadratico qualunque si possono ottenere tutti i complessi quadratici omofocali in un modo assai semplice. Ricordiamo in fatti che nello spazio lineare S a 5 dimensioni due quadriche polari reciproche rispetto ad R determinano su R due quartiche omofocali, cosicchè, se si tien fissa l'una di queste quartiche, variando però la quadrica passante per essa che la determina, la quadrica polare di quella rispetto ad R descriverà una schiera di quadriche, che tagliano R secondo la serie di quartiche omofocali a quella fissa. Notando inoltre che due quadriche polari rispetto ad R hanno pure i due sistemi di S_1^2 dell'una polari dei due sistemi di S_1^2 dell'altra, abbiamo il seguente teorema (di cui un caso s'era già incontrato al n° 130):

Dato un complesso quadratico qualunque, se si prendono dei due sistemi distinti di ∞^3 *rigate quadriche di una sua generazione le rigate quadriche coniugate (poste cioè sulle stesse superficie ordinarie di 2° grado), queste formeranno i due sistemi di* ∞^3 *rigate quadriche di una stessa generazione di un altro complesso quadratico omofocale a quello; cosicchè variando la generazione considerata di quello si ottiene tutta la serie dei suoi complessi quadratici omofocali. In particolare le generazioni speciali del dato complesso dànno luogo ai complessi fondamentali doppi* (**).

141. Si vede in questo modo come ad ogni generazione di un complesso quadratico Q corrisponda in un certo senso un altro complesso quadratico della serie omofocale in modo che anche questo ha una generazione (coniugata in un certo senso

---

(*) Pei complessi quadratici omofocali vale una proprietà analoga a quella di un sistema di quadriche omofocali dello spazio ordinario di tagliarsi ortogonalmente. I complessi omofocali formano cioè quello che il Klein chiama « *Involutionssystem* ». Questo risulterebbe subito dal teorema generale da noi dato al n° 83, ma non vi ci fermiamo, poichè quella proprietà fu già svolta completamente dal Klein stesso (*Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. An., V, S. 260, 271).

(**) V. Schur, loc. cit., pag. 48.

a quella considerata di Q), a cui corrisponde il complesso quadratico Q. Così le varie generazioni di Q corrispondono proiettivamente ai complessi quadratici omofocali di Q; in particolare alla generazione di Q composta di coni e coniche corrisponde lo stesso complesso Q (V. n° 99). Prendendo di una retta r il fascio di complessi polari rispetto a Q, sappiamo che essi corrispondono proiettivamente alle varie generazioni di Q: dunque corrisponderanno pure proiettivamente alla serie dei complessi omofocali di Q ed in particolare il complesso polare speciale che ha r per asse corrisponderà a Q. Quindi gli ∞^5 fasci di complessi lineari polari delle ∞^4 rette dello spazio rispetto agli ∞' complessi quadratici di una serie omofocale hanno i loro elementi che si corrispondono proiettivamente tra loro ed a questi complessi quadratici. In particolare quei complessi polari che corrispondono alle generazioni speciali di questi non sono altro che i complessi di quei fasci involutori al complesso fondamentale od al sistema lineare di complessi fondamentali, che corrisponde a quelle generazioni speciali: essi formano in quei fasci dei gruppi tutti proiettivi tra loro, e gl' invarianti assoluti di uno qualunque di questi gruppi sono (V. n° 102 e 107) gl' invarianti assoluti della serie omofocale di complessi quadratici considerata complessivamente, mentre gl' invarianti assoluti di uno particolare di quei complessi quadratici sono gl' invarianti assoluti del gruppo stesso a cui si aggiunga quel complesso lineare polare che corrisponde a quel complesso quadratico particolare. Tra i vari fasci di complessi polari considerati vi sono gli ∞^2 fasci polari di rette singolari dei dati complessi quadratici. Come caso particolare noi possiamo dunque enunciare il seguente teorema, che pure è generalissimo, e la cui importanza è evidente:

Gl' invarianti assoluti di un complesso quadratico *di data caratteristica si ottengono come segue: Prendasi di una retta arbitraria r dello spazio il fascio dei complessi polari rispetto al complesso quadratico: questo fascio conterrà un complesso involutorio a tutta la serie di complessi lineari fondamentali che corrisponde ad un gruppo caratteristico qualunque contenuto nella caratteristica data, e si hanno così nel fascio altrettanti complessi lineari* $c_1, c_2, \ldots c_g$ *quanti sono i gruppi caratteristici stessi. Orbene il gruppo di* $g+1$ *elementi composto del complesso lineare speciale di asse r e di* $c_1, c_2, \ldots c_g$ *in quel fascio rimane proiettivo a se stesso movendo r nello spazio, ed ha per invarianti assoluti, precisamente gl' invarianti assoluti del complesso quadratico, sicchè questi sono espressi da* $g-2$ *rapporti anarmonici indipendenti di quei* $g+1$ *elementi. Se poi si vogliono gl'* invarianti assoluti della serie omofocale *di complessi quadratici, basterà togliere l'elemento r da quel gruppo, sicchè si avranno solo più i g elementi* $c_1, c_2, \ldots c_g$, *i cui* $g-3$ *invarianti assoluti saranno quelli cercati. Quindi se delle rette r dello spazio si prendono i fasci di complessi polari rispetto a qualunque dei complessi quadratici della serie omofocale data, sempre i gruppi composti dei g complessi lineari del fascio* $c_1, c_2, \ldots c_g$ *ottenuti nel modo detto saranno tra loro proiettivi.*

In particolare i fasci di rette singolari dei complessi omofocali, i quali già sapevamo corrispondere colle loro rette proiettivamente a questi, contengono g rette appartenenti a congruenze quadratiche, o rigate biquadratiche, o quaterne di rette focali *per la serie omofocale: i gruppi di queste g rette corrispondono proiettiva-*

mente ai gruppi di g elementi testè considerati, e possono servire come quelli a dare gl' invarianti assoluti della serie omofocale; se poi vi si aggiungono le rette singolari di un determinato complesso di questa serie si avranno gruppi di $g+1$ *rette, i cui invarianti assoluti saranno quelli di questo complesso.*

Il numero degli invarianti assoluti della serie omofocale di complessi quadratici avente una data caratteristica è dunque uguale al numero dei gruppi caratteristici che compaiono in questa diminuito di 3, e quello degli invarianti assoluti di un complesso quadratico della serie è superiore a questo di un' unità. Così il complesso quadratico più generale, cioè di caratteristica [1 1 1 1 1 1], *ha 4 invarianti assoluti (e la sua serie omofocale ne ha 3); tutti quelli, che hanno altra caratteristica, ne hanno un numero inferiore, che sapremo subito riconoscere dalla caratteristica stessa* (*).

Occorre ancora che notiamo, a proposito degl' *invarianti assoluti*, che questi sono qui usati appunto nel loro senso ordinario; vale a dire se due enti geometrici della stessa specie (nel nostro caso « stessa caratteristica ») hanno gli stessi invarianti assoluti, si possono trasformare l'uno nell'altro con una trasformazione proiettiva dello spazio di *punti* (o piani). Che questo sia il senso che si deve attribuire a quell'espressione nei nostri teoremi risulta dalla proposizione dimostrata al n° 107, in virtù della quale ogni trasformazione proiettiva dello spazio lineare a 5 dimensioni, che trasforma la quadrica R delle rette in se stessa, equivale ad una trasformazione proiettiva (collineare o reciproca) dello spazio lineare a 3 dimensioni di punti o di piani.

142. Veniamo ora a considerare più minutamente la superficie dei punti e dei piani singolari, sempre, ben inteso, dal punto di vista della pura geometria della retta. Consideriamo una retta qualunque r dello spazio: per essa passerà almeno un complesso quadratico di una data serie omofocale e sia Q. Noi vogliamo cercare quanti punti e quanti piani singolari della serie omofocale, e quindi anche di Q, passano per r e trovare anche una relazione importante che li lega. Nello spazio S a 5 dimensioni, sulla quadrica R, è dunque data una quartica Q, su cui un elemento r. L' S_3' tangente in r a Q taglia R e tutte le altre quadriche del fascio avente Q per base in un fascio di S_2^2 aventi in r un elemento doppio (coni quadrici in uno spazio ordinario S'_3, aventi comune il vertice r e formanti fascio): l' intersezione di questi S_2^2 si compone dunque in generale di 4 S_1' passanti per r e costituenti l'intersezione di Q col S_3' che la tocca in r. Dunque, nel linguaggio ordinario potremo dire:

La congruenza lineare speciale tangente in una data retta r ad un complesso quadratico ha comuni in generale con questo 4 fasci di rette, i quali appartengono alla congruenza e quindi passano per r.

(*) Il Weiler, nella sua memoria già citata (pag. 203-204), ha pure un cenno degl' invarianti assoluti di un complesso quadratico; ma, senza darne il significato geometrico, parla della loro enumerazione come di cosa, se non difficile, almeno penosa a farsi; ed assegna il numero di questi invarianti assoluti soltanto per la sua 1ª forma canonica (dando numeri che concordano coi nostri). Noi vediamo invece come la caratteristica del complesso permetta di dire immediatamente il numero degl' invarianti assoluti corrispondenti e di più ne conosciamo il significato geometrico.

I 4 punti ed i 4 piani che contengono questi 4 fasci sono dunque 4 punti singolari e 4 piani singolari di Q (e quindi di tutta la serie omofocale) passanti per r, ed è pur chiaro dal ragionamento fatto che per r non può passare altro punto od altro piano singolare. Quindi, ricordando anche la proprietà della congruenza lineare speciale di direttrice r di far corrispondere proiettivamente tra loro i punti ed i piani passanti per r (V. n° 111), avremo:

Ogni retta dello spazio contiene in generale 4 punti e 4 piani singolari di una serie omofocale di complessi quadratici. Il gruppo di quei 4 punti è proiettivo al gruppo di quei 4 piani.

Questo importante teorema è dovuto al *Klein* (*).

Ricordando la definizione di retta singolare e supponendo che r sia tale pel complesso Q, vediamo facilmente dal ragionamento fatto in quella dimostrazione che in tal caso, senza che cessino di esservi 4 fasci di rette passanti per r e appartenenti a Q, due di essi sono venuti a stare nello stesso piano (il piano singolare corrispondente ad r) e gli altri due nello stesso punto (il punto singolare corrispondente ad r); perocchè l'S_3' tangente in r a Q toccherà R lungo un S_1' (quello degli elementi corrispondenti ad r) e quindi la taglierà in due S_2' di diverso sistema aventi comune quel S_1', e questi sono precisamente quel piano e quel punto aventi comune il fascio delle rette corrispondenti di r. Di qui segue che per una retta singolare due dei 4 punti singolari e due dei 4 piani singolari che passano per essa son venuti a coincidere nel punto singolare e nel piano singolare corrispondenti alla retta singolare stessa. Ciò vale per tutte le rette del complesso, di grado 12 in generale, che vedemmo esser costituito dalle ∞^1 congruenze di 4° grado delle rette singolari dei complessi quadratici della serie omofocale. Tutte queste rette sono dunque tangenti alla superficie dei punti singolari ed a quella dei piani singolari, ed è anche chiaro che esse comprendono tutte le tangenti dell'una o dell'altra di queste superficie. Dunque queste, avendo comuni le tangenti, formano nella geometria ordinaria una stessa superficie come luogo di punti e rispettivamente come inviluppo di piani. Esprimendoci col linguaggio ordinario noi così troviamo che:

I punti singolari ed i piani singolari di una serie omofocale di complessi quadratici formano una stessa superficie di 4° ordine e 4ª classe (e rango 12), le cui tangenti formano i fasci di rette singolari di quei complessi, e che gode della proprietà che i suoi quattro punti ed i suoi quattro piani passanti per una retta qualunque dello spazio hanno gli stessi rapporti anarmonici. Questa è nel caso più generale la così detta superficie di Kummer.

(*) Lo enunciò nella memoria citata (n° 14) e ne diede più tardi una dimostrazione elegante, ma notevolmente più complicata della nostra nella breve memoria « *Ueber die Plücker'sche Complexfläche* » (Math. Ann. Bd. VII, S. 208). — E qui voglio notare, senza entrare in particolari, che la dimostrazione, che sopra ne abbiamo dato, si applica, quasi senza mutamenti, al caso di un complesso di grado qualunque, cioè serve a dimostrare il seguente teorema: ogni retta r di un complesso algebrico qualunque è risp. retta d'inflesso e tangente cuspidale pei coni e curve del complesso che corrispondono a 4 suoi punti e a 4 suoi piani ed il rapporto anarmonico di quei punti è uguale a quello di quei piani; teorema che è dovuto al Voss (« *Ueber Complexe und Congruenzen* », Math. Ann. Bd. IX, pag. 63).

143. Il teorema di Klein si può anche dimostrare in quest'altro modo, che ci dà la intima ragione del teorema stesso. La retta r qualunque dello spazio contenga il punto singolare A della serie omofocale di complessi, e a questo punto corrisponda il piano singolare α. Il fascio $A\alpha$ si comporrà di rette, ciascuna delle quali è singolare per uno di quei complessi quadratici, e vi è corrispondenza proiettiva tra la serie di questi e quel fascio di rette. Vi sono, in generale, come sappiamo, 4 complessi della serie passanti per r, e questi hanno in quel fascio certe 4 rette come rette singolari. I quattro fasci che congiungono queste rette ad r appartengono rispettivamente a quei 4 complessi e quindi i 4 piani su cui stanno saranno 4 piani singolari della serie omofocale passanti per r. Viceversa ogni piano singolare passante per r taglia il piano α in una retta, che è singolare per un complesso della serie, il quale dovrà quindi necessariamente contenere r. Dunque conchiudiamo anzitutto che per ogni retta r passano 4 piani singolari della serie omofocale; e poi che questi 4 piani tagliano α secondo 4 rette (aventi con quei 4 piani lo stesso rapporto anarmonico) singolari pei quattro complessi quadratici della serie, che passano per r, ed hanno quindi, come queste, il loro rapporto anarmonico uguale a quello di questi 4 complessi della serie. Similmente su r vi sono quattro punti singolari ed il loro rapporto anarmonico è uguale a questo stesso. Dunque i quattro punti singolari ed i 4 piani singolari hanno lo stesso rapporto anarmonico: *Ogni retta è contenuta in generale in 4 punti e 4 piani singolari, sì che i rapporti anarmonici di quelli e di questi sono uguali al rapporto anarmonico dei quattro complessi della serie omofocale passanti per la retta stessa* (*).

144. La superficie che vedemmo essere nello stesso tempo luogo dei punti singolari ed inviluppo dei piani singolari della serie omofocale di complessi quadratici dicesi *superficie singolare* di questi complessi. Essa in un certo senso individua la serie omofocale (**) e ne è individuata, cosicchè gl'invarianti assoluti della serie stessa sono pure in generale i suoi e viceversa. Le rette singolari di ogni complesso della serie le sono tangenti; in particolare le rette di ogni congruenza quadratica focale le sono tangenti doppie, poichè appartengono a due fasci di rette singolari, cioè di tangenti della superficie. Nel caso più generale vi sono 6 tali congruenze quadratiche

(*) Questo completamento del teorema di Klein si trova in sostanza enunciato a pag. 66 della memoria del Voss « *Ueber Complexe und Congruenzen* » già citata: soltanto l'enunciato del Voss è più analitico. Noterò a questo proposito che, benchè in quest'ultima parte del mio lavoro non sia fatto alcun uso di equazioni, pure tutte quelle equazioni che importasse conoscere, intorno ai complessi quadratici p. es., si ottengono immediatamente come casi particolari di quelle date nelle prime parti. Così l'equazione più generale di una serie omofocale di complessi quadratici, che in tal modo si ha sotto una forma, che vale qualunque siano il sistema di riferimento e la specie di quei complessi quadratici.

(**) Questo non soffre eccezione alcuna se s'intende per *superficie singolare* il luogo dei centri (e l'inviluppo dei piani) dei fasci di rette singolari della serie omofocale, ma ne soffre se s'intende, come appunto si usa, il luogo di quei punti che sono *singolari* pel solo fatto dello scindersi il relativo cono del complesso in una coppia di fasci (V. la nota al nº 139). Si vedrà infatti che in tutti i casi in cui nella caratteristica dei complessi quadratici compare un gruppo caratteristico composto di 3 indici, allora la superficie singolare, intesa nel senso ordinario, si riduce ad una superficie ordinaria di 2º grado, mentre nel primo senso si riduce alla corrispondente quaterna focale di rette, e solo in questo senso essa individua la serie omofocale.

focali, composte di 6 sistemi distinti di tangenti doppie della superficie di Kummer; e risulta pure dalla teoria generale che viceversa ogni tangente doppia della superficie apparterrà ad una di quelle congruenze.

Se tra i gruppi caratteristici della caratteristica della serie omofocale ve n'è uno il quale contenga due indici, allora vedemmo che compare come focale una rigata biquadratica tale che ogni fascio di rette singolari, cioè di tangenti della superficie singolare contiene una retta di quella rigata (V. n° 139). Ne segue immediatamente che in tal caso questa rigata stessa costituisce coi suoi punti e suoi piani la superficie singolare.

Finalmente, se tra i gruppi caratteristici ve n'è uno che contiene tre indici, allora vedemmo pure che compare come focale una quaterna di rette di una rigata quadrica (le quali possono anche coincidere in vari casi, e, come vedremo, divengono infinite, cioè comprendono tutte le generatrici di quella rigata quadrica nel solo caso [(111) (111)]), i cui punti ed i cui piani saranno dunque i punti ed i piani singolari, sicchè la superficie singolare si potrebbe intendere ridotta a questa quaterna di rette, ma, per ragioni che vedremo, si usa ritenere invece per superficie singolare la superficie quadrica su cui sta quella quaterna. Però è chiaro che bisognerà dare questa quaterna di rette per individuare la serie omofocale di complessi quadratici e non basterà dare soltanto quella rigata quadrica che la contiene.

145. Ora siamo anche in grado di riconoscere meglio la natura delle rette singolari di 2° e 3° ordine, quali le definimmo al n° 137. Con un ragionamento basato sullo stesso metodo che quello usato al n° 142 per dimostrare il teorema di Klein si trova assai facilmente che:

La rigata (di grado 16 *in generale) delle rette singolari di* 2° *ordine di un complesso quadratico è composta di tangenti principali della superficie singolare* (cioè le rette singolari di 2° ordine sono tali che per ciascuna di esse due dei 4 fasci di rette del complesso passanti per essa son venuti a coincidere), e che:

Le (32 in generale) rette singolari di 3° ordine hanno la proprietà che per ciascuna di esse 3 dei 4 fasci di rette del complesso passanti per essa son venuti a coincidere in un fascio, di cui o il punto o il piano contiene due fasci coincidenti in quello di rette del complesso. Ora usasi chiamare *punto piano* o *piano doppio* di un complesso quadratico un punto od un piano, pel quale appunto le rette del complesso formino un fascio doppio. Dunque: *vi sono in generale* 16 *punti doppi e* 16 *piani doppi per un complesso quadratico.*

Si dimostra poi che ogni piano o punto doppio per un complesso quadratico è pur tale per la superficie singolare e per gli altri complessi della serie omofocale: solo varia insieme con questi il vertice del fascio sul piano doppio od il piano del fascio pel punto doppio, descrivendo il primo la conica di contatto del piano doppio colla superficie singolare, il secondo il cono osculatore nel punto doppio alla superficie stessa. Nello stesso tempo la retta singolare di 3° ordine si muove rimanendo sempre tangente a quella conica o giacente in quel cono. Queste proprietà si trovano già di-

mostrate in modo sintetico semplice nell'opera del Plücker (V. n[i] 312, 321), e perciò ci limitiamo ad enunciarle. Osserviamo ancora che ognuna delle coniche di contatto (16 in generale) della superficie singolare coi suoi piani doppi ed ognuno dei coni osculatori nei punti doppi di quella superficie vengono così a corrispondere nel modo detto, elemento per elemento, proiettivamente alla serie omofocale dei complessi quadratici; cosicchè si potrà talora, per avere gl'invarianti assoluti di tutta la serie o di un complesso determinato, considerare p. e. la punteggiata che corrisponde alla serie dei complessi su una di quelle coniche di contatto. Così nel caso [111111] in cui vi sono 6 complessi fondamentali isolati, e quindi 16 punti e 16 piani doppi per la superficie singolare, allora gl'invarianti assoluti di questa saranno dati dal gruppo dei 6 punti doppi che stanno sulla conica di contatto di un piano doppio.

146. Dalle proposizioni del n° 97 risulta che nel caso generale: L'insieme di tutte le rette che sono singolari di 1° ordine per complessi quadratici della serie omofocale sono quelle per cui coincidono due dei 4 complessi di questa che vi passano e sono, come sappiamo, le tangenti della superficie singolare; esse formano un (S_3^{24}, cioè un) complesso di rette di grado 12. Le rette singolari di 2° ordine di complessi della serie sono rette per cui coincidono 3 dei 4 complessi che vi passano e sono le tangenti principali (tripunte) della superficie singolare, le quali formeranno perciò (un S_2^{48}, cioè) una congruenza di grado 24 (Questo grado, come pure quello del complesso delle tangenti sono confermati dalle formule relative alla teoria ordinaria delle superficie). Finalmente le rette singolari di 3° ordine sono tutte le rette per cui coincidono tutti 4 i complessi della serie passanti per esse, e sono le tangenti alle coniche di contatto dei piani doppi colla superficie, e le generatrici dei coni osculatori nei suoi punti doppi; tutte queste rette devono in generale formare per la formula del n° 97 un S_1^{64}, cioè una rigata di grado 64, il che appunto accade, poichè si hanno 16 coni quadrici e 16 inviluppi piani di 2ª classe.

§ 7.

Congruenza quadratica: polarità, rette singolari e superficie focale. Congruenze quadratiche omofocali; loro curva singolare.

147. Nel § 4 noi ci siamo già occupati della congruenza quadratica, specialmente per quanto riguarda le 5 coppie di sistemi di ∞^1 rigate quadriche contenute in generale in una tal congruenza e la generazione di questa mediante fasci di congruenze lineari. Ora ci rimane a fare per le congruenze quadratiche (e per le rigate biquadratiche) le cose analoghe a quelle svolte negli ultimi due paragrafi sui complessi quadratici. Per questo basterà nei risultati generali delle prime due parti del presente lavoro considerare uno spazio lineare a 4 dimensioni (od a tre dimensioni) invece che a 5, e supporvi che in una quadrica fissa R_3 (od R_2) l'elemento si chiami *retta*, sicchè tali quadriche rappresenteranno rispettivamente un complesso lineare od una congruenza lineare di rette.

Rispetto ad una congruenza quadratica Γ contenuta in un complesso lineare c ogni retta r di questo avrà un fascio di congruenze lineari polari contenute in questo: ogni congruenza polare corrisponderà ad una generazione di Γ (*). La rigata quadrica di c, nella quale si taglieranno le congruenze lineari di quel fascio si dirà *rigata polare* di r rispetto a Γ. Tra quelle congruenze lineari due saranno speciali: l'una avente per direttrice r, l'altra avente una certa direttrice r' che si dirà *retta polare* di r, rispetto a Γ. Queste due rette r, r' sono quelle due uniche rette di c che in generale stanno sulla rigata quadrica coniugata alla rigata polare di r. Prendendo in ciascuno degli ∞' fasci di rette di c i quali passano per r la retta coniugata armonica di r rispetto a quelle due rette del fascio che appartengono alla congruenza quadratica Γ, e ∞' rette, che così si ottengono, costituiscono appunto la rigata polare di r.

Considerando la polarità rispetto ad una determinata delle generazioni di Γ si hanno immediatamente dalla teoria generale della polarità rispetto ad una quadrica dei teoremi analoghi ad altri noti sui complessi quadratici. Così, se due rette di c sono tali che la congruenza lineare polare della prima rispetto a quella generazione di Γ passi per la seconda retta, anche la congruenza lineare polare di questa passa per la prima. Se poi consideriamo un piano od un punto qualunque dello spazio, o meglio il fascio di rette del complesso lineare c che ogni tal punto o piano contiene, le congruenze polari di quelle rette formeranno un fascio, tagliandosi in una rigata quadrica, che si dirà la rigata *polare*, rispetto a quella generazione di Γ, del fascio considerato di c, oppure del punto o del piano, che contengono quel fascio. Le due rette della rigata quadrica coniugata a quella, le quali appartengono pure a c, saranno rispettivamente le direttrici di due congruenze lineari speciali del fascio, e saranno le rette polari di due certe rette di quel fascio di rette.

Di qui segue che per ogni generazione di Γ si potranno considerare due altre congruenze quadratiche K, L, che godranno di proprietà analoghe a quelle che nel § 5 riconoscemmo avere i due complessi quadratici, che indicammo pure con K, L. La congruenza quadratica K si comporrà delle rette di c, le cui congruenze lineari polari rispetto a quella generazione di Γ sono speciali, e gli assi di queste, cioè le rette polari di quelle rispetto a Γ formeranno l'altra congruenza quadratica L. Variando la generazione considerata di Γ varieranno quelle due congruenze quadratiche (restando sempre *omofocali* tra loro, in un senso che vedremo presto) e la K descriverà un fascio che comprende Γ, cioè passerà costantemente per una rigata di grado 8 contenuta in questa. Ogni retta r di questa rigata gode della proprietà che tutte le sue congruenze polari sono speciali con assi che formano un fascio di rette di c, fascio passante per r. Tale retta si dirà *singolare* per la congruenza quadratica.

148. Vedemmo che una retta qualunque r di c ha rispetto a Γ una rigata quadrica polare. Poniamo ora che r appartenga a Γ. Allora segue dalla costruzione

(*) Lo Schur (memoria citata, pag. 19) nello studio delle proprietà polari di una congruenza quadratica non considera che le 5 generazioni che corrispondono alle 5 coppie di sistemi di rigate quadriche contenute nel caso più generale nella congruenza. Ma la teoria riesce più completa se si considera la polarità rispetto a tutte le ∞' generazioni di questa. Così vi è anche il vantaggio che essa vale, comunque la congruenza si specializzi.

vista per la rigata polare, — od anche dal fatto che quella rigata, essendo l'intersezione S_1^2 di c, cioè R_3^2, col S_2' polare di r, si scinde in due S'_1 quando r venga a star su Γ, e quindi quel S'_2 divenga tangente in r ad R_3^2, — che la rigata polare di r si scinderà in due fasci di rette di c, ciascuno dei quali avrà la proprietà che le due rette di Γ che esso deve contenere coincidono in r. I punti ed i piani dello spazio che contengono tali fasci di c sogliono chiamarsi, seguendo *Kummer*, *fuochi* e *piani focali* di Γ. Dunque ogni retta di una congruenza quadratica appartiene a due fuochi ed a due piani focali di questa (*).

Consideriamo ancor più in particolare una *retta singolare* della congruenza quadratica. La definizione datane or ora, o quella equivalente data in generale per gli elementi singolari di una quartica a quante si vogliano dimensioni mostrano che per una tal retta r la rigata quadrica polare si specializza doppiamente, cioè i due fasci in cui essa si scindeva nel caso precedente vengono a coincidere in un fascio solo, che diremo di *rette corrispondenti* alla retta singolare r, per cui pure passa quel fascio. Dunque ogni retta singolare di una congruenza quadratica è caratterizzata dal fatto che per essa i due fuochi ed i due piani focali vengono a coincidere. Queste rette singolari formano in generale, come vedemmo, una rigata di grado 8.

Finalmente potremo chiamare *rette singolari di* 2° *ordine* (V. n° 95) della congruenza quadratica Γ quelle rette singolari, ciascuna delle quali ha per fascio di rette corrispondenti un fascio di rette della congruenza. Le equazioni generali del n° 95 possono servire a determinare la rigata delle rette singolari (di 1° ordine) e le rette singolari di 2° ordine di ogni congruenza quadratica di cui sia data l'equazione insieme con quella che caratterizza le rette, mediante 5 sole coordinate omogenee qualunque, capaci però, se soddisfano a quest'ultima equazione, di rappresentare ogni retta del complesso lineare contenente la congruenza che si considera. Esse mostrano che le rette singolari formano in generale, come già notammo, una rigata di grado 8; ma anche che le rette singolari di 2° ordine sono in generale 16 e quindi che altrettanti sono i fasci di rette contenuti nella congruenza quadratica.

149. Nel § precedente (V. n° 139) noi vedemmo come una serie omofocale di complessi quadratici abbia nel caso più generale ed in moltissimi dei casi particolari delle congruenze quadratiche focali (nel caso più generale in numero di 6), e vedemmo anche come viceversa *ogni congruenza quadratica, senza alcuna eccezione, è focale per una serie omofocale di complessi quadratici*. Questo teorema ha molta importanza, poichè mostra come lo studio e la classificazione delle superficie focali

(*) Questa proprietà, come dimostrò il KUMMER (« *Allgemeine Theorie der Strahlensysteme* » § 4, Crelle's Journal, Bd. 57, 1859), è generale e vale per sistemi di rette qualunque, anche trascendenti. Ora la nostra dimostrazione si estende senza difficoltà al caso più generale. In fatti, un sistema di rette non è altro che uno spazio a 2 dimensioni qualunque S_2 giacente sulla quadrica a 4 dimensioni delle rette R_4. Ora in ogni elemento r dello spazio a 2 dimensioni S_2, nelle cui vicinanze questo sia continuo, esiste un S'_2 lineare *tangente*, cioè che ne contiene gli elementi infinitamente vicini, e questo S'_2 essendo pure tangente per conseguenza ad R_4 la taglierà in due S'_1 che pure saranno tangenti a quel S_2 e passeranno per r. Ciò significa che ogni retta di un sistema di rette sta in due fasci, ciascuno dei quali contiene oltre a quella un'altra retta del sistema infinitamente vicina (e che la taglia).

delle congruenze quadratiche son compresi in quelli delle superficie singolari dei complessi quadratici (nè, ch'io sappia, era ancor stato dimostrato da alcuno). Ricordando inoltre quanto abbiamo visto, cioè che una congruenza focale di una serie omofocale di complessi quadratici si compone di tangenti doppie della superficie singolare comune a questi, risulta che:

Ogni congruenza quadratica determina come luogo dei suoi fuochi ed inviluppo dei suoi piani focali una stessa superficie, la quale è superficie singolare per una serie di complessi quadratici omofocali (aventi quella congruenza per una focale) ed è quindi in generale una superficie di 4° ordine e 4ª classe. Il complesso lineare cui appartiene quella congruenza è uno dei complessi fondamentali isolati di quella serie omofocale.

Per le rette singolari *della congruenza quadratica coincidono i due punti e i due piani di contatto colla superficie, sicchè tali rette sono tangenti quadripunte della superficie ed il punto ed il piano di contatto di ogni tal retta si corrispondono rispetto al complesso lineare considerato. Questa serie di tangenti quadripunte costituenti le rette singolari della congruenza quadratica forma in generale una rigata di grado 8.*

Finalmente le rette singolari di 2° ordine della congruenza quadratica sono tangenti quadripunte della superficie, le quali stanno in un piano doppio di questa e la toccano in un punto doppio: questo punto e quel piano sono quelli che contengono il fascio di rette della congruenza corrispondenti a quella retta singolare, cioè un fascio di tangenti doppie della superficie, dal che risulta appunto che essi sono un punto ed un piano doppio di questa. Poichè quelle rette singolari di 2° ordine sono in generale 16 si vede così di nuovo che la superficie considerata ha in generale 16 punti e 16 piani doppi. Il complesso lineare fondamentale che contiene la congruenza quadratica serve a far corrispondere tra loro questi punti e questi piani in modo da dare i 16 fasci di rette della congruenza.

Le tangenti quadripunte della superficie che sono rette singolari per la congruenza quadratica hanno per punti e per piani di contatto colla superficie stessa i punti ed i piani osculatori di una curva che diremo *curva singolare* della congruenza quadratica, e che gode della proprietà di avere per tangenti delle tangenti principali (non quadripunte) della superficie focale, ed inoltre di *appartenere* al complesso lineare c, cioè che ogni retta passante per un punto della curva stessa e giacente nel piano osculatore in quel punto appartiene a c. La congruenza, contenuta in c, composta di tutte queste rette è costituita dai fasci delle rette corrispondenti alle rette singolari di Γ.

La curva singolare relativa alla congruenza quadratica contiene i 16 punti doppi della superficie focale ed ha per piani osculatori in essi i 16 piani doppi, perocchè vedemmo che tra i fasci di rette corrispondenti a rette singolari della congruenza vi sono appunto i 16 fasci di rette che questa contiene.

150. Dalle cose dette in generale nel § 6 della 2ª Parte intorno alle quartiche omofocali su una quadrica a più dimensioni ricaviamo come proprietà analoghe a quelle viste nel § precedente intorno alla serie di complessi quadratici omofocali:

Una serie omofocale *di congruenze quadratiche di uno stesso complesso lineare comprende* ∞^1 *congruenze quadratiche aventi comune la curva singolare, sicchè ogni fascio di rette che in un piano osculatore di questa vanno pel punto di contatto ha ogni sua retta per retta singolare di una determinata di quelle congruenze quadratiche e le altre per rette corrispondenti, di modo che ciascuno di quegli* ∞^1 *fasci corrisponde proiettivamente alla serie omofocale di congruenze quadratiche. Se in ciascun fascio si prende la retta singolare di una determinata congruenza della serie si ottengono così* ∞^1 *rette, tangenti quadripunte della superficie focale di quella congruenza, e formanti una rigata di grado* 8. *Variando la congruenza quadratica nella serie varierà pure questa rigata di grado* 8, *sempre però passando per la curva singolare. Quanto poi alle superficie focali delle congruenze quadratiche della serie, è chiaro che esse si toccheranno lungo questa curva, avendovi per piani tangenti i piani osculatori di questa. I punti doppi di tutte queste superficie focali stanno sulla curva singolare e vi formano nel caso più generale una involuzione di grado* 16, *sì che fissando un punto della curva stessa è determinata una superficie focale che lo ha per punto doppio, e quindi sono determinati gli altri punti doppi di questa; e analogamente pei piani doppi.*

Per ogni retta del complesso lineare passano in generale 3 *congruenze quadratiche di una serie omofocale. Ma se la retta è singolare per una di esse, cioè se taglia la curva singolare (e per conseguenza sta in un piano osculatore), allora due delle congruenze quadratiche che vi passano coincidono in quella che ha la retta per singolare, e l'altra congruenza quadratica passante per la retta data è quella che ha il punto d'intersezione di questa colla curva per punto doppio della superficie focale. — Le rette singolari di* 2° *ordine delle congruenze della serie omofocale sono le tangenti della curva singolare; per ognuna di queste tangenti coincidono le* 3 *congruenze della serie passanti per essa, e precisamente coincidono colla congruenza avente quella retta per retta singolare di* 2° *ordine* (V. n° 97).

151. Dai risultati generali del n° 93 segue poi, insieme con altre proposizioni che per brevità omettiamo: La congruenza speciale composta degli ∞^1 fasci di rette singolari della serie omofocale di congruenze quadratiche, vale a dire la congruenza formata dalle ∞^1 rigate di grado 8 di tangenti quadripunte delle superficie focali di quelle, è un $S_2^{2 \cdot 8}$, cioè una congruenza di grado 8 contenuta nel complesso lineare considerato. E la rigata delle rette singolari di 2° ordine, cioè la rigata sviluppabile della curva singolare è un S_1^{24}, cioè una rigata di grado 24. Ne segue immediatamente che:

La curva singolare di una serie omofocale di congruenze quadratiche è in generale d'ordine e classe 8 *e di rango* 24 (grado della sua sviluppabile).

La prima parte di questa proposizione si poteva anche avere, benchè non coll'uso della pura geometria della retta, notando che in generale la superficie focale di una qualunque delle congruenze quadratiche è d'ordine 4 ed è toccata secondo la curva singolare, che conterà 4 volte come intersezione, dalla rigata di grado 8 delle rette singolari di quella congruenza (tangenti quadripunte di quella superficie), sicchè quella curva dovrà essere di ordine 8; e similmente per la classe.

Tutte le superficie focali delle congruenze quadratiche della serie formano così nello stesso tempo un fascio ed una schiera, avendo per intersezione comune quella curva singolare d'ordine 8 (che, essendo curva di contatto semplice, va contata due volte) e per sviluppabile circoscritta comune quella osculatrice a questa curva.

152. *Le congruenze quadratiche di una serie omofocale hanno la stessa caratteristica, e le stesse congruenze lineari fondamentali* (V. n° 124). *Ogni congruenza fondamentale isolata contata due volte va considerata come una delle congruenze quadratiche della serie e sue rette singolari vanno considerate le rette di una rigata biquadratica contenuta nella congruenza lineare fondamentale e la quale si può chiamare* rigata focale *delle congruenze quadratiche della serie. Ogni generatrice di una tale rigata biquadratica appartiene non ad un solo, ma a due fasci di rette singolari della serie, vale a dire è una corda della curva singolare e sta nello stesso tempo nei due piani osculatori dei punti in cui la taglia. Nel caso più generale queste rigate biquadratiche focali delle congruenze quadratiche sono 5, corrispondentemente alle 5 congruenze fondamentali. Quindi se nel caso generale si conduce il piano osculatore in un punto arbitrario alla curva singolare delle congruenze, esso taglierà ancora questa curva in 5 punti posti col primo su una conica e costituenti con esso 6 punti doppi di una superficie focale della serie, e le congiungenti di quelli al primo punto saranno le 5 generatrici passanti per questo punto delle 5 rigate focali. Queste 5 rigate sono costituite da tangenti doppie comuni a tutte le superficie di Kummer della serie: punti e piani di contatto di quelle tangenti doppie appartengono alla curva singolare, cioè alla curva di contatto comune a quelle superficie.*

153. *Se la caratteristica comune delle congruenze quadratiche di una serie omofocale contiene un gruppo composto di due indici, vale a dire se esiste nel complesso lineare a cui appartengono quelle congruenze tutto un fascio di congruenze lineari fondamentali per queste, le quali si taglieranno in una rigata quadrica, allora vi è in generale su questa una quaterna di rette* focale *per tutte quelle congruenze; vale a dire ogni fascio di rette singolari di quella serie omofocale di congruenze quadratiche contiene una di quelle quattro rette, cosicchè la congruenza di grado 8 formata nel caso generale da quei fasci si scinde in questo caso in 4 congruenze lineari speciali, contate due volte, aventi quelle 4 rette per assi. Inoltre* (V. n^i 85, 101) *per ciascuna congruenza quadratica della serie quelle sue rette singolari che s'appoggiano su una qualunque di quelle 4 rette formano una rigata quadrica. Ora in questo caso*, come vedremo più tardi, *la superficie focale di ciascuna delle congruenze quadratiche è una rigata biquadratica, le cui due rette doppie (che sono pure rette doppie di quelle congruenze) non variano cambiando la congruenza nella serie omofocale. Varia però con ciò la rigata biquadratica stessa, ma rimangono fisse quelle 4 sue generatrici (distinte o coincidenti) che costituiscono appunto la quaterna focale comune alle congruenze della serie e godono della proprietà di essere curve delle tangenti quadripunte per tutte quelle superficie biquadratiche, cioè sono, per ciascuna di queste, generatrici*

« iperboliche » (V. n° 117), *sicchè per ciascun punto di ognuna di esse passa una tangente quadripunta della superficie, in modo che tutte queste tangenti quadripunte formano una rigata quadrica (di rette singolari della corrispondente congruenza quadratica).*

Tutte le ∞^1 rigate biquadratiche che sono superficie focali per la serie di congruenze quadratiche omofocali si tagliano adunque nelle 2 rette doppie, le quali quindi contano nell'intersezione come insieme di grado 8, e si toccano lungo 4 loro generatrici iperboliche giacenti in una stessa rigata quadrica. In ciascuna di queste generatrici iperboliche le rigate quadriche delle tangenti quadripunte delle ∞^1 superficie biquadratiche formano una congruenza lineare speciale avente quella generatrice iperbolica per asse.

Dalla proposizione generale del n° 79 segue poi:

Se la caratteristica di una congruenza quadratica contiene un gruppo di 3 indici caratteristici, essa si scinde in due congruenze lineari e se contiene un gruppo di 4 indici essa si riduce ad una congruenza lineare doppia.

Abbiamo così visto come una congruenza quadratica e quindi tutta la sua serie omofocale possano avere delle rigate biquadratiche od anche delle quaterne di rette come *focali*. Viceversa, se nel complesso lineare c si dànno ad arbitrio una rigata biquadratica ovvero una quaterna di rette (di una rigata quadrica) e le si assumono come focali, sarà determinata nel complesso lineare una serie di congruenze quadratiche omofocali corrispondenti. Da ciò si deduce facilmente che una rigata biquadratica generale ha 16 generatrici iperboliche, formanti 4 quaterne, sì che ogni quaterna sta su una quadrica; risultati che ritroveremo più tardi.

Si dimostra facilmente col nostro solito metodo dal teorema generale del n° 83 la seguente proposizione importante sulle congruenze quadratiche omofocali: Le 3 congruenze della serie passanti in generale per una retta qualunque del complesso lineare hanno in questa retta per fuochi (o piani focali) 3 coppie di punti, delle quali due qualunque formano un gruppo armonico, sicchè il fascio (o schiera) delle superficie di Kummer focali per quelle congruenze quadratiche ha così una proprietà assai elegante. Questo teorema, considerato come appartenente alla geometria a 4 dimensioni, dà luogo nella geometria delle sfere al teorema sull'ortogonalità delle ciclidi di un sistema omofocale.

154. Finalmente da una proposizione generale del n° 89 segue:

Una serie di complessi quadratici omofocali è tagliata da uno qualunque dei suoi complessi fondamentali isolati secondo una serie di congruenze quadratiche omofocali, della quale fa parte quella congruenza focale della serie di complessi quadratici che corrisponde a quel complesso fondamentale. Ne segue che tutte le superficie di Kummer che sono superficie focali delle dette congruenze quadratiche toccano la superficie di Kummer singolare per la serie omofocale di complessi quadratici secondo una curva di grado 8 delle loro tangenti quadripunte (*).

(*) Il Lie aveva già enunciato questo teorema nella memoria « *Ueber Complexe und partielle*

155. Abbiamo già considerato (V. n° 127) alcune proprietà delle 5 coppie di sistemi di rigate quadriche che ha una congruenza quadratica generale; vogliamo ora ritornarvi su. In uno spazio lineare a 4 dimensioni S'_4 sia la quadrica R_3, su cui la quartica Γ. Ogni S'_3 di quello spazio taglierà questa in una quartica ad 1 dimensione posta sulla quadrica a 2 dimensioni d'intersezione con R_3. Quattro elementi di Γ determinano in generale quel S'_3 e quindi quella quartica; ma due S'_3 si tagliano in un S'_2 che taglia Γ in quattro elementi, i quali saranno dunque comuni alle quartiche d'intersezione di Γ con quei due S'_3 e quindi col loro fascio. Se poi si considera un S'_3 tangente ad uno degli S^2_3 specializzati che passano per Γ, la sua intersezione S^2_2 con quel S^2_3 si scinde in due S'_2 aventi comune l'S'_1 di contatto (ovvero quando quel S^2_3 fosse doppiamente specializzato, quell'intersezione si compone di un S'_2 doppio), i quali tagliano R_3 in due diversi S^2_1 nei quali viene a scindersi in questo caso la suddetta quartica ad una dimensione. Dunque:

Ogni congruenza quadratica Γ *contenuta in un complesso lineare* c *contiene* ∞^4 *rigate biquadratiche, intersezioni di* Γ *stessa colle congruenze lineari contenute in* c, *sì che* 4 *rette ad arbitrio di* Γ *individuano in generale una tal rigata, a meno che stiano in una rigata quadrica di* c, *chè in tal caso per quelle* 4 *rette passeranno infinite rigate biquadratiche di* Γ. *Viceversa, due rigate biquadratiche qualunque di* Γ *si tagliano appunto secondo* 4 *rette che godono di questa proprietà* (*).

La congruenza lineare che determina una rigata biquadratica di Γ *può esser tale che questa si scinda in due rigate quadriche aventi comuni due rette.* Di tali congruenze lineari ve ne sono ∞^2 per ciascuna congruenza fondamentale isolata, ma è chiaro che per una qualunque delle rigate quadriche di Γ a cui esse dànno luogo ne passano ∞', sicchè il numero di queste rigate quadriche contenute in Γ si riduce ad ∞'. Ed esse corrispondono a quelle congruenze fondamentali isolate e sono legate tra loro nel modo detto.

Se consideriamo un S^2_3 semplicemente specializzato del fascio passante per Γ, ogni S'_2 in esso contenuto, di ciascuno dei due sistemi taglia R_2 secondo un S^2_1 che è appunto una rigata quadrica della congruenza Γ. Ora può accadere ancora che quel S^2_1 si scinda: ciò accadrà quando quel S'_2 sia tangente ad R_3. Se consideriamo l'S'_3 polare dell'elemento doppio di quel S^2_3 specializzato rispetto ad R_3, è chiaro che esso sarà tagliato da un tale S'_2 secondo un S'_1 giacente nella intersezione col S^2_3 specializzato e tangente alla intersezione col R_3. Ora in uno spazio lineare a 3 dimensioni S'_3 noi vedemmo che in ciascuno dei 2 sistemi di S'_1 contenuti in un S^2_2 ve

---

Differentialgleichungen » (Math. Ann. Bd. V, pag. 255 nella 1ª nota) deducendolo con una rappresentazione di cui abbiamo già parlato, dalle proprietà del sistema ortogonali di ciclidi di Darboux-Moutard. Del resto una trattazione delle congruenze quadratiche omofocali e delle rigate biquadratiche omofocali non era ancora stata fatta finora, ch'io sappia. Il Klein aveva già trovato, insieme col Lie, la curva di grado 8, che noi abbiamo chiamato « *curva singolare* » di una congruenza quadratica (V. Klein « *Differentialgleichungen in der Liniengeometrie* », Math. Ann. V, pag. 296), ma non la considerò rispetto a quella che io chiamo *serie omofocale* di congruenze quadratiche.

(*) V. Caporali. *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado*, pag. 4.

ne sono in generale 4 tangenti ad un'altra quadrica R_2, potendo il loro numero diminuire collo specializzarsi della quartica d'intersezione del S^2_2 col R_2. Dunque conchiudiamo:

In ciascuno dei due sistemi di rigate quadriche di una stessa generazione di Γ *vi sono* 4 *rigate quadriche specializzate, cioè scisse in due fasci, sicchè* Γ *ha nel caso più generale* 16 *fasci di rette raggruppati in modo che ad ognuna delle* 5 *congruenze fondamentali corrispondono due ottuple di tali fasci, sì che una ottupla si compone di* 4 *coppie di fasci formanti rigate quadriche degeneri di* Γ *dell'uno dei* 2 *sistemi che corrispondono a quella congruenza fondamentale* (*).

Tutte le rigate biquadratiche di Γ *contengono una retta di ciascuno dei* 16 *fasci di* Γ. *Le rigate quadriche di uno dei due sistemi corrispondenti ad una stessa generazione di* Γ *contengono una retta di ciascuno degli* 8 *fasci costituenti l'ottupla corrispondente all'altro sistema. Dunque un sistema di rigate quadriche di* Γ *si compone di quadriche che passano per* 8 *punti fissi e toccano* 8 *piani fissi* (*passanti a coppie per questi*). *Questo sistema di quadriche è d'ordine e classe* 2 *poichè per ogni retta della congruenza passa solo una determinata di queste quadriche e per ogni punto o piano dello spazio passano in generale due sole rette della congruenza. Considerando il caso in cui queste divengano infinitamente vicine abbiamo: L'inviluppo di ogni sistema di quadriche di* Γ *è appunto la superficie focale di* Γ.

§ 8.

Rigata biquadratica e sua serie omofocale; generatrici singolari e generatrici iperboliche.

156. Già notammo che una rigata biquadratica rispetto alla congruenza lineare (generale o speciale) che la contiene equivale ad una quartica di 1ª specie nello spazio lineare a 3 dimensioni ordinario rispetto ad una quadrica (generale o conica) che la contenga. Ai due sistemi di fasci di quella congruenza (sistemi che coincidono quando la congruenza diventa speciale) corrispondono i due sistemi di generatrici di quella quadrica (i quali coincidono pel cono). Quindi le proprietà note di quelle quartiche nello spazio ordinario e quelle che noi abbiamo trovato nel § 4 della 2ª Parte, e poi al n° 103 si trasportano immediatamente alle rigate biquadratiche, dandoci per queste delle proprietà analoghe a quelle viste pei complessi e le congruenze quadratici.

Abbiasi una rigata biquadratica in una congruenza lineare (*generale o speciale*). *In ogni fascio di rette di questa vi saranno due generatrici della rigata, le quali verranno a coincidere in generale per* 4 *fasci di ciascun sistema. Vi sono dunque in generale su ognuna delle due direttrici* (*distinte o coincidenti*) *della congruenza* 4 punti cuspidali *congiunti all'altra direttrice con* 4 piani cuspidali, *tali che le due generatrici che in un piano cuspidale passano pel punto cuspidale cor-*

(*) V. Caporali, loc. cit., pag. 5.

rispondente coincidono in una generatrice singolare *della rigata; il fascio delle rette che in quel piano passano per quel punto si dirà* fascio singolare *per la rigata biquadratica.*

Un sistema di rigate biquadratiche omofocali (V. n° 103) *è un sistema semplicemente infinito di rigate biquadratiche poste nella stessa congruenza lineare ed aventi comune (oltre alle direttrici) i fasci singolari, cioè le 2 quaterne di punti e di piani cuspidali. In ognuno dei fasci singolari (8 in generale) ogni retta è generatrice singolare per una determinata rigata della serie omofocale, e viceversa ogni rigata di questa ha una generatrice singolare in quel fascio; vi è corrispondenza proiettiva tra quei fasci di generatrici singolari e la serie delle rigate. In particolare vi sono in generale 4 rigate nella serie, le quali si riducono a rigate quadriche contate doppiamente e non sono altro che le 4 rigate quadriche* fondamentali (V. n° 125) *comuni a tutte le rigate biquadratiche della serie. Ciascuna di queste rigate quadriche ha una quaterna di rette in cui sono venute a coincidere le 2 quaterne di generatrici singolari di una rigata biquadratica qualunque della serie e che si potrebbe dire per analogia* quaterna focale *della serie di rigate biquadratiche. Ogni retta di una tal quaterna sta nello stesso tempo in 2 fasci singolari della serie e quindi nel caso più generale congiunge due punti cuspidali (e sta nei due piani cuspidali corrispondenti) delle due direttrici, sicchè la quaterna di rette corrispondente a ciascuna rigata quadrica fondamentale congiunge i 4 punti cuspidali dell'una direttrice ai 4 dell'altra presi in un certo ordine. Questo ordine muta cambiando la rigata quadrica fondamentale, sicchè vi sono 4 quaterne distinte di rette giacenti su rigate quadriche e congiungenti i punti cuspidali delle due direttrici.*

Ne segue immediatamente che il rapporto anarmonico dei 4 punti cuspidali di ciascuna direttrice e quello dei 4 piani cuspidali di ciascuna direttrice hanno tutti lo stesso valore, il che del resto risulta pure dal fatto che una serie omofocale di rigate biquadratiche è polare reciproca di se stessa rispetto alle 4 quadriche fondamentali (V. n° 125). *Questo rapporto anarmonico è l'unico invariante assoluto* (V. alla fine del n° 103) *della serie stessa. Ogni rigata particolare della serie ha poi ancora un altro invariante assoluto, che è il rapporto anarmonico determinato dalla sua generatrice singolare in uno qualunque dei fasci singolari con 3 delle quattro rette di questo fascio, le quali stanno in fasci singolari dell'altra quaterna.*

Per una retta qualunque appoggiata alle due direttrici (o, più in generale, appartenente alla congruenza lineare) passano in generale due rigate biquadratiche della serie omofocale. Esse coincidono quando quella retta si prende in un fascio singolare, e coincidono in una rigata avente questa retta per generatrice singolare.

157. Non insistiamo a far notare l'importanza di queste proposizioni per la teoria delle rigate biquadratiche e come esse si modifichino facilmente quando le rigate diventino speciali o pel coincidere le 2 direttrici, o pel comparire di generatrici doppie, ecc., modificazioni che risultano dalle stesse dimostrazioni che abbiamo date. Solo più una ricerca vogliamo fare: quella delle generatrici iperboliche. Noi vedemmo al n° 117 che cosa esse siano in generale, e più tardi (n° 153) trovammo che ve ne

sono 16 nella rigata biquadratica più generale e che formano 4 quaterne poste su 4 rigate quadriche. Ritroveremo facilmente questo risultato con un metodo più diretto di quello usato allora.

Si tratta in sostanza di cercare in uno spazio lineare a 3 dimensioni tra i piani osculatori ad una quartica, intersezione di un fascio di quadriche, quelli che sono stazionarii (per la definizione del n° 117 di « generatrici iperboliche »). Un tal piano dovrà tagliare il fascio di quadriche secondo un fascio di coniche aventi contatto quadripunto: in questo fascio vi è solo una conica degenerata, che è una retta doppia, ed essa non può essere che l'intersezione di quel piano con un cono del fascio di quadriche, al qual cono esso sia tangente lungo quella retta. Questa retta d'altra parte dovrà pure esser tangente a tutte le quadriche del fascio. Dunque considerando uno qualunque dei coni (4 in generale) del fascio, esso forma fascio coi coni circoscritti dal suo vertice al fascio di quadriche e i piani (4 in generale) che lo toccano lungo le generatrici comuni sono appunto i piani stazionari della quartica: i loro punti di contatto stanno sul piano polare del vertice di quei coni rispetto al fascio di quadriche e non sono altro che i punti in cui la quartica considerata taglia questo piano. Dunque:

Una rigata biquadratica ha per generatrici iperboliche quelle generatrici che essa ha comuni colle sue rigate quadriche fondamentali. Nel caso più generale, queste essendo in numero di 4, *quelle generatrici sono* 16. *Si trova assai facilmente seguendo lo stesso metodo in qual modo il loro insieme si specializzi collo specializzarsi della rigata biquadratica* (*).

Questi risultati si accordano con quelli prima trovati.

158. Per ultimo notiamo, come conseguenza della proposizione generale del n° 89:

Ogni serie omofocale di complessi quadratici è tagliata dalla congruenza d'intersezione di due complessi fondamentali secondo una serie omofocale di rigate biquadratiche.

Ogni serie omofocale di congruenze quadratiche è tagliata da una sua congruenza lineare fondamentale secondo una serie omofocale di rigate biquadratiche.

§ 9.

Classificazione dei complessi quadratici, delle congruenze quadratiche e delle rigate biquadratiche.

159. Nel presente § noi ci proponiamo di mostrare come i principii svolti in quelli precedenti, insieme colla teoria generale della classificazione delle quartiche data nel § 3 della 2ª Parte, diano il modo di classificare i complessi quadratici, le con-

(*) Che le generatrici iperboliche di una rigata biquadratica siano in generale 16 fu già trovato dal Voss in una memoria citata (*Zur Theorie der windschiefen Flächen*, Math. Ann. VIII, pag. 134, 135), ma il loro modo notevolissimo di distribuzione non sembra ancora stato osservato.

gruenze quadratiche e le rigate biquadratiche colla pura geometria della retta ed assegnando nello stesso tempo parecchie proprietà che servano a distinguere le varie specie di quegli enti. Faremo astrazione dai complessi quadratici, che si scindono in complessi lineari; essi sono per la teoria generale, come già notammo, tutti quelli nella cui caratteristica entra un gruppo contenente più di 3 indici. Inoltre, invece di stare ad applicare successivamente per ciascuno dei 3 diversi enti geometrici (quartiche a 3, 2, 1 dimensioni aventi la retta per elemento) il metodo generale svolto nel § citato, preferiamo per brevità collegare tra loro le classificazioni di questi enti in modo che quella di uno di essi serva a quella degli altri.

Per capire come ciò sia possibile ricordiamo che noi abbiamo visto come una serie omofocale di complessi quadratici abbia una stessa caratteristica, e come quando è data una congruenza quadratica, od una rigata biquadratica od una quaterna di rette di una rigata quadrica, come costituenti una focale di quella serie di complessi quadratici, questa è sempre perfettamente determinata. D'altra parte ogni complesso quadratico (o la sua serie omofocale), per quanto possa essere speciale, possiede sempre una congruenza quadratica focale od una rigata biquadratica focale, od almeno una quaterna di rette focale. Ne segue adunque che si avranno tutte le specie possibili di complessi quadratici prendendo per focali tutte le specie possibili di congruenze quadratiche, di rigate biquadratiche e di quaterne di rette. Viceversa se si considerano tutte le specie possibili di complessi quadratici, è chiaro che queste dovranno dare come focali tutte le specie possibili di congruenze quadratiche, di rigate biquadratiche e di quaterne di rette. Per conseguenza la classificazione dei complessi quadratici comprende quella delle congruenze quadratiche, rigate biquadratiche e quaterne di rette di rigata quadrica, e viceversa la classificazione di queste ci dà quella (*).

Similmente la classificazione delle congruenze quadratiche, essendo sempre la serie omofocale di una di queste, e quindi anche la sua caratteristica, determinata da una sua rigata o quaterna focale, si riduce alla classificazione delle rigate biquadratiche e delle quaterne di rette su una quadrica. — In definitiva la classificazione di tutti tre gli enti geometrici, che consideriamo potrebbe ridursi a quella di queste quaterne di rette.

160. Questo concetto assume maggior precisione nel seguente importante teorema, al quale veramente non avremmo bisogno di ricorrere, dopo quanto abbiamo detto, ma di cui tuttavia ci serviremo nel seguito a dedurre la caratteristica di ogni complesso quadratico da quella di una sua focale o viceversa dalla caratteristica di esso quella delle sue focali. Il teorema nella sua maggior generalità per quadriche e quartiche qualunque in uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni si può enunciare così:

Abbiasi in uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni su una quadrica fissa φ una quartica, od una serie omofocale di quartiche, la cui caratteristica sia:

$$\left[(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h_1-1)}), \quad (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}) \ldots (e_r e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})\right].$$

(*) Qui per *classificazione* intendiamo solo la distinzione in *specie*, che è data dalle diverse caratteristiche. Quanto alla ulteriore divisione, che si può fare entro queste specie, essa è data dagl'invarianti assoluti. Ma su questo ritorneremo tra poco.

La focale di quelle quartiche che corrisponde al primo gruppo di quella caratteristica è una quartica ad $n-3-h_1$ *dimensioni posta su* φ, *anzi sull'intersezione di* φ *col* S'_{n-1-h_1} *fondamentale che corrisponde a quello, ed avente per caratteristica*

$$\left[\overline{(e_1-1, e_1'-1, \ldots, e_1^{(h_1-1)}-1)}, \quad (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}) \ldots (e_r, e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})\right],$$

dove il segno posto al disopra del primo gruppo caratteristico sta per indicare che esso corrisponde appunto a quella quadrica ad $n-2-h_1$ *dimensioni d'intersezione del* S'_{n-1-h_1} *con* φ, *e dove gli altri gruppi caratteristici corrispondono a spazi fondamentali di quella focale posti sugli spazi fondamentali corrispondenti della serie omofocale corrispondente* (*Anche le radici del determinante a cui appartiene questa nuova caratteristica sono le stesse che quelle del determinante della serie omofocale*).

Questo teorema ha evidentemente una grandissima importanza per la classificazione delle quartiche; dalla caratteristica di una quartica qualunque su una quadrica esso ci dà la caratteristica delle sue quartiche focali, e viceversa dalla caratteristica di una focale ci dà quella di tutte le quartiche di cui questa è focale. Si vedrà chiaramente quanto questo sia importante nella applicazione che ne faremo (*).

161. Prima però di passare alla classificazione dei complessi quadratici è necessario che riconosciamo in quale relazione stia una *retta doppia* qualunque di un complesso quadratico sia rispetto a questo, sia rispetto alla sua superficie singolare. Abbiamo definito (V. n° 123) una retta doppia r di un complesso quadratico Q come un elemento doppio, nel senso più generale, di questo considerato come una quartica sulla quadrica R nello spazio lineare a 5 dimensioni, ed un tal elemento doppio r sappiamo esser caratterizzato dal fatto che l'S'_4 tangente in r ad R è pur tangente in r a tutte le altre quadriche passanti per Q, tra le quali ve ne sarà una f specializzata una o più volte ed avente un elemento doppio in r. Diciamo π quel S'_4 tangente: taglierà R ed f in due S^2_3 aventi in r comune un elemento doppio. Un S'_3 qualunque contenuto in π e non passante per r taglierà R e f in due S^2_2, che diremo R_1 ed f_1, e sono due quadriche a 2 dimensioni in uno spazio lineare a 3 dimensioni. Hanno dunque per intersezione una quartica S^4_1, i cui elementi congiunti a r dànno gli S'_1 (∞^1) che costituiscono l'intersezione S^4_2 di π con Q. Ora l'intersezione di R con π contiene ∞^1 S'_2 di ciascuno dei due sistemi di S'_2 contenuti in R: questi S'_2 sono quelli che congiungono r ai due sistemi di ∞^1 S'_1 contenuti in R_1. Ora ciascun S'_1 di questi due sistemi taglia f_1 in 2 elementi, cosicchè potremo dire che in ognuno di quegli S'_2 di R passanti per r l'intersezione con Q si scinde in due S'_1 passanti per r. Inoltre per ciascuno dei 2 sistemi di S'_1 di R_1 sappiamo

(*) Non ci è riuscito di trovare una dimostrazione di quel teorema, la quale faccia uso di equazioni affatto generali. Invece usando forme particolari di equazioni, per esempio quelle canoniche date dal Weierstrass, la dimostrazione riesce facile.

esservene 4 tangenti ad f_1 ed alla quartica $f_1 R_1$ (e queste 2 quaterne di S'_1 di R_1 hanno lo stesso rapporto anarmonico) e quindi vi saranno, per ciascuno dei 2 sistemi di S'_2 di R passanti per r, 4 in generale pei quali i due S'_1 costituenti l'intersezione con Q vengono a coincidere. Dunque:

Ogni retta doppia di un complesso quadratico ha la proprietà che in ogni piano passante per essa le rette del complesso formano due fasci di cui essa fa parte e similmente per ogni suo punto. Vi sono in generale 4 piani e 4 punti, per ciascuno dei quali quei due fasci coincidono, sicchè la retta doppia contiene in generale 4 piani doppi e 4 punti doppi del complesso e quindi anche (V. n° 145) *della superficie singolare. Ne segue immediatamente che ogni retta doppia del complesso è pure retta doppia della sua superficie singolare, sia come luogo di punti sia come inviluppo di piani; e vediamo inoltre che essa contiene in generale 4 punti doppi (cuspidali) e 4 piani doppi aventi lo stesso rapporto anarmonico.*

162. Quando quella retta doppia proviene dal gruppo caratteristico 2, oppure (1 1), della caratteristica del complesso quadratico, sono queste le sue proprietà principali, ma quando essa proviene da radici multiple d'ordine superiore a 2 del discriminante, come 3, (2 1), 4, ecc., allora avrà particolarizzazioni che ora riconosceremo. A tal fine bisogna ricordare le cose dette in generale ai n[i] 76, 77 per la distinzione delle varie specie di elementi doppi che può avere una quartica qualunque. Da esse risulta che, colle notazioni dianzi usate, ai gruppi caratteristici 3, 4, 5, 6 corrisponde rispettivamente l'avere la quartica d'intersezione di f_1 e R_1 il gruppo caratteristico 1, 2, 3, 4 corrispondentemente ad f_1 che ha in questi casi un elemento doppio nell'elemento d'intersezione del S'_3 di π che contiene f_1 ed R_1 col S'_1 in cui π è toccato in questi casi dalla quadrica specializzata f. Ora le particolarità che noi sappiamo incontrarsi nell'intersezione di 2 quadriche nello spazio lineare a 3 dimensioni quando essa presenta gl'indici caratteristici isolati 1, 2, 3, 4 ci dicono subito che: per la retta doppia corrispondente al caratteristico 3, od anche (2 1), vi sono ancora 4 punti doppi e 4 piani doppi distinti; per quella corrispondente al caratteristico 4 due dei punti doppi e due dei piani doppi son venuti a coincidere in un punto ed un piano aventi comune un fascio di rette del complesso, mentre son rimasti due punti e due piani doppi isolati; per la retta doppia corrispondente al caratteristico 5 tre dei punti doppi e tre dei piani doppi coincidono e rimangono solo più un altro punto ed un altro piano doppio; finalmente il caso del gruppo caratteristico 6 si presenta come notevole in quanto che allora la intersezione di R_1 ed f_1 avendo la caratteristica [4] si scinde in una cubica ed una generatrice dell'uno o dell'altro sistema di R_1 (V. n° 80). Dunque il complesso quadratico [6] contiene o un piano od un punto di rette, nel qual piano o punto sta la retta doppia, la quale contiene ancora un punto ed un piano doppi: se p. e. è un piano di rette che è contenuto nel complesso, allora ogni suo punto contenendo un fascio di queste rette sarà singolare, e quindi la superficie singolare si scinderà in questo piano ed una superficie di 3^0 ordine e 4^a classe avente la retta doppia del complesso per sua retta semplice come luogo, ma doppia

come inviluppo; e per questa retta oltre al piano considerato passa un altro piano doppio ed inoltre un punto doppio notevole in quanto che il fascio (doppio) di rette del complesso passanti per esso sta nel piano che vedemmo far parte della superficie singolare. Correlativamente il complesso quadratico [6] può avere la superficie singolare scissa in un punto, inviluppo di piani, ed una superficie di 4° ordine e 3ª classe. Queste cose si vedono considerando la quartica degenerata $R_1 f_1$ e ricordando che dalle generatrici di R_1 tangenti ad essa noi ottenevamo nel n° precedente i punti e piani doppi di r. — Le proprietà così trovate del complesso quadratico [6] sono pure quelle date dal Weiler al n° 48 del suo lavoro.

163. Ma a rendere più completa la distinzione tra le varie specie di rette doppie (distinzione che non abbiamo ancora visto, p. e. tra i casi 2 e 3) gioverà che mostriamo come le superficie singolari corrispondenti non sono altro che *superficie del complesso* (Complexfläche) di Plücker, cioè superficie focali delle congruenze quadratiche composte dalle rette di un complesso quadratico, le quali tagliano una retta fissa. Ciò si potrebbe dedurre immediatamente come corollario del teorema generale che abbiamo esposto al n° 160, ma si può pure ottenere direttamente come segue. Ricordiamo che la superficie singolare del complesso quadratico che consideriamo è superficie focale di una congruenza quadratica, che si ottiene come intersezione di R col S^2_3 polare rispetto ad R della quadrica f, che supponiamo semplicemente specializzata coll'elemento doppio r. Come π è l'S'_4 polare di r rispetto ad R, così quel S^2_3 starà su π e, nel caso del gruppo caratteristico 2 non presenterà altro di notevole. Ma pel caratteristico 3 diventa f tangente lungo un S'_1 a π, e quindi il suo S^2_3 polare viene a passare per r, avendovi per tangente un S'_3 che è polare di quel S'_1. Pel caratteristico 4 quel S'_1 viene a stare su R e quindi quel S'_3 tangente in r al S^2_3 toccherà R lungo quel S'_1. E così continuando e ricordando le cose dette, e notando che l'S^2_3 considerato è intersezione di π con infinite quadriche S^2_4, avremo:

Il gruppo caratteristico composto di un indice isolato $e \geqq 2$ *rappresenta una retta doppia tale che la superficie singolare che si considera è la superficie, relativa a quella retta, di un conveniente complesso quadratico, il quale non passa per la retta stessa se* $e=2$, *passa per la retta se* $e=3$, *ha la retta per retta singolare quando* $e=4$, *l'ha per retta singolare di* 2° *ordine per* $e=5$, *e per retta singolare di* 3° *ordine per* $e=6$.

Ricordando il significato che noi diamo alle espressioni di « rette singolari di 2° e di 3° ordine » (V. n° 137) è facile convincersi come questi risultati vadano d'accordo con quelli dianzi avuti. Essi sono assai importanti, poichè riducono lo studio delle superficie singolari corrispondenti a quei vari casi allo studio di superficie del complesso (*).

(*) Il Weiler nel suo lavoro (n° 7, 16, 30) stabilisce che i casi [21111], [3111], e [411] dànno per superficie singolari le superficie del complesso relative risp. ad una retta qualunque, ad una retta del complesso e ad una retta singolare, cercando le equazioni in coordinate di punti di quelle superficie e studiando mediante esse la forma di queste. È chiaro che tal metodo non è molto soddisfacente.

164. Premesse queste cose e ricordando quelle viste in generale nei §§ 4, 5 e 6 sui complessi lineari fondamentali di un complesso quadratico, i quali quando diventano speciali dànno coi loro assi delle rette doppie; sulla generazione proiettiva dei complessi quadratici, sulle rette singolari e la superficie singolare, sulla serie omofocale di complessi quadratici e il numero dei complessi di una tal serie, che passano per una retta arbitraria dello spazio, noi siamo condotti naturalmente ad una divisione dei complessi quadratici in classi, e poi di queste in sottoclassi, le quali ci dànno tutte le *specie* possibili, cioè la classificazione completa dei complessi quadratici.

Classe *A*.

Tutti i complessi nella cui caratteristica non vi sono gruppi contenenti più di un indice caratteristico.

Questa classe di complessi quadratici è caratterizzata geometricamente dalle seguenti proprietà. Il numero dei complessi lineari fondamentali è finito. Ogni tal complesso quadratico non contiene alcuna congruenza lineare, ma soltanto delle rigate quadriche e quindi è generabile come tutti i complessi quadratici mediante stelle reciproche di complessi lineari, ma non (come tutti i rimanenti complessi quadratici) mediante fasci proiettivi. La serie omofocale di ogni complesso quadratico di questa classe (e solo di questa) è del grado 4, vale a dire per ogni retta dello spazio passano 4 (variabili) dei suoi complessi.

Possiamo suddividere questa classe in 4 sottoclassi, secondo che il numero degli indici caratteristici diversi dall'unità e quindi delle rette doppie è 0, 1, 2, 3, cioè:

I. [111111] . *Nessuna retta doppia.*

II. [21111] , [3111] , [411] , [51] , [6] . *Una retta doppia.*

III. [2211] , [321] , [33] , [42] . *Due rette doppie.*

IV. [222] . *Tre rette doppie.*

La caratteristica [111111] corrisponde al complesso più generale ed a quei suoi casi particolari in cui il complesso non cessa di avere 6 complessi fondamentali isolati: (non speciali, per conseguenza) e quindi non ha rette doppie. Le principali proprietà di questi complessi furono scoperte specialmente da Plücker e Klein.

Gli altri complessi quadratici di questa classe hanno, come vedemmo, delle rette doppie, e per superficie singolari delle *superficie di complesso* relative a quelle rette e vedemmo anche (n° 163) in quale relazione queste rette debbono stare rispetto ai complessi generali di cui quelle sono superficie. Pei casi di una sola retta doppia (sottoclasse II) si avranno dunque, per quanto dicemmo, le seguenti superficie singolari (dove quelle superficie di complesso devono essere le più generali delle specie che indichiamo):

[21111] . Superficie di complesso relativa ad una retta qualunque dello spazio

[3111] . » relativa ad una retta del complesso

[411] . » relativa ad una retta singolare (di 1° ordine) del complesso

[51] . » relativa ad una retta singolare di 2° ordine del complesso

[6] . » relativa ad una retta singolare di 3° ordine del complesso.

Ora le superficie del complesso relative alle varie posizioni possibili di una retta hanno forme il cui studio si presenta assai semplice, e particolarmente si riconoscono assai facilmente le specialità relative alla retta doppia ed alla distribuzione dei punti doppi della superficie, sicchè a noi basta aver ricondotto lo studio di questa classe di superficie singolari allo studio di superficie del complesso. Del resto le superficie del complesso relative ad una retta qualunque dello spazio e ad una retta appartenente al complesso furono studiate abbastanza diffusamente dal Plücker (*), il quale notò ad esempio come nel secondo caso la retta doppia diventi cuspidale per la superficie. Non è difficile proseguire questo studio; noi abbiamo anzi già trovato quali particolarità distingua quella retta doppia cuspidale nei casi [3111], [411], [51], [6], (V. n° 162) e per questo ultimo caso [6] abbiamo già visto come la superficie singolare si scinda pel separarsi, come parte di essa, di un punto o di un piano di rette contenute nel complesso quadratico, avendo la parte rimanente (superficie di 4° ordine e 3ª classe, ovvero di 3° ordine e 4ª classe) le proprietà viste. Quindi questi casi sono già sufficientemente distinti tra loro, ed è anche dato il modo di approfondirli.

Venendo alle due sottoclassi, che ci rimangono a considerare, le superficie singolari corrispondenti si potrebbero considerare come superficie di complessi relative a ciascuna delle 2 o 3 rette doppie, che esse hanno. Ma possiamo anche servirci delle distinzioni già trovate tra le rette doppie corrispondenti a indici caratteristici diversi.

Ogni complesso della sottoclasse III ha due rette doppie che si tagliano determinando un fascio di rette del complesso (V. alla fine del n° 123). Il caso [2211] è quello più generale: la superficie singolare ha quelle due rette per rette doppie. Nel caso [321] una delle due rette doppie (quella corrispondente all'indice caratteristico 3) diventa cuspidale per la superficie singolare. E nel caso [33] entrambe le rette doppie sono cuspidali per questa superficie. Ma nel caso [42] ricordando le proprietà viste (n° 162) della retta doppia corrispondente all'indice caratteristico 4, e la relazione in cui questa deve stare colla retta doppia, che corrisponde al 2, noi vediamo che il piano, od il punto in cui stanno le due rette doppie, che si hanno in questo caso, si compongono di rette del complesso quadratico, sicchè la superficie sin-

(*) Vedi Plücker, *Neue Geometrie des Raumes*, pag. 205-226. Nella 2ª parte di quest'opera a pag. 337-344 sono enumerate (dal Klein, a quanto è detto nella prefazione) alcune altre specie di superficie di complesso, come quelle che sono superficie singolari di serie omofocali di complessi quadratici [2211], [222], [(11)211].

golare si scinde ancora in un piano (od un punto) e una superficie di 3° ordine e 4ª classe (o 4° ordine e 3ª classe) avente quelle due rette per rette doppie come assi e semplici come raggi (o correlat.), ma, come assi, doppie di diversa natura.

Finalmente venendo alla sottoclasse IV, cioè al caso [222], in cui vi sono 3 rette doppie, queste si taglieranno a due a due e staranno in un punto od in un piano, le cui rette apparterranno al complesso quadratico (V. ancora alla fine del n° 123), sicchè quel punto, o quel piano, formerà parte della superficie singolare. La parte rimanente sarà una superficie di 4° ordine e 3ª classe contenente tre rette doppie come raggi e semplici come assi, concorrenti in quel punto, che sarà triplo per la superficie, cioè una *superficie di Steiner;* oppure rispettivamente sarà la superficie correlativa di 3 ordine e 4ª classe.

Così abbiamo distinte le varie specie di complessi contenute in questa prima classe *A*. Notiamo che le superficie singolari corrispondenti si scindono pel separarsi di un punto o di un piano nei soli 3 casi [222], [42], [6], di cui ciascuno si può riguardare come caso particolare del precedente.

Questa classificazione dei complessi quadratici (o delle loro superficie singolari) di questa classe *A* ci dà subito, per quanto vedemmo, una classificazione di quelle congruenze quadratiche le cui caratteristiche non contengono gruppi composti di più di un indice. Pel teorema dato al n° 160 quei complessi quadratici (i quali non hanno, come sappiamo, altre focali che congruenze quadratiche) hanno le seguenti congruenze quadratiche focali:

Specie dei complessi quadratici.	*Specie delle loro congruenze quadratiche focali.*
[111111]	[11111]
[21111]	[2111] , $[\bar{1}1111]$
[3111]	[311] , $[\bar{2}111]$
[411]	[41] , $[\bar{3}11]$
[51]	[5] , $[\bar{4}1]$
[6]	$[\bar{5}]$
[2211]	[221] , $[\bar{1}211]$
[321]	[32] , $[\bar{1}31]$, $[\bar{2}21]$
[33]	$[\bar{2}3]$
[42]	$[\bar{1}4]$, $[\bar{3}2]$
[222]	$[\bar{1}22]$.

Quelle tra queste congruenze quadratiche, che hanno il segno al disopra di un indice caratteristico (usando la convenzione fatta alla fine del n° 124 e poi al n° 160) si compongono di rette appoggiate sulla corrispondente retta doppia dei complessi quadratici, ed è appunto la considerazione di esse che ci mostrava essere la superficie singolare di questi una superficie di complesso relativa a quelle rette doppie.

CLASSE *B*.

165. *Tutti i complessi, nella cui caratteristica, vi è (oltre ad indici caratteristici isolati) un gruppo composto di due indici.*

Questi sono tutti i complessi quadratici aventi, oltre a complessi fondamentali isolati, un fascio di complessi fondamentali. Gli assi dei complessi speciali di questo fascio sono rette doppie. Ogni complesso di questa classe contiene infinite congruenze lineari (formanti due sistemi) passanti per quelle rette doppie, ed è generabile in infiniti modi (oltre che col metodo generale delle stelle reciproche di complessi lineari) con due fasci proiettivi di complessi lineari passanti per queste. La superficie singolare vedemmo essere in questo caso una rigata biquadratica appartenente alla congruenza lineare di quel fascio di complessi fondamentali, rigata che è una focale per tutta la serie omofocale di complessi quadratici. Sappiamo poi che se il gruppo caratteristico di cui si tratta è (11), allora i complessi fondamentali speciali del fascio sono 2 soli e distinti, i cui assi costituiscono 2 rette doppie sghembe distinte del complesso e quindi di quella superficie singolare; mentre se in quel gruppo caratteristico il 1° indice è > 1, allora la congruenza fondamentale diventa speciale in quanto che le 2 direttrici, che sono appunto quelle due rette doppie, vengono ad essere infinitamente vicine: la rigata biquadratica è di quelle che appartengono ad una congruenza lineare speciale. Finalmente se in quel gruppo caratteristico entrambi gli indici sono > 1 abbiamo pure visto che tutto il fascio di complessi fondamentali si compone di complessi speciali, cioè che la congruenza fondamentale si scinde in un piano ed un punto di rette. La rigata biquadratica dovendo esservi contenuta si scinderà in una conica (come inviluppo di 2ª classe) di quel piano ed un cono di quel punto. In questo caso quei complessi lineari fondamentali essendo tutti speciali, i loro assi formano un fascio di rette doppie del complesso quadratico: il piano di questo fascio come luogo di punti, ed il centro del fascio stesso come inviluppo di piani apparterranno dunque doppiamente alla superficie singolare, la quale quindi si comporrà ancora di un cono avente il vertice in quel punto, come luogo di punti singolari, e di una conica giacente in quel piano come inviluppo di piani singolari; potendo poi questo cono e questa conica degenerare ancora.

Distinguendo dunque 3 sottoclassi abbiamo le seguenti specie:

I. *Superficie singolare una rigata biquadratica a direttrici sghembe distinte*

[(11)1111], [(11)211), [(11)31], [(11)22], [(11)4]. *Serie omofocale di grado* 3°.

II. *Rigata biquadratica a direttrici coincidenti.*

[(21)111], [(21)21], [(21)3], [(31)11], [(31)2], [(41)1], [(51)]. *Serie omofocale di grado* 3°.

III. *Piano e punto contati doppiamente*; *cono e conica.*

[(22)11], [(22)2], [(32)1], [(42)]. *Serie omofocale di grado* 2°.

[(33)]. *Serie omofocale di grado* 1°.

Per riconoscere poi le proprietà che distinguono p. e. le superficie singolari delle varie specie di complessi quadratici di questa classe basta che facciamo la *classificazione delle rigate biquadratiche*, ed allora il teorema del n° 160 ci darà subito in che modo si corrispondano la caratteristica della rigata biquadratica e quella dei complessi quadratici che l'hanno per superficie singolare. Ora noi vedemmo che le rigate biquadratiche vanno considerate come le quartiche d'intersezione di quadriche in uno spazio lineare a 3 dimensioni, poste su una quadrica fissa, la quale si riduce ad un cono quando la congruenza lineare che contiene la rigata biquadratica viene ad avere le 2 direttrici coincidenti e ad una coppia di piani quando quella congruenza lineare si scinde in un punto ed un piano di rette aventi comune un fascio (*). D'altra parte la classificazione delle quartiche ordinarie l'abbiamo già fatta nel § 4 della 2ª Parte di questo lavoro. Valendoci di essa, cambiandovi solo le parole punto, quartica, ecc., in retta, rigata biquadratica, ecc., avremo le seguenti proprietà per distinguere le varie specie che considereremo di rigate biquadratiche di complessi di questa classe B. Porremo anche, accanto a questa classificazione, a sinistra, la classificazione delle quartiche, affinchè si veda come da quest'ultima noi passiamo a quella delle rigate (biquadratiche).

(*) In un lavoro recente intitolato « *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi corrispondenti in due o più fasci proiettivi di complessi lineari* » il Dott. Domenico Roccella per studiare i complessi quadratici generati da 2 fasci proiettivi di complessi lineari (i quali sono, come abbiamo visto, tutte le specie di complessi quadratici salvo quelli della classe A), rappresenta il sistema triplo di complessi lineari che in generale passa per quei due fasci sullo spazio di piani e giunge così ad avere una rappresentazione del complesso quadratico su una quadrica ordinaria. Però egli non considera un'altra quadrica, che sarebbe importante considerare: quella dei piani che corrispondono ai complessi lineari speciali di quel sistema triplo; se avesse considerato anche questa, sarebbe stato condotto a notare come la sviluppabile di 4ª classe dei piani tangenti comuni a quelle 2 quadriche corrisponda alla superficie singolare del complesso quadratico. La classificazione di questo è così ricondotta, anche sinteticamente, alla classificazione di quelle sviluppabili, ovvero, ciò che fa lo stesso, delle quartiche ordinarie d'intersezione di due quadriche.

Quartiche su una quadrica ordinaria

CARATTERISTICA della quartica o della rigata biquadratica	
	I. — *Quartiche su una quadrica generale.*
[1111]	Caso generale; in ognuno dei due sistemi di generatrici della quadrica ve ne sono 4 tangenti.
[211]	Quartica con punto doppio; in ogni sistema 2 generatrici son venute a coincidere in quella passante pel punto stesso e ne rimangono solo più 2 tangenti propriamente dette alla quartica.
[31]	Quartica con cuspide; in ogni sistema di generatrici della quadrica ve n' è solo più una tangente alla quartica e non passante per la cuspide.
[22]	Quartica scissa in una cubica con una generatrice della quadrica, sua corda. Due altre generatrici dello stesso sistema sono tangenti alla cubica.
[4]	Quartica scissa in una cubica con una generatrice tangente.
	II. — *Quartiche su un cono quadrico.*
$[\bar{1}\,111]$	Caso generale; quattro generatrici del cono toccano la quartica.
$[\bar{1}21]$	Quartica con punto doppio non posto nel vertice del cono.
$[\bar{2}\,11]$	Punto doppio nel vertice del cono, sicchè ogni generatrice di questo contiene solo un altro punto della quartica all'infuori di quello.
$[\bar{1}\,3]$	Cuspide fuori del vertice del cono.
$[\bar{3}\,1]$	Cuspide nel vertice del cono.

(*) Il Weiler nella sua classificazione nota per ogni rigata biquadratica che incontra come superficie singolare a quale specie di Cremona essa appartiene; noi per brevità omettiamo di far questo. Ma solo notiamo che, mentre il Weiler (memoria citata, n.i 9 e 24) è costretto dal metodo che ha seguito a dimostrare espressamente che le superficie singolari relative ai complessi quadratici [(11)211] e

Rigate biquadratiche (E COMPLESSI QUADRATICI CORRISPONDENTI)

I. — *Rigate biquadratiche a direttrici sghembe distinte* (*congruenza lineare generale*).	CARATTERISTICA del complesso quadratico
Caso generale; ognuna delle due direttrici della rigata ha 4 punti e 4 piani cuspidali.	[(11) 1111]
Rigata con generatrice doppia, che taglia le due direttrici; su ciascuna di queste e fuori di quella rimangono solo più due punti cuspidali e due piani cuspidali (*).	[(11) 211]
Rigata con generatrice cuspidale; ognuna delle direttrici ha solo più un punto ed un piano cuspidale, che non appartengano a quella generatrice.	[(11) 31]
La superficie è scissa in una rigata cubica avente quelle due direttrici, una doppia come luogo, l'altra come inviluppo, ed inoltre un punto di quella e un piano di questa (V. n° 120). La rigata cubica ha due punti e due piani cuspidali (risp. sulla prima e sulla seconda delle due direttrici).	[(11) 22]
Rigata cubica, come nel caso precedente, ma completata da un suo punto e da un suo piano cuspidali.	[(11) 4]
II. — *Rigate biquadratiche a direttrici coincidenti* (*congruenza lineare speciale*).	
Caso generale; la direttrice (unica) della rigata ha 4 punti e 4 piani cuspidali.	[(21) 111]
La rigata acquista una generatrice doppia.	[(21) 21]
La direttrice viene ad essere pure una generatrice, per la quale in conseguenza la rigata passerà due volte; allora per ogni punto (e in ogni piano) della direttrice passa solo un'altra generatrice della superficie.	[(31) 11]
La rigata biquadratica ha una generatrice cuspidale.	[(21) 3]
La direttrice è pure generatrice e costituisce una retta cuspidale della superficie.	[(41) 1]

[(21)21] sono appunto le superficie V e VI di CREMONA più generali, ciò risulta invece immediatamente dal nostro metodo, poichè noi abbiamo visto che il complesso più generale di una data caratteristica (di questa classe) ha per superficie singolare la rigata biquadratica più generale avente la caratteristica corrispondente.

CARATTERISTICA della quartica o della rigata biquadratica	
$[\bar{2}\ 2]$	Quartica scissa in una cubica ed una generatrice qualunque del cono.
$[\bar{4}]$	Lo stesso, ma quella generatrice tocca la cubica nel vertice del cono.
	III. — *Quartiche su una coppia di piani* (*cioè coppie di coniche*).
$[(\overline{11})\ 11]$	Coppia generale di coniche aventi comuni 2 punti sulla retta d'intersezione di quei piani.
$[(\overline{21})\ 1]$	Le due coniche si toccano in un punto.
$[(\overline{11})\ 2]$	Una conica del caso generale si scinde in due rette.
$[(\overline{31})]$	Quelle due rette vanno a tagliarsi sulla seconda conica.
$[(\overline{22})]$	Ognuna delle due coniche si scinde nell'intersezione dei due piani ed un'altra retta del piano corrispondente.

(*) Per questo caso del complesso quadratico di caratteristica [(42)] il Weiler (V. n° 45) dicendo che su ogni piano è determinata la conica del complesso (mediante 6 sue tangenti) quando del complesso stesso è data la superficie singolare, fa confusione, comprendendo anche in questo dato la congruenza delle rette singolari. — Pel caso, che per noi è quello immediatamente seguente, cioè pel complesso [(33)], che nel Weiler è al n° 47, questo scienziato dice la congruenza delle rette singolari composta in modo diverso da quello che è realmente, essendo essa composta in realtà da tutte le

	CARATTERISTICA del complesso quadratico
Rigata scissa in una rigata cubica a direttrici coincidenti con un punto e il piano corrispondente di questa direttrice doppia.	[(31) 2]
Lo stesso, ma quel punto e quel piano sono il punto e il piano cuspidali della direttrice doppia.	[(51)]

III. — *Cono e conica (in un punto e un piano formanti una congruenza lineare degenerata).*

Caso generale ; nel fascio di rette comuni al punto e al piano, il cono e la conica hanno 2 rette comuni.	[(22) 11]
Il cono è tangente al piano della conica e questa contiene il vertice del cono; quelle 2 rette coincidono.	[(32) 1]
Il cono del 1° caso si scinde in 2 piani pel punto fisso, o la conica in 2 punti del piano fisso.	[(22) 2]
Nel caso precedente se il cono si scindeva in 2 piani (tangenti alla conica), questi si taglieranno ora in una tangente della conica; se invece la conica si scindeva in 2 punti, la loro congiungente starà sul cono.	[(42)] (*)
Come rigate, il cono e la conica si scindono nel fascio doppio della congruenza lineare e altri 2 fasci; quindi come superficie si scindono nel piano e nel punto fissi (3 volte) e un punto e un piano uniti risp. a quelli (1 volta).	[(33)]

---

rette dei 2 piani e dei 2 punti che formano la superficie singolare (contate 3 volte quelle appartenenti al punto e al piano che contano 3 volte); ed il WEILER doveva accorgersene notando che il complesso [(33)] non è altro che un caso particolare del complesso tetraedrale [(11)(11)(11)], di cui è ben noto che le rette singolari sono le rette, che stanno nelle faccie o nei vertici del tetraedro. Il WEILER poi sbaglia anche per conseguenza nella costruzione delle coniche di questo complesso.

CLASSE C.

166. *Tutti i complessi quadratici nella cui caratteristica vi sono due gruppi caratteristici composti ciascuno di due indici.*

Questi sono tutti i complessi quadratici aventi due fasci di complessi lineari fondamentali (oltre a complessi fondamentali isolati che possono esservi). Le direttrici delle loro congruenze lineari sono 2 coppie di rette sghembe tagliantisi mutuamente e appartenenti come rette doppie al complesso quadratico ed alla sua superficie singolare. Ne segue che questa, essendo di 4° ordine e 4ª classe, dovrà scindersi in due quadriche contenenti entrambe, come generatrici, quelle 4 rette, le quali del resto possono venir a coincidere a 2 a 2; come si vede anche considerando in questo caso la coppia di quadriche come costituente in due modi diversi la rigata biquadratica del caso precedente, secondo che l'una coppia o l'altra di rette doppie si considera come formata dalle direttrici. I complessi di questa classe contengono due coppie distinte di sistemi di ∞' congruenze lineari e sono quindi generabili con fasci proiettivi di complessi lineari in 2 serie distinte di modi.

Le varie specie comprese in questa classe sono:

I. [(11) (11) 11], [(11) (11) 2], [(21) (11) 1], [(31) (11)], [(21) (21)]. Serie omofocale di grado 2.

II. [(22) (11)]. Serie omofocale di grado 1.

Per distinguere tra loro queste varie specie si potrebbe, come per la classe B, considerare la superficie singolare come una rigata biquadratica (il che ora si può fare in 2 modi) e quindi classificar questa (la cui caratteristica mostra che essa si scinde in una coppia di rigate quadriche) in modo simile alla classificazione delle quartiche (anzi coppie di coniche) su una quadrica. Però i caratteri distintivi tra quelle specie si riconoscono così facilmente colla teoria da noi premessa che non occorre più neppure far uso di quella considerazione. Avremo così quanto segue:

Nel caso [(11) (11) 11], che è il più generale di questa classe, si ha la superficie singolare scissa in due quadriche aventi comuni 4 generatrici nella posizione più generale (*).

Nel caso [(11) (11) 2] interviene una nuova retta doppia (corrispondente all'indice caratteristico isolato 2) tagliante quelle 4 che già si avevano. Ne segue immediatamente che delle due quadriche una si scinderà nella coppia di piani tangenti all'altra passanti per quella retta, e nella coppia di punti in cui questa stessa retta taglia quella quadrica (**).

(*) Per questo caso, che nel WEILER è al n° 3, questi asserisce che per ogni retta dello spazio passano 4 complessi aventi la stessa superficie singolare. Abbiamo visto invece che ne passano due soli.

(**) Questo complesso quadratico fu studiato geometricamente dall'HIRST come formato dalle rette che tagliano 2 piani correlativi in punti coniugati (V. *Collectanea Mathematica, etc.*, pag. 51-73. « *On the complexes generated by two correlative planes* »).

[(21) (11) 1] . Delle due coppie di rette doppie del caso generale, una (quella corrispondente al gruppo caratteristico (21)) si compone ora di due rette coincidenti. Dunque in questo caso le due quadriche in cui si scinde la superficie singolare sono raccordate secondo una generatrice.

[(31) (11)] . Una delle due quadriche si scinde in una coppia di piani condotti per una generatrice dell'altra e nei loro punti di contatto con questa.

[(21) (21)] . . Le due quadriche del caso generale saranno raccordate secondo due generatrici di diverso sistema.

[(22) (11)] . Considerando questo come caso particolare del caso [(22) 2] della classe *B*, si vede che la superficie singolare viene a comporsi di un piano ed un punto (uniti) contati due volte, ed altri 2 piani e 2 punti.

Classe *D*.

167. *Complessi quadratici nella cui caratteristica vi sono tre gruppi caratteristici composti ciascuno di due indici.*

A questa classe appartiene evidentemente solo il complesso quadratico, la cui caratteristica è:

[(11) (11) (11)] .

Serie omofocale di grado 1. Vi sono tre fasci distinti di complessi lineari fondamentali; ad ogni fascio corrispondono, come assi dei due complessi speciali, due rette doppie sghembe, cosicchè le rette doppie di questo complesso e quindi della sua superficie singolare sono 6 rette, ciascuna delle quali taglia tutte le altre, meno una, cioè sono i 6 spigoli di un tetraedro. Ne segue immediatamente che i piani ed i vertici di questo costituiscono come luogo e come inviluppo la superficie singolare, e che tutte le rette contenute in quei piani od in quei punti sono rette del complesso.

Si riconosce di quì che questo complesso è il noto *complesso tetraedrale;* tuttavia ci pare conveniente il dimostrarne direttamente la sua proprietà caratteristica più conosciuta, tanto più che la dimostrazione seguente è notevole per la sua semplicità e brevità. Noi abbiamo dimostrato (V. n° 143) che il rapporto anarmonico dei 4 punti o dei 4 piani della superficie singolare passanti per una retta qualunque dello spazio è uguale a quello dei 4 complessi quadratici della serie omofocale, i quali passano per la retta stessa, benchè del resto questi complessi quadratici possano essere divenuti evanescenti (V. n° 139) essendo solo più rappresentati da focali; questi complessi evanescenti passanti per ogni retta dello spazio sono tanti quanti sono i gruppi caratteristici di due o più indici contenuti nella caratteristica. Nel caso [(11) (11) (11)] sono dunque 3 e quindi se si considerano tutte le rette appartenenti ad un complesso qualunque (non evanescente) avente questa caratteristica, per tutte passeranno gli stessi 4 complessi della serie omofocale, cioè quello considerato ed i 3 evanescenti, e quindi è costante il rapporto anarmonico che la retta stessa determina sulla superficie singolare, ed è uguale all'invariante assoluto del complesso considerato (V. n° 141).

Dunque il complesso [(11) (11) (11)] gode della proprietà che le sue rette tagliano secondo un rapporto anarmonico fisso le 4 faccie del suo tetraedro singolare (o correlativamente), e questa è appunto la definizione più usata del complesso tetraedrale, alla quale volevamo giungere (*).

Di questo complesso sono casi particolari i complessi quadratici aventi per caratteristiche [(22) (11)] e [(33)], da noi già incontrati nelle classi precedenti.

CLASSE *E*.

168. *Complessi quadratici, le cui caratteristiche contengono (oltre ad indici caratteristici isolati) un gruppo caratteristico di* 3 *indici.*

Essi hanno (oltre a complessi fondamentali isolati) una serie lineare doppiamente infinita di complessi lineari fondamentali, cioè tutti i complessi lineari contenenti una determinata rigata quadrica: la rigata quadrica coniugata conterrà gli assi di quelli speciali tra quei complessi fondamentali, cioè sarà tutta composta di rette doppie, donde segue che per tutti i complessi quadratici di questa classe la superficie singolare si riduce come luogo e come inviluppo (nel senso ordinario della parola) ad una superficie quadrica contata due volte; quella superficie cioè che contiene quelle due rigate coniugate. Se i tre indici del gruppo caratteristico sono uguali tutti ad 1, allora vedemmo che la quadrica è generale. Se il primo indice è > 1 la quadrica è semplicemente specializzata, cioè è scissa come luogo e come inviluppo in una coppia di piani ed una coppia di punti, sicchè le rette doppie del complesso formano due fasci, ed i complessi fondamentali costituiscono la serie dei complessi lineari che contengono la coppia di fasci di rette coniugata a quella. Se entrambi i due primi indici sono > 1, allora vedemmo pure che la quadrica è doppiamente specializzata, cioè i 2 punti ed i 2 piani in cui si scindeva nel caso precedente vengono a coincidere, di modo che la superficie singolare si comporrà di un piano con un suo punto contati 4 volte. Finalmente, la serie lineare doppiamente infinita di complessi fondamentali è tutta composta di complessi speciali, quando tutti e tre quegl'indici sono > 1, vale a dire nel solo caso [(2 2 2)]; in questo caso i loro assi sono le rette o di un piano o di un punto e sono ancora rette doppie del complesso; considereremo di nuovo questo caso studiando l'ultima classe. Intanto notiamo ancora come conseguenza di cose esposte che tutti i complessi quadratici che qui consideriamo si possono in infiniti

(*) Il teorema citato del n° 143 può anche servire a dimostrare altre proposizioni notevoli. Così 4 complessi lineari fondamentali isolati di un complesso quadratico hanno comuni due rette, per ciascuna delle quali passeranno quei quattro complessi lineari, che appartengono, contati doppiamente, alla serie omofocale: dunque esse determinano lo stesso rapporto anarmonico sulla superficie singolare. Così pel complesso quadratico avente un gruppo di 2 indici caratteristici, come [(11) 1111], vi sono delle rigate quadriche (4 in quel caso), intersezioni di 3 complessi fondamentali isolati, tali che le loro rette tagliano la superficie singolare nello stesso rapporto anarmonico, che è un invariante assoluto. Così ancora segue da quel teorema che nel complesso [(11) (11) 11] tutte le rette della congruenza dei due complessi fondamentali isolati determinano uno stesso rapporto anarmonico sulla superficie singolare. Dunque: se due quadriche si tagliano in un quadrilatero sghembo, tutte le rette appoggiate sulle diagonali di questo tagliano le quadriche secondo un rapporto anarmonico fisso. Ecc.

modi generare come luogo delle congruenze lineari comuni ai complessi corrispondenti di due fasci proiettivi di complessi lineari, purchè questi fasci abbiano le loro congruenze di base in posizione speciale, cioè aventi comune una rigata quadrica (quella delle rette doppie), od in altri termini purchè vi sia un complesso lineare contenuto in entrambi i fasci. E viceversa due fasci di complessi lineari posti in tale posizione generano sempre un complesso quadratico della classe che ora consideriamo (o delle due più speciali, che ancor ci rimangono da considerare). — Ogni retta di questo complesso quadratico è congiunta alla rigata quadrica delle rette doppie da una congruenza lineare che è tutta contenuta nel complesso stesso.

Le specie di complessi, che questa classe abbraccia, sono (divise in sottoclassi nel modo suddetto, e tralasciando la [(2 2 2)]):

I. *Superficie singolare: una quadrica doppia non degenerata:*

[(111) 111] , [(111) 21] , [(111) 3] . Serie omofocale di grado 2.

II. *Quadrica degenerata in due piani con due punti:*

[(211) 11] , [(211) 2] , [(311) 1] , [(411)] . Serie omofocale di grado 2.

III. *Quadrica degenerata in un piano doppio con un punto doppio:*

[(221) 1] , [(321)] . Serie omofocale di grado 1.

Prima però di passare alla distinzione di queste varie specie, occorre ancora che vediamo delle proprietà generali comuni a tutte (anche alle specie contenute nella classe che considereremo dopo questa), proprietà riguardanti le rette singolari e le focali della serie omofocale, e che si deducono tutte dalle cose dette al n° 139. Per ogni complesso quadratico di questa classe la congruenza di 4° grado delle rette singolari si scinde in 4 congruenze lineari, distinte o coincidenti. Essendovi un gruppo caratteristico di 3 indici, quei complessi quadratici hanno una *quaterna focale* di rette appartenenti alla rigata quadrica comune alla serie lineare corrispondente di complessi fondamentali, cioè alla rigata coniugata a quella delle rette doppie, e questa quaterna focale è comune a tutta la serie omofocale e basta ad individuarla. Delle 4 rette (distinte o coincidenti) di cui essa si compone, ciascuna è direttrice di una delle 4 suddette congruenze lineari di rette singolari di uno qualunque di questi complessi quadratici. Ciascuna di queste congruenze lineari contiene la rigata quadrica delle rette doppie ed ha quindi entrambe le direttrici giacenti sulla rigata coniugata; ma mentre l'una di queste direttrici è fissa (quella cioè che appartiene alla quaterna focale), l'altra varia col variare del complesso quadratico nella serie omofocale. Inoltre vi è tra quelle due direttrici un'altra differenza importante, cioè questa che mentre un punto qualunque della superficie singolare di 2° grado è *singolare* in quanto che il suo cono del complesso si scinde in due piani tagliantisi in una generatrice di quella appartenente al sistema delle rette doppie del complesso (sicchè per un tal punto singolare della serie omofocale di complessi quadratici la retta singolare corrispondente non varia col variare del complesso, cioè non si ha un fascio di rette singolari corrispondenti, come per un ordinario punto singolare), invece per un punto di una

direttrice appartenente alla quaterna focale quei due piani coincidono nel piano che congiunge il punto stesso all'altra direttrice della corrispondente congruenza di rette singolari, e similmente ogni piano passante per una retta focale ha la conica del complesso scissa in due punti coincidenti nel punto d'intersezione di quel piano colla direttrice coniugata. Cosicchè quelle 4 direttrici delle congruenze di rette singolari, le quali costituiscono la quaterna focale, hanno tutti i loro punti e piani per punti e piani *doppi* rispetto ad ogni complesso della serie omofocale, mentre ciò non accade per le altre direttrici; questo spiega anche il perchè quelle caratterizzino la serie omofocale di complessi quadratici, mentre quelle direttrici *secondarie* mutano col mutare il complesso in questa serie (*). In ogni retta singolare di uno di questi complessi quadratici il punto singolare ed il piano singolare corrispondenti saranno determinati dallo stare il punto sulla direttrice principale (focale) della congruenza lineare singolare cui quella retta appartiene, e dal passare il piano per quella direttrice stessa, e non per la direttrice secondaria come afferma il Weiler.

Risulta immediatamente da proposizioni generali da noi stabilite che ogni complesso lineare fondamentale di un complesso quadratico qualunque di questa classe contiene o l'uno o l'altro dei due sistemi di generatrici della quadrica, che è super-

---

(*) Il Weiler nel suo lavoro sbaglia completamente a proposito di queste congruenze di rette singolari, attribuendo alle 2 direttrici di una stessa congruenza uffizi correlativi, contrariamente a quanto accade. Egli in fatti afferma a proposito dei casi [(111) 111], [(211) 11], [(111) 21], ecc., ripetutamente che delle due direttrici di una di quelle congruenze l'una è luogo di punti doppi, l'altra inviluppo di piani doppi del complesso quadratico; il che non è. In conseguenza dà anche qualche costruzione erronea. Credo perciò non inutile il dare qui i valori veri delle coordinate delle direttrici delle congruenze singolari, almeno per due casi. Pel caso più generale [(111) 111] supponendo co Weiler che l'equazione di condizione per la retta e l'equazione del complesso quadratico siano risp.:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=0\,, \qquad \lambda_4 x_4^2+\lambda_5 x_5^2+\lambda_6 x_6^2=0\,,$$

si trovano per le direttrici x', x'' di una congruenza lineare di rette singolari le coordinate:

$$x_1'=x_2'=x_3'=0\,, \qquad x_4'=\sqrt{\lambda_4(\lambda_5-\lambda_6)}\,,$$
$$x_5'=\sqrt{\lambda_5(\lambda_6-\lambda_4)}\,, \qquad x_6'=\sqrt{\lambda_6(\lambda_4-\lambda_5)}\,,$$
$$x_1''=x_2''=x_3''=0\,, \qquad x_4''=\sqrt{\lambda_4(\lambda_5-\lambda_6)}\,(\lambda_4-\lambda_5-\lambda_6)\,,$$
$$x_5''=\sqrt{\lambda_5(\lambda_6-\lambda_4)}\,(\lambda_5-\lambda_6-\lambda_4)\,, \qquad x_6''=\sqrt{\lambda_6(\lambda_4-\lambda_5)}\,(\lambda_6-\lambda_4-\lambda_5)\,,$$

e per le altre congruenze singolari basterà in queste espressioni cambiare il segno ad uno dei 3 radicali che vi compaiono. Si può allora verificare analiticamente che le 4 direttrici che si hanno da x' sono appunto quelle principali, che dicemmo rette focali, mentre le 4 rette x'' sono le direttrici secondarie; e si verifica pure immediatamente che il passaggio ad un complesso qualunque della serie omofocale, passaggio che si effettua ponendo $\frac{\lambda_i}{k\lambda_i+1}$ in luogo di λ_i: non muta le rette x', ma muta le rette x''. Per questo caso il Weiler non trova le coordinate di quelle direttrici. Le dà invece per il caso [(211) 11], ma dà espressioni errate, il che spiega come anche in questo caso trovi risultati erronei. Le vere coordinate delle due direttrici per ciascuna congruenza di rette singolari, nell'ipotesi che all'equazione del complesso si dia, come fa il Weiler, la forma:

$$\lambda_1(p_{12}+p_{34})^2-\lambda_2(p_{12}-p_{34})^2+p_{14}^2=0\,,$$

sono:

$$\left.\begin{matrix} p'_{12} \\ p'_{34}\end{matrix}\right\} =2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\,, \quad \left.\begin{matrix} p'_{34} \\ p'_{12}\end{matrix}\right\} =0\,, \quad p'_{23}=\lambda_2-\lambda_1\,, \quad p'_{13}=p'_{42}=p'_{14}=0\,,$$

$$\left.\begin{matrix} p''_{34} \\ p''_{12}\end{matrix}\right\} =2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\,, \quad \left.\begin{matrix} p''_{12} \\ p''_{34}\end{matrix}\right\} =0\,, \quad p''_{23}=\lambda_1+\lambda_2\,, \quad p''_{13}=p''_{42}=p''_{14}=0\,,$$

di cui p' è direttrice principale, o focale, p'' è direttrice secondaria.

ficie singolare: contiene quello a cui appartengono le 8 direttrici considerate se fa parte del sistema lineare doppiamente infinito di complessi fondamentali, altrimenti esso conterrà il sistema delle rette doppie. Orbene in quest'ultimo caso si corrisponderanno rispetto al complesso fondamentale considerato le 4 direttrici principali a 2 a 2, e anche le 4 direttrici secondarie a 2 a 2. Questo mostra come un complesso quadratico della serie omofocale sia determinato quando, essendo già data questa e per conseguenza la quaterna di rete focali (direttrici principali) si dà ancora una direttrice secondaria di una congruenza lineare singolare. Si vede pure che se 2 rette della quaterna focale coincidono, coincideranno pure con esse le direttrici secondarie corrispondenti, cosicchè due delle 4 congruenze singolari coincideranno nella congruenza speciale delle tangenti lungo quella retta alla superficie singolare.

Venendo finalmente al distinguere i vari casi che si presentano in questa classe di complessi quadratici ricordiamo che la quaterna focale proveniva dalla intersezione di due quadriche a 1 dimensione in uno spazio lineare a due dimensioni (due coniche nel piano), delle quali due quadriche una notevole è rappresentata dalla rigata quadrica in cui sta quella quaterna di rette. Dunque dal teorema del n° 160 siamo ridotti a classificare le quaterne di punti d'intersezione di una conica fissa con altre coniche nel piano. Ora dalla nostra teoria generale risulta immediatamente che nel caso [111] quei 4 punti sono distinti, nel caso [21] due di essi coincidono, nel caso [3] ne coincidono tre. Inoltre nel caso [(11)1] coincidono a coppie in 2 punti e nel caso [(21)] coincidono tutti 4. — Se la conica fissa si scinde in una coppia di rette, allora nel caso $[\bar{1}\,11]$ si hanno 2 punti su ciascuna retta, nel caso $[\bar{1}\,2]$ sull'una retta coincidono quei due punti, nel caso $[\bar{2}1]$ su ciascuna delle due rette uno dei 2 punti è andato a coincidere col loro punto d'intersezione, nel caso $[\bar{3}]$ sull'una delle due rette anche l'altro punto è andato a coincidere con questo, e nel caso $[\bar{1}\,(11)]$ su ciascuna delle due rette i 2 punti del caso generale coincidono. — Finalmente se la conica fissa si riduce ad una retta doppia, allora nel caso $[(\overline{11})1]$ vi sono 2 punti (doppi) distinti, e nel caso $[(\overline{21})]$ questi coincidono.

Applicando adunque la regola fornita dal teorema citato avremo per le varie specie di complessi quadratici le seguenti particolarità, dipendenti solo, entro ciascuna delle 3 sottoclassi, dalla quaterna focale.

I. *Superficie singolare una quadrica doppia non degenerata.*

[(111)111]. Caso generale: le 4 rette focali, e quindi anche le 4 congruenze lineari di rette singolari sono distinte. Vi sono 3 complessi fondamentali isolati involutori.

[(111)21]. Due rette focali coincidono in una retta doppia del complesso quadratico (proveniente dall'indice caratteristico 2); due delle congruenze lineari singolari coincidono nella congruenza speciale delle tangenti alla quadrica lungo quella retta.

[(111)3]. Tre rette focali coincidono in una retta doppia, e quindi anche 3 delle 4 congruenze singolari coincidono nella congruenza speciale delle tangenti alla quadrica lungo quella.

II. *Quadrica degenerata in due piani con due punti comuni.*

[(211)11]. Caso generale: I due sistemi di generatrici della quadrica sono scissi in due coppie coniugate di fasci, di cui l'una è composta di rette doppie del complesso, l'altra contiene le quattro rette focali, 2 per ciascun fascio. Vi sono 4 congruenze lineari di rette singolari, di cui ciascuna ha per direttrici una di quelle rette focali e una retta dell'altro fascio (di quella stessa coppia di fasci).

[(211)2]. Sull'un fascio coincidono due rette focali in una retta che sarà doppia pel complesso quadratico. Le congruenze lineari di rette singolari relative alle altre due rette focali non si specializzano (*); invece coincidono le altre due, e, com'è facile vedere, in una congruenza lineare che si scinde nel piano e nel punto di rette i quali contengono quel fascio.

[(311)1]. Delle due rette focali di ciascuno dei 2 fasci, una per ciascuno è venuta a coincidere colla retta comune ai due fasci, e corrispondentemente due delle 4 congruenze lineari di rette singolari coincidono in una congruenza speciale avente quella retta per asse.

[(411)]. Tre delle 4 rette focali coincidono colla retta comune ai 2 fasci e dànno luogo ad una congruenza lineare di rette singolari (contata tre volte) scissa nel piano e nel punto di un fascio; rimane nell'altro una retta focale che dà luogo ad una congruenza lineare generale di rette singolari.

III. *Superficie singolare: un piano e un punto uniti contati 4 volte.*

[(221)1]. Due rette focali distinte per quel punto in quel piano, le quali sono assi di congruenze lineari speciali, che, contate doppiamente, comprendono tutte le rette singolari del complesso quadratico.

[(321)]. Quelle due rette focali e quindi anche quelle due congruenze lineari, coincidono.

CLASSE *F*.

169. *Complessi quadratici, le cui caratteristiche contengono un gruppo di 3 indici ed uno di 2.*

Essi hanno un sistema lineare doppiamente infinito di complessi lineari fondamentali ed inoltre un fascio di altri complessi lineari fondamentali involutori a quelli. Vi è dunque una rigata quadrica di rette doppie ed inoltre vi sono due rette doppie (distinte o coincidenti) sulla rigata quadrica coniugata. La superficie di 2° grado che contiene queste rigate è ancora, contata doppiamente, la superficie singolare come accadeva per la classe precedente. Il complesso quadratico è ancora generabile con due fasci di complessi lineari proiettivi, le cui congruenze di base abbiano comune la rigata quadrica delle rette doppie, ma anche con fasci convenienti di complessi lineari,

(*) Il WEILER (loc. cit., n° 27) dice invece che queste due congruenze lineari sono speciali con direttrici che si tagliano.

le cui congruenze di base hanno solo comuni le 2 rette doppie contenute nella rigata quadrica coniugata. Si hanno solo queste 3 specie:

[(111)(11)1], [(111)(21)], [(211)(11)]. *Serie omofocale di grado* 1°.

Si può anche per questa classe considerare una quaterna focale per la serie omofocale di complessi quadratici come pei complessi della precedente classe E (soltanto che quella quaterna sarà specializzata) e anzi valgono anche per la classe che ora consideriamo le proprietà relative a quella quaterna focale ed alle congruenze di rette singolari che vedemmo per la classe precedente, poichè quelle proprietà non dipendevano che dall'esistenza di un gruppo caratteristico di 3 indici. In particolare avremo la distinzione tra quelle tre specie comprese in questa classe paragonandone quelle loro quaterne focali a quaterne di punti di una conica aventi per caratteristiche (V. n° 160) [(11)1], [(21)], [$\bar{1}$(11)], rispettivamente. Avremo dunque:

[(111)(11)1]. Oltre alla rigata quadrica (non specializzata) di rette doppie del complesso quadratico, questo ha altre due rette doppie nella rigata coniugata (*), nelle quali coincidono a coppie le rette della quaterna focale: le rette singolari formano due congruenze lineari speciali (contate due volte) aventi quelle due rette per assi.

[(111)(21)]. Quelle due rette doppie coincidono in una retta, asse di una congruenza lineare speciale di tangenti alla quadrica, costituente, contata 4 volte, la congruenza delle rette singolari.

[(211)(11)]. La quadrica singolare si scinde in una coppia di piani con una coppia di punti. Oltre ad una copia di fasci di rette doppie del complesso, ogni fascio della coppia coniugata contiene un'altra retta doppia del complesso quadratico, ecc.

Classe G.

170. *Complessi quadratici le cui caratteristiche contengono due gruppi di* 3 *indici, e quindi aventi per caratteristica:*

[(111)(111)].

Un complesso quadratico di questa specie ha due serie lineari doppiamente infinite di complessi lineari fondamentali, le quali, per quanto sappiamo, saranno involutorie; quindi gli assi dei loro complessi speciali formeranno le due rigate quadriche coniugate di una stessa superficie di 2° grado, e saranno rette doppie del complesso e della sua superficie singolare, la quale si ridurrà quindi a quella superficie di 2° grado contata due volte. Ora il fascio di rette determinato da due rette doppie provenienti da gruppi caratteristici diversi sappiamo esser sempre composto di rette del complesso quadratico. Applicando questa proposizione a due generatrici qualunque di diverso sistema di quella superficie di 2° grado, noi vediamo che tutte le tangenti a questa superficie (le quali evidentemente formano un complesso quadratico) appartengono al complesso quadratico considerato. Dunque ogni complesso della specie considerata non è altro che il complesso delle tangenti di una superficie di 2° grado, la quale ne è superficie singolare.

(*) Il Weiler non nota il comparire di queste rette doppie separate sia in questo caso, sia nel successivo.

La formula generale ci dà *o* per grado della serie omofocale di questo complesso quadratico, ed in realtà vi è solo un complesso quadratico che abbia quella superficie singolare. Bisogna notare che dicendo « superficie singolare » intendiamo non solo l'insieme dei suoi punti e dei suoi piani, ma anche l'insieme di quei suoi punti e piani che sono doppi rispetto al complesso quadratico. Quindi le superficie singolari p. e. dei complessi quadratici [(111)111] e [(111)(111)] sono ben diverse, quantunque costituiscano entrambe delle superficie generali di 2° grado doppie; ma pel complesso [(111)111] i punti ed i piani doppi formano 4 generatrici determinate di quella superficie (la quaterna focale), mentre pel complesso [(111)(111)] tutti i punti ed i piani di quella superficie di 2° grado sono doppi (V. anche la nota al n° 144).

Come caso particolare del complesso ora visto delle tangenti di una superficie di 2° grado va considerato il caso [(222)], che incontrammo nella classe *E*. Si può in fatti imaginare il caso [(222)] come derivato da quello [(111)(111)] facendo avvicinare indefinitamente i valori delle due radici triple del discriminante corrispondenti ai due gruppi caratteristici di questa. Già notammo che in tal caso vi è tutto un piano (o tutto un punto) di rette doppie del complesso quadratico e della sua superficie singolare: ciò proviene dal fatto che le due serie lineari doppiamente infinite di complessi fondamentali essendo involutorie devono diventare una serie di complessi lineari tutti speciali, quando vengono a coincidere. È chiaro che quella quadrica come luogo di punti (o inviluppo di piani) si sarà ridotta a quel piano doppio (o quel punto doppio), e quindi come inviluppo di piani (o luogo di punti) si sarà ridotta ad una conica di quel piano (o ad un cono avente il vertice in quel punto). Dunque nel caso [(222)] il complesso quadratico si compone o delle secanti di una conica, o delle tangenti di un cono. — È da notarsi però che in questi casi la superficie di piani singolari, o rispettivamente dei punti singolari, si può considerare come indeterminata: ogni piano dello spazio è singolare pel complesso quadratico delle secanti di una conica ed ogni punto dello spazio è singolare pel complesso quadratico delle tangenti di un cono quadrico.

171. Con ciò è compiuta la classificazione, che intendevamo fare dei complessi quadratici, trascurando quelle specie che si scindono in complessi lineari (*). Come già facemmo per la classe *A* dei complessi quadratici, così per le altre si possono dare le caratteristiche delle congruenze quadratiche focali, facendo uso del teorema

---

(*) Tutti i risultati da noi ottenuti vanno d'accordo con quelli del Weiler salvo alcune inesattezze, che già rilevammo, della memoria di questo. Vogliamo ancora notare qualche altra inesattezza di quella memoria, pensando così di far cosa utile ai cultori della geometria della retta, ai quali può spesso accadere di doverla consultare. Pel complesso [(22) 11], la cui superficie singolare vedemmo scindersi in un cono quadrico ed una conica, le rette singolari formano due congruenze quadratiche risp. di tangenti al cono e di secanti della conica; i 2 complessi lineari a cui queste congruenze risp. appartengono non sono punto involutori come dice il Weiler (n° 23). Lo stesso errore si ripete pel caso [(32) 1], che vedemmo esser caso particolare di questo (Weiler, n° 35). Nel caso [(22) 2] vi è, come parte della congruenza di 2° grado delle rette singolari, una congruenza quadratica di tangenti di un cono (o di secanti di una conica), la quale appartiene ad un complesso lineare che non è quello speciale indicato dal Weiler (n° 40), ma un certo complesso lineare generale. Quest'ultima osservazione fu pure già fatta, almeno in parte, dall'Hirst nella memoria citata, in cui si trovano anche corrette due altre inesattezze del Weiler, a proposito dei complessi quadratici [(11) (11) 2] e [(31) 11)], le quali perciò non abbiamo notato.

dato al n° 160. Però è chiaro, per le teorie svolte, che le classi E ed F di complessi quadratici non possono avere per congruenze quadratiche focali che congruenze degenerate in coppie di congruenze lineari, e che le classi D e G non hanno congruenze focali, sicchè rimangono soltanto le congruenze focali dei complessi delle classi B e C. Come le congruenze quadratiche che ottenemmo dalla classe A di complessi quadratici avevano soltanto congruenze lineari fondamentali isolate e per focali delle rigate biquadratiche (non già come *superficie* focali, ma come luoghi di rette), così quelle ottenute dalle classi B, C hanno fasci di congruenze lineari fondamentali e quaterne di rette focali.

Specie dei complessi quadratici	*Specie delle loro congruenze quadratiche focali*	
[(11)1111]	[(11)111]	
[(11)211]	[(11)21] ,	$[\bar{1}(11)11]$
[(11)31]	[(11)3] ,	$[\bar{2}(11)1]$
[(11)22]		$[\bar{1}(11)2]$
[(11)4]		$[\bar{3}(11)]$
[(21)111]	[(21)11] ,	
[(21)21]	[(21)2] ,	$[\bar{1}(21)1]$
[(21)3]		$[\bar{2}(21)]$
[(31)11]	[(31)1]	
[(31)2]		$[\bar{1}(31)]$
[(41)1]	[(41)]	
[(22)11]	[(22)1]	
[(22)2]		$[\bar{1}(22)]$
[(32)1]	[(32)]	
[(11)(11)11]	[(11)(11)1]	
[(11)(11)2]		$[\bar{1}(11)(11)]$
[(21)(11)1]	[(21)(11)]	

Siccome noi abbiamo già visto le proprietà che distinguono quelle varie specie di complessi quadratici e quindi le loro superficie singolari, così essendo queste le superficie focali di quelle congruenze quadratiche si può dopo queste indicazioni riguardare come compiuta anche la classificazione delle congruenze quadratiche. Queste congruenze si distinguono anzi tutto in 2 classi, secondo che appartengono ad un complesso lineare generale ovvero ad un complesso lineare speciale. Nel classificare i complessi quadratici A noi trovammo (V. alla fine del n° 164) 7 specie di congruenze quadratiche della 1ª classe, e 12 della 2ª classe. Ora poi ne troviamo altre 11 specie della 1ª classe e 9 della 2ª classe. In totale vi sono dunque 18 specie di congruenze quadratiche appartenenti ad un complesso lineare generale, e 21 specie di congruenze quadratiche appartenenti al complesso speciale delle rette secanti di una retta fissa;

in genere vi sono 39 specie di congruenze quadratiche (*). — Similmente contando le specie da noi trovate di complessi quadratici se ne hanno 49.

Quanto poi alla classificazione, che pure intendevamo fare, delle rigate biquadratiche, essa è contenuta (tenendo anche conto di tutte le degenerazioni possibili di quelle rigate) in quella delle classi B, C, D, F di complessi quadratici.

172. Terminiamo col ricordare, riguardo alla classificazione dei complessi quadratici, che entro ciascuna tra parecchie delle specie che noi così abbiamo trovato possono esservi ancora varii casi diversi proiettivamente tra loro: ciò accade per tutte quelle specie che sono dotate di invarianti assoluti. Noi vedemmo (n° 141) come si riconoscano queste specie e come per ciascuna di esse si possa assegnare immediatamente non solo il numero degl'invarianti assoluti, ma anche quei gruppi di elementi di forme di 1ª specie che li dànno come rapporti anarmonici (**). Così, come notammo, il complesso quadratico più generale ha 4 invarianti assoluti, di cui 3 appartengono alla sua superficie singolare. Così la superficie singolare corrispondente alla caratteristica [222] non avrà invarianti assoluti, sicchè potremo conchiudere che una superficie di Steiner (o la sua reciproca) non ha invarianti assoluti. Così la superficie singolare [(11)1111], cioè la rigata biquadratica, ha 2 invarianti assoluti (V. n° 156), e possiamo anche trovarli applicando la regola generale data. Si consideri cioè il piano tangente in un punto qualunque di quella superficie: la taglierà in una generatrice ed una cubica passante per quel punto; le 4 tangenti condotte da questo a quella cubica, e quella generatrice formano un gruppo di 5 rette di un fascio, che rimarrà proiettivo a se stesso mutando il punto della superficie ed avrà per invarianti assoluti quelli della superficie. Per uno di questi invarianti assoluti si potrà dunque assumere il rapporto anarmonico di una cubica piana contenuta nella superficie, donde risulta che questo rapporto anarmonico è lo stesso per tutte le cubiche piane della superficie, proprietà nota importante della rigata biquadratica e che noi così abbiamo

---

(*) Con una rappresentazione, di cui abbiamo già parlato, e che si riduce in sostanza ad una proiezione stereografica di una quadrica a 3 dimensioni (generale o specializzata), si può ricondurre allo studio delle congruenze quadratiche di un complesso lineare, generale o speciale, lo studio delle superficie di 4° ordine con conica doppia, generale o scissa in due rette — od anche viceversa. In questo senso dunque si può dire che la classificazione di quelle congruenze quadratiche e la classificazione di queste superficie di 4° ordine sono identiche tra loro. Il fatto che nella geometria della retta non si ha il corrispondente del caso in cui la conica doppia di quelle superficie si scinde in due rette coincidenti dipende dal non potere un complesso lineare essere doppiamente specializzato, perchè la quadrica di rette non è specializzata.

(**) Il teorema, che ivi notammo, cioè che ogni fascio di complessi lineari polari di rette rispetto ad un complesso quadratico contiene sempre un complesso involutorio con ogni sistema lineare di complessi fondamentali di quello, dà luogo a nuove proprietà riguardanti varie specie di complessi quadratici. Così in ogni complesso quadratico avente un fascio di complessi fondamentali potremo dire che le due rette doppie corrispondenti di quello stanno sempre in un complesso lineare rispetto a cui sono coniugate una retta qualunque dello spazio e la sua polare rispetto al complesso quadratico. Così in ogni complesso quadratico avente un sistema lineare doppiamente infinito di complessi fondamentali, e quindi la superficie singolare ridotta ad una quadrica doppia, p. e. nel caso [(111) 111], una retta e la sua polare rispetto al complesso taglieranno le stesse due generatrici di un certo sistema di quella quadrica: il sistema cioè delle rette doppie del complesso. Quindi nel caso [(111) (111)] una retta e la sua polare tagliano le stesse generatrici di entrambi i sistemi della quadrica singolare e quindi sono polari rispetto a questa quadrica nel senso ordinario della parola.

ottenuto come caso particolare di una proprietà delle superficie singolari di complessi quadratici. Similmente notando che la superficie singolare [(11)(11)11] deve avere un invariante assoluto ed interpretando questo nello stesso modo che nel caso precedente si ha una proprietà notevole di due quadriche passanti per uno stesso quadrilatero sghembo. E così via dicendo.

Così nella specie più generale di complessi quadratici, cioè [111111], è incluso quel complesso quadratico, che fu studiato dal *Battaglini* (che lo considerava invece come il complesso quadratico più generale) (*). La superficie singolare di un tale complesso è un *tetraedroide* di *Cayley*, e corrisponde alla relazione d'involuzione del gruppo dei 6 complessi quadratici speciali della serie omofocale relativa a quella superficie. Inoltre se si prendono i due elementi doppi di quell'involuzione si hanno i due soli complessi quadratici di Battaglini relativi al tetraedroide (cosa che dimostrerò in altra occasione). È notevole come dalla considerazione di quell'involuzione e delle note proprietà della superficie di Kummer si ricavino quelle del tetraedroide. Se si considera un piano doppio qualunque, i 6 punti doppi che stanno sulla sua conica di contatto formeranno un'involuzione e quindi saranno congiunti a 2 a 2 da 3 rette concorrenti in un punto, pel quale in conseguenza passeranno altri 3 piani doppi. Si vede così che i 16 piani doppi passano a 4 a 4 per certi 4 punti (pei quali il cono circoscritto alla superficie si scinderà in conseguenza in due coni quadrici) e che similmente i 16 punti doppi stanno a 4 a 4 su certi 4 piani (nei quali la curva d'intersezione colla superficie si scinderà in due coniche). Ma è pure facile scorgere che quei 4 punti e questi 4 piani formano lo stesso tetraedro, poichè in uno di questi piani i 4 punti doppi della superficie, che vi stanno, formano un quadrangolo, di cui ognuno dei 3 punti diagonali, stando su due rette congiungenti di punti doppi, e quindi intersezioni di piani doppi, della superficie, è punto comune a 4 piani doppi, ossia è uno dei 4 punti sopra considerati. Si hanno così le proprietà principali del tetraedroide (**).

(*) V. *Giornale di matematiche*, vol. 6 e 7.

(**) L'esposizione delle proprietà note del complesso quadratico di BATTAGLINI e di alcune mie ricerche su esso furono oggetto di alcune conferenze da me tenute nell'anno scolastico 1881-82 nella scuola di Magistero relativa al corso di Geometria superiore. Recentemente ne trovai una nuova proprietà interessante, che dimostrerò in altra occasione: quella di potersi rappresentare su un complesso *lineare* di coniche iscritte in un tetraedro.

Il complesso quadratico di BATTAGLINI si può poi anche generare (in infiniti modi) come luogo delle rette che tagliano armonicamente due quadriche fisse (o correlativamente). Questa proprietà che fu scoperta dall'ASCHIERI (*Giornale di mat.*, vol. 8°), assunta come definizione del complesso quadratico, conduce a cercare quante e quali delle diverse specie di complessi quadratici si possano generare in quel modo. Il mio amico carissimo GINO LORIA ed io abbiamo fatto insieme questa ricerca assai interessante. Da essa risulta che molte delle specie di complessi quadratici si possono generare in questo modo, ad esempio la specie [222], che ha per superficie singolare la superficie di STEINER o la sua reciproca. Da quella generazione si ottengono varie proprietà di quei complessi e delle loro superficie singolari, delle quali alcune sono nuove.

SULLO SCOSTAMENTO DELLA LINEA GEODETICA DALLE SEZIONI NORMALI DI UNA SUPERFICIE

PER

GIOVANNI DE BERARDINIS

Approvata nell'adunanza del 2 Dicembre 1883

Un facile procedimento, per la ricerca delle relazioni esistenti tra una linea geodetica, tracciata su di una superficie, e le due sezioni normali reciproche, che passano per due punti abbastanza vicini di essa (cioè tali, che la loro distanza geodetica possa considerarsi, come quantità molto piccola, rispetto ai raggi di curvatura della superficie), è ciò, che in prima mi propongo di esporre, servendomi delle proprietà generali delle superficie. Giovandomi dei recenti lavori del D'Andrae applicherò i risultamenti alla ellissoide di rotazione intorno all'asse minore. Dalle formole trovate dedurrò poi quelle date da Weingarten, e brevemente sviluppando il metodo tenuto dal precedente autore in tali ricerche, estenderò gli sviluppi per la differenza degli azimut sino al termine di 4° ordine inclusivo.

I.

Ricerca delle serie che rappresentano le linee geodetiche di una superficie.

1. Supponiamo la data superficie riferita ad un sistema di assi rettangolari, prendendo il piano tangente in un suo punto per piano delle xy, e la normale alla superficie in esso punto per asse delle z. Le proiezioni di una curva qualunque, tracciata sulla superficie, su i piani delle xy ed xz, possono essere rappresentate, nelle vicinanze del punto considerato, dalle serie

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2} + y_0''' \frac{x^3}{6} + y_0^{\text{IV}} \frac{x^4}{24} + y_0^{\text{V}} \frac{x^5}{120} + \cdots\cdots \\ z &= z_0 + z_0' x + z_0'' \frac{x^2}{2} + z_0''' \frac{x^3}{6} + z_0^{\text{IV}} \frac{x^4}{24} + z_0^{\text{V}} \frac{x^5}{120} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1).$$

nelle quali y_0' y_0'' y_0''' ... z_0' z_0'' z_0''' ... indicano i valori che le derivate di diverso ordine delle coordinate y e z (considerate come funzioni della variabile indipendente x) prendono nel punto $A(x_0 y_0 z_0)$. Se scegliamo il punto A come origine delle coordinate, e facciamo coincidere l'asse delle x con la tangente alla precedente curva nel punto A, avremo

$$y_0'=0 \qquad z_0'=0$$

e le precedenti serie si riducono alle altre

$$\left.\begin{array}{l} y=y_0''\dfrac{x^2}{2}+y_0'''\dfrac{x^3}{6}+y_0^{\text{IV}}\dfrac{x^4}{24}+y_0^{\text{V}}\dfrac{x^5}{120}+\dots\dots \\ z=z_0''\dfrac{x^2}{2}+z_0'''\dfrac{x^3}{6}+z_0^{\text{IV}}\dfrac{x^4}{24}+z_0^{\text{V}}\dfrac{x^5}{120}+\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots\dots(2).$$

Per determinare i coefficienti delle diverse potenze di x, esprimiamo analiticamente la proprietà caratteristica delle linee geodetiche, di avere il piano osculatore in ogni loro punto normale alla superficie. Chiamando $X\,Y\,Z$ le coordinate correnti, l'equazione del piano osculatore ad una curva nel punto (x, y, z) è

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \quad \dots\dots(3),$$

che dovendo essere normale alla superficie data

$$u=F(x, y, z)=0 \quad \dots\dots(4),$$

fa d'uopo contenga la normale ad essa

$$\left.\begin{array}{l} X-x+p(Z-z)=0 \\ Y-y+q(Z-z)=0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots(5),$$

nelle quali equazioni p e q indicano le derivate prime parziali di z rispetto ad x ed y, che si ottengono dalla derivazione della equazione (4).

In virtù delle precedenti equazioni (5) la (3) diviene, scegliendo x come variabile indipendente

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ 1 & y' & z' \\ 0 & y'' & z'' \end{vmatrix}=0\ ,$$

ovvero

$$y''+qz''+p(z'y''-y'z'')=0 \quad \dots\dots(6),$$

che insieme alla equazione (4) determina le linee geodetiche sulla data superficie.

Le due derivate parziali p e q si annullano per $x_0=y_0=z_0=0$ avendo scelto il piano tangente in A per piano delle xy, sarà perciò

$$y_0''=0 \quad \dots\dots(7).$$

Derivando la equazione della superficie rispetto ad x, e considerando y come funzione di x, avremo

$$\left.\begin{aligned} z' &= p + q y' \\ z'' &= r + 2 s y' + t y'^2 + q y'' \\ z''' &= r' + \frac{dr}{dy} y' + 2 s y'' + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots(8),$$

dove r s t indicano le derivate parziali di z di secondo ordine rispetto ad x, ad y e x, ed y.

Dalle precedenti equazioni si ha pel punto origine delle coordinate

$$z_0' = 0 \qquad z_0'' = r_0 \qquad z_0''' = r_0' \qquad \dots\dots(9),$$

e derivando nuovamente la (6) si ottiene

$$y''' + q z''' + (s + t y') z'' + p (z' y''' - y' z''') + (r + s y')(z' y'' - y' z'') = 0 \quad \dots(10),$$

che per le condizioni (7) e (9) dà

$$y_0''' = - r_0 s_0 \qquad \dots\dots(11).$$

Spingendo le derivazioni sino al quinto ordine dell'ultima equazione (8) e della (10) si avrà successivamente per $x = y = z = 0$,

$$\begin{aligned} z_0^{\mathrm{IV}} &= r_0'' - 4 r_0 s_0^2 \\ z_0^{\mathrm{V}} &= - \{ 5 s_0 (3 r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) - r_0''' \} \\ y_0^{\mathrm{IV}} &= - (r_0 s_0' + 2 r_0' s_0), \\ y_0^{\mathrm{V}} &= r_0 s_0 (12 s_0^2 + t_0 r_0 + 3 r_0^2) - 3 (s_0 r_0'' + s_0' r_0') - r_0 s_0'', \end{aligned}$$

e sostituendo nelle (2) si ottiene per le serie che rappresentano le curve proiezioni della geodetica su i piani xy ed xz:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{6} r_0 s_0 x^3 - \frac{1}{24} (r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) x^4 + \\ &+ \frac{1}{120} \{ r_0 s_0 (12 s_0^2 + t_0 r_0 + 3 r_0^2) - 3 (s_0 r_0'' + s_0' r_0') - r_0 s_0'' \} x^5 + \dots \\ z &= \frac{1}{2} r_0 x^2 + \frac{1}{6} r_0' x^3 + \frac{1}{24} (r_0'' - 4 r_0 s_0^2) x^4 - \\ &- \frac{1}{120} \{ 5 s_0 (3 r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) - r_0''' \} x^5 + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \dots(13).$$

2. Riesce ora facile trovare la serie, ordinata secondo le potenze ascendenti di x, che dà un arco σ di geodetica. Essendo

$$\sigma = \int_0^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

sostituendo, alle derivate sottoposte al segno radicale, le serie che si ricavano dalle (13) derivando, si ha

$$\sigma = \int_0^x dx \left(1 + \frac{1}{2} r_0^2 x^2 + \frac{1}{2} r_0 r_0' x^3 + \left\{ \frac{1}{6} r_0 (r_0'' - 4 r_0 s_0^2) + \frac{1}{8} (r_0'^2 + r_0^2 s_0^2) - \frac{1}{8} r_0^4 \right\} x^4 + \ldots \right)$$

ed integrando sarà

$$\sigma = x + \frac{1}{6} r_0^2 x^3 + \frac{1}{8} r_0 r_0' x^4 + \frac{1}{120} (3 r_0'^2 + 4 r_0 r_0'' - 13 r_0^2 s_0^2 - 3 r_0^4) x^5 + \ldots \qquad \ldots (14),$$

dalla quale, considerando x come funzione di σ, si deduce

$$x = \sigma - \frac{1}{6} r_0^2 \sigma^3 - \frac{1}{8} r_0 r_0' \sigma^4 - \frac{1}{120} (3 r_0'^2 + 4 r_0 r_0'' - 13 r_0^2 s_0^2 - 13 r_0^4) \sigma^5 - \ldots \qquad \ldots (15)$$

che insieme alle altre due che si ottengono dalle (13) quando in esse si sostituisca

$$x = \sigma \left(1 - \frac{1}{6} r_0^2 \sigma^2 - \frac{1}{8} r_0 r_0' \sigma^3 \ldots \right)$$

e che sono

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{6} r_0 s_0 \sigma^3 - \frac{1}{24} (r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) \sigma^4 + \\ &\quad + \frac{1}{120} \left\{ r_0 s_0 (12 s_0^2 + t_0 r_0 + 13 r_0^2) - 3 (s_0 r_0'' + s_0' r_0') - r_0 s_0'' \right\} \sigma^5 + \ldots \\ z &= \frac{1}{2} r_0 \sigma^2 + \frac{1}{6} r_0' \sigma^3 + \frac{1}{24} \left\{ r_0'' - 4 (s_0^2 + r_0^2) r_0 \right\} \sigma^4 - \\ &\quad - \frac{1}{120} \left\{ 5 s_0 (2 r_0' s_0 + 3 r_0 s_0') + 25 r_0' r_0^2 - r_0''' \right\} \sigma^5 \ldots \end{aligned} \right\} \ldots (15)$$

costituiscono le tre serie cercate, che danno le coordinate dei punti di una geodetica in funzione dell'arco σ, nelle vicinanze del punto origine delle coordinate.

II.

Differenza tra la lunghezza di un arco di geodetica e quello di una sezione normale.

3. Rimanendo lo stesso il sistema degli assi coordinati, indichiamo con $X\,Y\,Z$ le coordinate variabili dei punti della data superficie, pel teorema di Taylor si avrà

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} (r_0 X^2 + 2 s_0 X Y + t_0 Y^2) + \frac{1}{6} (r_0' X^3 + 3 s_0' X^2 Y + 3 t_0' X Y^2 + u_0 Y^3) + \\ &\quad + \frac{1}{24} (r_0'' X^4 + 4 s_0'' X^3 Y + 6 t_0'' X^2 Y^2 + 4 u_0' X Y^3 + v_0 Y^4) + \ldots \end{aligned} \right\} \ldots (16)$$

Dinotando con $x\ y\ z$ le coordinate di un punto B della geodetica considerata, a cui è tangente l'asse delle X, la equazione del piano normale alla superficie nel punto A e che passa per B sarà

$$Y = \frac{y}{x} X \qquad \ldots\ldots (17),$$

la cui intersezione con la (16) darà la sezione normale in A e che passa per B. Chiamando σ' il suo arco compreso tra i punti A e B, osservando che la prima delle equazioni (13) dà

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{6} r_0 s_0 x^2 - \frac{1}{24} (r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) x^3 +$$

$$+ \frac{1}{120} \left\{ r_0 s_0 (12 s_0^2 + t_0 r_0 + 3 r_0^2) - 3 (s_0 r_0'' + s_0' r_0') - r^0 s_0'' \right\} x^4 + \ldots$$

avremo

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \int_0^x dX \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2} = \\ &= x + \frac{1}{6} r_0^2 x^3 + \frac{1}{8} r_0 r_0' x^4 + \frac{1}{360} \left\{ 12 r_0 r_0'' - 35 r_0^2 s_0^2 - 9 r_0^4 + 9 r_0'^2 \right\} x^5 + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (18),$$

dalla quale sottraendo la (14) si ottiene la differenza cercata

$$\sigma' - \sigma = \frac{1}{90} r_0^2 s_0^2 x^5 + \ldots = \frac{1}{90} r_0^2 s_0^2 \sigma^5 + \ldots \qquad \ldots\ldots (19).$$

Si può quindi conchiudere che per tutte le superficie la differenza tra la lunghezza di un arco di geodetica e quella di una sezione normale della superficie in un estremo e che passa per l'altro comincia almeno con un termine di 5° ordine.

III.

Differenze tra l'azimut di una geodetica e quelli delle due sezioni normali reciproche.

4. Chiamando m il coefficiente angolare nella equazione (17) si avrà tenendo presente la prima equazione (13)

$$m = \frac{y}{x} = -\frac{1}{6} r_0 s_0 x^2 - \frac{1}{24} (r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) x^3 + \ldots$$

e se indichiamo con δ l'angolo che la linea geodetica forma colla sezione normale, sarà $m = \operatorname{tang} \delta$, e sino al 3° ordine inclusivamente, avremo

$$\delta = m - \frac{m^3}{3} + \ldots = -\frac{1}{6} r_0 s_0 x^2 - \frac{1}{24} (r_0 s_0' + 2 r_0' s_0) x^3 + \ldots \qquad \ldots (20).$$

5. Per trovare l'angolo γ che la geodetica forma con la tangente alla sezione normale (reciproca) in B e che passa per A, chiamiamo X_1 Y_1 le coordinate del punto d'incontro della normale in B alla superficie col piano tangente. Dalle equazioni (5) ponendo $Z=0$ si ottiene

$$Y_1 = y + qz = y + z\left(\frac{dz}{dy}\right), \quad X_1 = x + pz = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

ma dallo sviluppo in serie della equazione della superficie, si ha derivando parzialmente

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = (s_0 x + t_0 y) + \frac{1}{2}(s_0' x^2 + 2\,t_0' x y + t_0' y^2) + \ldots$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = (r_0 x + s_0 y) + \frac{1}{2}(r_0' x^2 + 2\,s_0' y x + t_0' y^2) + \ldots,$$

le quali insieme alle (13) danno (essendo y di 3° ordine e z di 2°)

$$Y_1 = \frac{1}{3} r_0 s_0 x^3 + \frac{1}{24}(5\,r_0 s_0' + 2\,r_0' s_0)\,x^4 + \ldots$$

$$X_1 = x\left(1 + \frac{1}{2} r_0^2 x^2 + \left(\frac{1}{6} r_0' r_0 + \frac{1}{4} r_0 r_0'\right) x^3 + \ldots\right)$$

e quindi sino al 3° ordine inclusivo

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{Y_1}{X_1} = n = \frac{1}{3} r_0 s_0 x^2 + \frac{1}{24}(5\,r_0 s_0' + 2\,r_0' s_0)\,x^3 + \ldots$$

ovvero

$$\gamma = n - \frac{n^3}{3} + \ldots = \frac{1}{3} r_0 s_0 x^2 + \frac{1}{24}(5\,r_0 s_0' + 2\,r_0' s_0)\,x^3 + \ldots \quad \ldots\ldots(21).$$

Le relazioni (20) e (21) mostrano essere per tutte le superficie almeno di 2° ordine le differenze cercate, e che in generale la geodetica è compresa tra la sezione normale diretta, e la sezione normale reciproca, e che per x infinitamente piccolo $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2}$; facendo però eccezione pei casi speciali in cui $r_0 s_0$ si riduce esso stesso ad una grandezza di prim' ordine o di un ordine più elevato.

Essendo di 3° ordine la differenza tra x e σ si può nelle precedenti formole sostituire σ ad x, e si ottiene con la stessa approssimazione

$$\delta = -\frac{1}{6} r_0 s_0 \sigma^2 - \frac{1}{24}(r_0 s_0' + 2\,r_0' s_0)\,\sigma^3 + \ldots \quad \ldots\ldots(22);$$

$$\gamma = \frac{1}{3} r_0 s_0 \sigma^2 + \frac{1}{24}(5\,r_0 s_0' + 2\,r_0' s_0)\,\sigma^3 + \ldots \quad \ldots\ldots(23).$$

IV.

Applicazione delle precedenti formole allo sferoide.

6. Per applicare i precedenti risultamenti allo sferoide, troviamo la sua equazione riferita ad un sistema di assi rettangolari, scegliendo il piano tangente alla superficie come piano delle xy, e la normale ad essa, diretta internamente, come asse delle z. Per metterci poi nelle condizioni in cui sono state trovate le formole ottenute, faremo coincidere l'asse delle x colla tangente alla geodetica.

7. La equazione della ellissoide di rotazione intorno all'asse minore b, riferita ad un sistema di assi rettangolari passanti pel centro, e il cui asse delle z coincida con l'asse di rotazione è

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad \ldots\ldots(24).$$

Per ottenere quella riferita al primo nominato sistema di assi, supponendo l'asse delle X tangente al meridiano nel punto A di latitudine vera φ, in cui si trasporta l'origine delle coordinate, le formole di trasformazione sono

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}-Z\cos\varphi-X\operatorname{sen}\varphi$$

$$y=Y$$

$$z=\frac{a(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}-Z\operatorname{sen}\varphi+X\cos\varphi$$

come è facile vedere, tenendo presente che

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

è la equazione della ellissi meridiana ed

$$\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \qquad \frac{a(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

sono le coordinate del punto A.

Eseguendo la trasformazione si ottiene per la equazione cercata

$$\left.\begin{aligned} &Z^2(1-e^2\cos^2\varphi)+X^2(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)+Y^2(1-e^2)-\\ &-e^2XZ\operatorname{sen}2\varphi-\frac{2a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}Z=0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(25),$$

ove

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\;.$$

8. Per eseguire la seconda trasformazione, dobbiamo porre

$$Z = z \qquad X = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad Y = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$$

essendo α l'azimut della geodetica, contato da Nord verso Est, ossia l'angolo che la tangente alla geodetica forma con l'asse delle X tangente al meridiano. Sostituendo nella (25) e chiamando ρ ed N i raggi di curvatura delle due sezioni normali principali in A si otterrà

$$x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\rho}+\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{N}\right)+y^2\left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\rho}+\frac{\cos^2\alpha}{N}\right)+2\,x\,y\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{N}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$-\frac{2\,e^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{N(1-e^2)}(x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,z+\frac{1-e^2\cos^2\varphi}{N(1-e^2)}z^2-2\,z=0\;,$$

ovvero

$$u=\frac{1}{R}x^2+A\,y^2+2\,B\,x\,y-2\,C\,(x\cos\alpha-y\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,z+D\,z^2-2\,z=0 \quad \ldots(26).$$

che, paragonata con la precedente, mostra quali espressioni sieno state indicate con i coefficienti A, B, C, D, R. Per determinare r_0 s_0 r_0' s_0' troviamo le equazioni differenziali parziali di 1° e 2° ordine della equazione della superficie $u=F(x,y,z)=0$ che sono

$$\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0 \qquad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dz}r+\frac{d^2u}{dz^2}p^2+2\frac{d^2u}{dx\,dz}p+\frac{d^2u}{dx^2}=0\\
&\frac{du}{dz}t+\frac{d^2u}{dz^2}q^2+2\frac{d^2u}{dy\,dz}q+\frac{d^2u}{dy^2}=0\\
&\frac{du}{dz}s+\frac{d^2u}{dz^2}p\,q+\frac{d^2u}{dx\,dz}q+\frac{d^2u}{dz\,dy}p+\frac{d^2u}{dx\,dy}=0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(27),$$

nelle quali ponendo $x_0=y_0=z_0=0$ e ricordando che per la particolare scelta degli assi $p_0=q_0=0$ si ottiene

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 r_0+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0=0 \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)_0 s_0+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_0=0\;;$$

ma nel presente caso

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0=-2 \qquad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0=\frac{2}{R} \qquad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_0=-2\,B$$

perciò

$$r_0=\frac{1}{R} \qquad s_0=-B$$

quindi

$$y_0'''=-r_0\,s_0=\frac{B}{R}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{N}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha=+\frac{e^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{N\,R\,(1-e^2)}$$

e la (19) diverrà relativamente allo sferoide

$$\sigma' - \sigma = \frac{1}{360} \frac{e^4 \cos^4 \varphi \operatorname{sen}^2 2\alpha}{(1-e^2)^2} \frac{\sigma^5}{N^2 R^2} + \dots \qquad \dots\dots(28),$$

ma

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a}(1 + \lambda_1 e^2 + \lambda_2 e^4 + \dots)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a}(1 + \lambda e^2 + \lambda' e^4 + \dots)$$

quindi

$$\sigma' - \sigma = \frac{1}{360} \frac{e^4 \cos^4 \varphi \operatorname{sen}^2 2\alpha}{1-e^2} \frac{\sigma^5}{a^4} + \dots \qquad \dots\dots(29),$$

espressione che prende il massimo valore per $\varphi = 0$ e $2\alpha = 90°$. L'ordine di grandezza della precedente differenza ci fa conchiudere, che sostituendo ad un arco compreso tra due punti di una geodetica sullo sferoide, quello della sezione normale alla superficie in uno di essi e che passa per l'altro, non si commette errore sensibile, ed in conseguenza nei più delicati calcoli geodetici non sarà mai il caso di tener conto di tale correzione.

9. Derivando la prima e la terza delle equazioni (27) rispetto ad x, e non tenendo conto dei termini che si annullano all'origine si ha

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 r_0' + 3\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)_0 r_0 = 0 \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)_0 s_0' + 2\left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)_0 r_0 = 0\,,$$

nelle quali sostituendo le particolari espressioni delle derivate parziali, che si ottengono dalla (26) risulta

$$r_0' = -\frac{2C\cos\alpha}{R} \qquad s_0' = 2BC\cos\alpha + \frac{C\operatorname{sen}\alpha}{R}$$

e quindi

$$y_0^{\text{IV}} = -\frac{C\operatorname{sen}\alpha}{R}\left(\frac{1}{R} + 8B\cot\alpha\right) = -\frac{e^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{NR(1-e^2)}\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right).$$

Inoltre risulta

$$5r_0 s_0' + 2s_0 r_0' = \frac{C\operatorname{sen}\alpha}{R}\left(\frac{5}{R} + 16B\cot\alpha\right) = +\frac{e^2\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{NR(1-e^2)}\left(\frac{21}{R} - \frac{16}{N}\right)$$

e sostituendo quindi nelle equazioni (22) e (23) si ottiene

$$\delta = +\frac{1}{6}\frac{e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}\alpha}{NR(1-e^2)}\left\{\cos\alpha\,.\,\sigma^2 - \frac{1}{4}\operatorname{tang}\varphi\left(\frac{9}{R} - \frac{8}{N}\right)\sigma^3\right\}$$

$$\gamma = -\frac{1}{3}\frac{e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}\alpha}{NR(1-e^2)}\left\{\cos\alpha\,.\,\sigma^2 - \frac{1}{8}\operatorname{tang}\varphi\left(\frac{21}{R} - \frac{16}{N}\right)\sigma^3\right\}$$

e trascurando nel coefficiente di σ^3 i termini col fattore e^4 si ha

$$\delta = +\frac{1}{6}\frac{e^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\alpha}{NR(1-e^2)}\left\{\cos\alpha\,.\,\sigma^2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\sigma^3}{R}\right\} \quad \ldots\ldots(30),$$

$$\gamma = -\frac{1}{3}\frac{e^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\alpha}{NR(1-e^2)}\left\{\cos\alpha\,.\,\sigma^2 - \frac{5}{8}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\sigma^3}{R}\right\} \quad \ldots\ldots(31),$$

le quali determinano le deviazioni della geodetica dalle due sezioni normali alle estremità dell'arco σ, e possono essere utili ad esaminare la posizione della geodetica relativamente alle due sezioni normali reciproche suddette.

Sostituendo nella espressione δ i riportati sviluppi di $\frac{1}{R}$ ed $\frac{1}{N}$, e calcolando con gli elementi di Bessel il primo termine solamente col fattore e^2 ponendo $\varphi = 0$ e $2\alpha = 90^\circ$; si ha per un lato σ di 200 chilometri

$$\log\frac{e^2}{12\,\mathrm{sen}\,1''}\,\frac{\sigma^2}{a^2} = \log 0'',1128\ ,$$

il quale risultamento dimostra che gli errori in azimut, provenienti anche da molte misure angolari riunite in medie, sono superiori alle correzioni che dovrebbero ricevere gli azimut stessi per la sostituzione delle sezioni normali alle geodetiche. Si può quindi conchiudere l'importante teorema fondamentale di geodesia pratica: *che gli angoli azimutali, intorno a ciascun vertice di una rete trigonometrica, dati dalle misure dirette come angoli di sezioni normali, possono riguardarsi come uguali a quelli formati dalle geodetiche, che congiungono i varii vertici.*

Questo teorema, come le altre conclusioni esigono che gli archi σ sieno quantità molto piccole rispetto ai raggi di curvatura della superficie, ciò che ha luogo per la superficie terrestre.

10. La simmetria dello sferoide rispetto al piano dell'equatore e ad un meridiano, permette di limitare l'esame della posizione della geodetica relativamente alle due sezioni normali reciproche, facendo variare l'azimut da 0° a 180°.

Per $\alpha = 0^\circ$ ed $\alpha = 180^\circ$, $\delta = \gamma = 0$ e quindi in questi due casi le due sezioni coincidono col meridiano. Variando α da 0° a 90° finchè $\cos\alpha$ è $>$ di $\frac{5}{8}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\sigma}{R}$, sarà anche $>$ di $\frac{1}{4}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\sigma}{R}$, e δ e γ saranno di segno contrario, e la geodetica sarà compresa tra le due sezioni normali, essendo la sezione normale (in A) diretta a sud della geodetica. Quando $\cos\alpha$ si approssima a $\frac{5}{8}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\sigma}{R}$ la sezione normale reciproca tende a divenire tangente alla geodetica in A, ciò che avviene per $\cos\alpha = \frac{5}{8}\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\sigma}{R}$. Oltre questo valore γ diviene positivo, e le due sezioni saranno entrambe a sud della geodetica, e nel mentre la sezione normale reciproca si va scostando dalla geodetica,

la sezione normale diretta le si andrà avvicinando, e quando $\cos\alpha$ avrà raggiunto il valore determinato dalla equazione

$$\frac{5}{8}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}-\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\alpha-\frac{1}{4}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}\right)$$

ossia

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}$$

le due sezioni coincideranno a sud della geodetica. Da tal valore in poi δ diverrà negativo e γ seguiterà ad essere positivo ed avranno tali segni sino ad $\alpha=180°$.

11. Per vedere più dettagliatamente ciò che avviene quando $\cos\alpha$ varia da $\frac{5}{8}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}$ ad $\frac{1}{4}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}$, poniamo $\alpha=90°-\varepsilon$, essendo ε una quantità di 1° ordine, sarà $\cos(90-\varepsilon)=\operatorname{sen}\varepsilon$ e quindi le (22) e (23) daranno

$$\delta=+\frac{1}{6}\frac{e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}\alpha}{NR(1-e^2)}\left\{\varepsilon-\frac{1}{4}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}\right\}\sigma^2$$

$$\gamma=-\frac{1}{3}\frac{e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}\alpha}{NR(1-e^2)}\left\{\varepsilon-\frac{5}{8}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}\right\}\sigma^2 .$$

Per trovare i punti, nei quali la sezione normale diretta incontra la geodetica, poniamo che per essi sia $\sigma=\sigma_1$ avremo che saranno determinati dalla equazione

$$\left(\varepsilon-\frac{1}{4}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma_1}{R}\right)\sigma_1^2=\left(\varepsilon-\frac{1}{4}\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma}{R}\right)\sigma^2$$

dovendo ad essi punti corrispondere lo stesso angolo δ. Questa equazione è soddisfatta da $\sigma_1=\sigma$ che corrisponde all'estremo B, e dividendola per $\sigma_1-\sigma$ si ottiene

$$\varepsilon(\sigma_1+\sigma)-\frac{1}{4}\frac{\operatorname{tang}\varphi}{R}(\sigma_1^2+\sigma_1\sigma+\sigma^2)=0$$

in cui con sufficiente esattezza si può ad R sostituire la normale N in A e porre

$$\sigma_0=\varepsilon N\cot\varphi \quad \text{d'onde} \quad \varepsilon=\operatorname{tang}\varphi\frac{\sigma_0}{N}.$$

Ordinando la precedente equazione rispetto alle potenze di σ_1 si ha

$$\sigma_1^2-(4\sigma_0-\sigma)\sigma_1-(4\sigma_0-\sigma)\sigma=0$$

che, risoluta da

$$\sigma_1=2\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma\pm\sqrt{\left(2\sigma_0-\frac{1}{2}\sigma\right)\left(2\sigma_0+\frac{3}{4}\sigma\right)},$$

la quale mostra che σ_1 è immaginario finchè σ_0 è $<\frac{1}{4}\sigma$ e per $\sigma_0=\frac{1}{4}\sigma$ da $\sigma_1=0$.

Variando σ_0 oltre $\frac{1}{4}\sigma$, si hanno per σ_1 due valori, uno negativo che non interessa considerare, l'altro positivo e sempre crescente, e poichè per $\sigma_0 = \frac{3}{8}\sigma$ risulta $\sigma_1 = \sigma$ si vede che il punto d'intersezione della geodetica, colla sezione normale diretta, percorre rapidamente l'arco di geodetica AB, e per i valori di σ_0 superiori a $\frac{3}{8}\sigma$, il punto d'insersezione passerà oltre il punto B.

Il significato geometrico di σ_0 serve a chiarire maggiormente la discussione. È ben noto dall'andamento delle linee geodetiche sulla ellissoide di rotazione, che partendo da un loro punto esse procedano verso Nord (o verso Sud) sino a raggiungere un punto di latitudine massima, nel quale riescono tangenti al corrispondente parallelo inviluppo, e da questo punto muovono verso Sud (o verso Nord). Ora, immaginando descritta una sfera di raggio N, avente lo stesso asse polare dello sferoide, e che a questo sia tangente lungo il parallelo di latitudine φ di A, l'arco di geodetica compreso tra il punto A e detto punto più a Nord, si può considerarlo come esistente su detta sfera, ed esso insieme ai due archi dei meridiani, che passano per essi punti determinano un triangolo sferico rettangolo, del quale l'angolo in A è $90^\circ - \varepsilon$ e la ipotenusa $90^\circ - \varphi$, e quindi l'arco di geodetica considerato sarà eguale ad $\varepsilon N \cot\varphi$ ovvero a σ_0; dunque σ_0 rappresenta la distanza geodetica di A dal punto più settentrionale della linea. In conseguenza la distanza del punto B dallo stesso punto sarà $\sigma - \sigma_0$, e se consideriamo la sezione normale reciproca $BB'A$ come diretta, trasportando l'origine in B, ciò che possiamo fare, essendo le formole trovate (in virtù della simmetria dello sferoide rispetto al meridiano) ugualmente applicabili ad una direzione occidentale della linea, avremo che variando σ_0 da $\frac{1}{4}\sigma$ a $\frac{3}{8}\sigma$, il punto d'incontro S' della sezione normale $BB'A$ colla geodetica si muoverà da B ad A, ma questi valori di $\sigma - \sigma_0$ danno per σ_0 gli altri $\frac{3}{4}\sigma$ e $\frac{5}{8}\sigma$, perciò si può conchiudere, che il punto S' si muoverà da A a B variando σ_0 da $\frac{5}{8}\sigma$ a $\frac{3}{4}\sigma$.

Riassumendo le precedenti conclusioni si può dire, che quando l'arco di geodetica è tale, che un punto mobile andando su di esso da A a B, proceda, sempre verso Nord o verso Sud, esso arco sarà compreso totalmente tra le due sezioni normali reciproche. Le eccezioni si presentano nel 1° e 4° quadrante, quando l'azimut è così prossimo a 90° e a 270°, che il punto mobile muovendosi prima verso Nord raggiunge il punto σ_0 e poi volge verso Sud per andare in B, ed in questi casi σ_0 dev'essere sempre $<$ di σ.

Nei due citati casi si ha:

1° Che essendo σ_0 compreso tra 0 e $\frac{1}{4}\sigma$ o tra $\frac{3}{4}\sigma$ e σ le due sezioni normali comprendono ancora la geodetica, la quale si scosta più della sezione normale diretta dal meridiano di A o di B secondo che essa sezione diretta è $AA'B$ o $BB'A$.

2° Se σ_0 è compreso tra $\frac{1}{4}\sigma$ e $\frac{3}{8}\sigma$ ovvero $\frac{5}{8}\sigma$ e $\frac{3}{4}\sigma$, l'arco di geodetica AB sarà compreso in parte tra le due sezioni normali. Infatti, durante il primo intervallo il punto d'incontro della geodetica colla sezione normale diretta percorre tutto l'arco σ, mentre la sezione normale reciproca rimane tutta a Sud della geodetica. Lo stesso avviene per la sezione $BB'A$ (considerata diretta) nel secondo intervallo, nel quale la sezione (reciproca) $AA'B$ rimane pure a Sud.

Da $\frac{3}{8}\sigma$ a $\frac{5}{8}\sigma$ le due sezioni normali sono sempre a Sud, e coincidono quando $\sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma$ ciò che porta essere B alla stessa latitudine di A.

V.

Formole di Weingarten.

12. Supponiamo che gli assi delle x e delle y sieno rispettivamente tangenti alle due sezioni normali principali della superficie in A, e l'asse delle z la normale ad essa nello stesso punto. Per il teorema di Taylor essa superficie almeno nelle vicinanze dell'origine può essere rappresentata dalla serie

$$z = \frac{1}{2}(R_0 x^2 + T_0 y^2) + \frac{1}{6}(R_0' x^3 + 3 S_0' x^2 y + 3 T_0' x y^2 + U_0 y^3) + \ldots$$

e relativamente al primo sistema di assi, il cui asse delle X forma col precedente l'angolo Z si ha

$$z = \frac{1}{2}(r_0 X^2 + 2 s_0 X Y + t_0 Y^2) + \frac{1}{6}(r_0' X^3 + 3 s_0' X^2 Y + 3 t_0' X Y^2 + u_0 Y^3) + \ldots$$

Ponendo nella prima

$$\left.\begin{aligned} x &= X \cos Z - Y \operatorname{sen} Z \\ y &= X \operatorname{sen} Z + Y \cos Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (32),$$

ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze delle variabili si ottiene

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z \\ s_0 &= -(R_0 - T_0) \operatorname{sen} Z \cos Z \\ r_0' &= R_0' \cos^3 Z + 3 S_0' \cos^2 Z \operatorname{sen} Z + 3 T_0' \cos Z \operatorname{sen}^2 Z + U_0 \operatorname{sen}^3 Z \\ s_0' &= -\left[\begin{aligned} &R_0' \cos^2 Z \operatorname{sen} Z - S_0' \cos^3 Z + 2 S_0' \cos Z \operatorname{sen}^2 Z - 2 T_0' \operatorname{sen} Z \cos^2 Z + \\ &+ T_0' \operatorname{sen}^3 Z - U_0 \operatorname{sen}^2 Z \cos Z \end{aligned}\right] \end{aligned}\right\} \ldots (33),$$

sostituendo nelle equazioni (19) e (22) ed arrestandosi ai primi termini si hanno le formole date da Weingarten

$$\sigma' - \sigma = \frac{1}{360} (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z)^2 (R_0 - T_0)^2 \operatorname{sen}^2 2\, Z . \sigma^5 + \ldots \qquad \ldots (34),$$

$$\delta = \frac{1}{12} (R_0 - T_0) (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \operatorname{sen} 2\, Z . \sigma^2 + \ldots \qquad \ldots (35),$$

nelle quali si può ad R_0 e T_0 sostituire $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{\rho'}$ essendo ρ e ρ' i due raggi di curvatura delle sezioni normali principali.

13. Per la ellissoide di rotazione intorno all'asse minore si ha

$$R_0 = \frac{1}{\rho} = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a (1 - e^2)} \qquad T_0 = \frac{1}{N} = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a} ;$$

sostituendo nelle precedenti formole e ponendo

$$\frac{1}{R} = R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z$$

si ottengono di nuovo la (28), e la (30) arrestata al primo termine.

14. Dalle (15) sostituendovi le trovate espressioni per r_0 ed s_0 si ha

$$\left.\begin{aligned} X &= \sigma - \frac{1}{6} (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \sigma^3 + \ldots \\ Y &= \quad - \frac{1}{6} (R_0 - T_0) (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \operatorname{sen} Z \cos Z . \sigma^3 + \ldots \\ Z &= \quad \frac{1}{2} (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \sigma^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (36),$$

le quali insieme alle (32) danno

$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma \cos Z - \frac{\sigma^3}{6} R_0 (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \cos Z + \ldots \\ y &= \sigma \operatorname{sen} Z - \frac{\sigma^3}{6} T_0 (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \operatorname{sen} Z + \ldots \\ z &= \frac{\sigma^2}{2} (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (37),$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma \cos Z - \frac{\sigma^3}{6 \rho R} \cos Z \\ y &= \sigma \operatorname{sen} Z - \frac{\sigma^3}{6 \rho' R} \operatorname{sen} Z \\ z &= \frac{\sigma^2}{2 R} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (38),$$

che sono gl'integrali in serie, dati da Weingarten, delle equazioni differenziali delle geodetiche.

VI.

Procedimento di Weingarten per la ricerca delle precedenti formole.

15. Le equazioni differenziali delle linee geodetiche, in coordinate cartesiane, sulla superficie

$$u = F(x, y, z) = 0 \qquad \ldots\ldots(39),$$

sono

$$\frac{d^2 x}{d\sigma^2} + p\frac{d^2 z}{d\sigma^2} = 0 \qquad \frac{d^2 y}{d\sigma^2} + q\frac{d^2 z}{d\sigma^2} = 0 \qquad \ldots\ldots(40).$$

Considerando x, y, z come funzioni della variabile indipendente σ, avremo sviluppando colla formola di Maclaurin

$$\left.\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{\sigma}{1}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 + \frac{\sigma^2}{1.2}\left(\frac{d^2 x}{d\sigma^2}\right)_0 + \frac{\sigma^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 x}{d\sigma^3}\right)_0 + \ldots \\
y &= y_0 + \frac{\sigma}{1}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 + \frac{\sigma^2}{1.2}\left(\frac{d^2 y}{d\sigma^2}\right)_0 + \frac{\sigma^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 y}{d\sigma^3}\right)_0 + \ldots \\
z &= z_0 + \frac{\sigma}{1}\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_0 + \frac{\sigma^2}{1.2}\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 + \frac{\sigma^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 + \ldots
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots(41).$$

Scegliendo gli assi coordinati come nel numero 12, e chiamando Z l'angolo che la tangente ad una geodetica, che passa per $A\,(x_0\, y_0\, z_0)$, forma con l'asse delle x, avremo

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 = \cos Z \qquad \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 = \operatorname{sen} Z \qquad \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_0 = 0\;,$$

e incominciando a contare gli archi σ dal punto A, in ciascuna delle (41) saranno noti i primi due termini.

Per ottenere gli altri coefficienti deriviamo le equazioni (39) e (40) e dinotando con R S T le derivate parziali di 2° ordine di z si ottiene

$$\frac{dz}{d\sigma} = p\frac{dx}{d\sigma} + q\frac{dy}{d\sigma}\;,$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{d\sigma^2} &= p\frac{d^2 x}{d\sigma^2} + q\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + R\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2S\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + T\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 \\
\frac{d^3 y}{d\sigma^3} &= -q\frac{d^3 z}{d\sigma^3} - S\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2 z}{d\sigma^2} - T\frac{dy}{d\sigma}\frac{d^2 z}{d\sigma^2} \\
\frac{d^3 x}{d\sigma_3} &= -p\frac{d^3 z}{d\sigma^3} - R\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2 z}{d\sigma^2} - S\frac{dy}{d\sigma}\frac{d^2 z}{d\sigma^2}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots(43).$$

Ora notando che i coseni degli angoli, che la normale alla superficie forma cogli assi sono proporzionali a

$$p\,,\; q\,,\; -1\;,$$

e che in conseguenza della scelta degli assi

$$p_0 = q_0 = S_0 = 0\;,$$

le equazioni (40) e (43) daranno

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2 x}{d\sigma^2}\right)_0 = 0 \quad \left(\dfrac{d^2 y}{d\sigma^2}\right)_0 = 0 \quad \left(\dfrac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0 = R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z \\ \left(\dfrac{d^3 x}{d\sigma^3}\right)_0 = -R_0 \cos Z\,(R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \\ \left(\dfrac{d^3 y}{d\sigma^3}\right)_0 = -T_0 \operatorname{sen} Z\,(R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(44),$$

e sostituendo nelle (41) si ottengono le già trovate formole (37). Se in queste equazioni supponiamo Z costante e σ variabile, esse rappresenteranno una determinata geodetica, invece se si suppongono Z e σ variabili, esse rappresenteranno la superficie nelle coordinate curvilinee σ e Z, essendo le linee σ geodetiche, e le linee Z, quelle che diconsi circonferenze geodetiche relative al centro A, e che sono normali alle prime.

16. Chiamando β l'angolo che un piano normale in A forma col piano xz, la sua equazione sarà

$$x \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta = 0\;,$$

e sostituendovi le espressioni (37) di x ed y, avremo per equazione della sezione normale in A e che passa pel punto $(x\,y\,z)$ della geodetica, nelle coordinate curvilinee σ e Z

$$\operatorname{sen}(\beta - Z) = \frac{\sigma^2}{6} R_0 (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \operatorname{sen}\beta \cos\beta + \ldots \quad \ldots\ldots(46),$$

che determina Z in funzione di σ e β. Sviluppando si ha

$$Z = Z_0 + \frac{\sigma}{1}\left(\frac{dZ}{d\sigma}\right)_0 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{d^2 Z}{d\sigma^2}\right)_0 + \frac{\sigma^3}{6}\left(\frac{d^3 Z}{d\sigma^3}\right)_0 + \ldots \quad \ldots\ldots(47),$$

e traendo dalla (46) le espressioni dei coefficienti dei termini della precedente serie, risulta

$$Z - \beta = -\frac{\sigma^2}{12}(R_0 - T_0)(R_0 \cos^2\beta + T_0 \operatorname{sen}^2\beta) \operatorname{sen} 2\beta + \ldots \quad \ldots\ldots(48),$$

nel cui secondo membro cangiando β in Z, ciò che non altera l'approssimazione se ne deduce la (35).

17. Senza alterare il procedimento dell'autore per ritrovare la formola (34), ossia la differenza tra la lunghezza di un arco di geodetica e quello della sezione normale, che passa per gli stessi punti estremi, osserviamo che le linee σ essendo geodetiche, e le linee Z normali alle σ, la forma dell'elemento lineare della superficie è

$$ds^2 = d\sigma^2 + A\,dZ^2$$

ove

$$A = \left(\frac{dx}{dZ}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dZ}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2.$$

Derivando la (37) rispetto a Z, e sommando i quadrati dei risultamenti si ottiene

$$A = \sigma^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{3} R_0 T_0 + \ldots\right),$$

trascurando le potenze di σ superiori alla quarta, l'espressione del quadrato dell'elemento lineare sarà

$$ds^2 = d\sigma^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^4}{3} R_0 T_0 + \ldots\right) dZ^2,$$

che per una curva qualunque considerata sulla superficie dà

$$s = \int d\sigma \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma^2}{3} R_0 T_0 + \ldots\right)\left(\frac{dZ}{d\sigma}\right)^2 \right\} + \text{costante}.$$

Applicando questa formola alla sezione normale rappresentata dalla (48), che derivandola, dà

$$\frac{dZ}{d\sigma} = -\frac{\sigma}{6}(R_0 - T_0)(R_0 \cos^2\beta + T_0 \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}^2 2\beta + \ldots$$

si ottiene essendo $s = 0$ per $\sigma = 0$

$$s - \sigma = \frac{\sigma^5}{360}(R_0 - T_0)^2 (R_0 \cos^2\beta + T_0 \operatorname{sen}^2\beta)^2 \operatorname{sen}^2 2\beta + \ldots \quad \ldots\ldots (49),$$

che è la stessa formola (34) colla sola differenza, che nel secondo membro l'angolo β è sostituito dall'altro Z, dal quale differisce per quantità di 3° ordine in generale.

VII.

Ricerca del termine di 4° ordine nella differenza degli azimut seguendo il procedimento di Weingarten.

18. Volendo trovare il termine di 4° ordine nella serie, che dà la differenza tra l'azimut della geodetica e quello della sezione normale alla superficie, e che passa per i due estremi dell'arco di geodetica considerato, fa d'uopo trovare prima i termini consecutivi a quelli già scritti nelle serie (37). Deriviamo perciò nuovamente le (43), trascurando i termini che si annullano per $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ si ottengono

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0=\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dR}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0+2\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{dS}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dS}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0+\\
&+\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0^2\left(\frac{dT}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dT}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0\\
&\left(\frac{d^4 y}{d\sigma^4}\right)_0=-2T_0\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^3 Z}{d\sigma^3}\right)_0-\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0\left(\frac{dS}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dS}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0-\\
&-\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0\left(\frac{dT}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dT}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0\\
&\left(\frac{d^4 x}{d\sigma^4}\right)_0=-2R_0\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0-\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0\left(\frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dR}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0-\\
&-\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^2 z}{d\sigma^2}\right)_0\left(\frac{dS}{dx}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{dS}{dy}\frac{dy}{d\sigma}\right)_0
\end{aligned}\right\}\quad(50),$$

nelle quali entrano le derivate

$$\frac{dR}{dx}\quad\frac{dR}{dy}=\frac{dS}{dx}\quad\frac{dS}{dy}=\frac{dT}{dx}\quad\frac{dT}{dy}\,;\qquad\ldots\ldots(51),$$

per determinare le quali nei diversi casi particolari fa d'uopo trovare le equazioni differenziali parziali di 1° e 2° ordine della equazione della superficie

$$u=F(x\,,\,y\,,\,z)=0\;,$$

che sono

$$\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0\qquad\frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0\;,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dz}R+\frac{d^2u}{dz^2}p^2+2\frac{d^2u}{dx\,dz}p+\frac{d^2u}{dx^2}=0\\
&\frac{du}{dz}T+\frac{d^2u}{dz^2}q^2+2\frac{d^2u}{dy\,dz}q+\frac{d^2u}{dy^2}=0\\
&\frac{du}{dz}S+\frac{d^2u}{dz^2}pq+\frac{d^2u}{dx\,dz}q+\frac{d^2u}{dz\,dy}p+\frac{d^2u}{dx\,dy}=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(52),$$

delle quali basta poi derivare la prima e la seconda rispetto ad x e ad y e nei risultamenti porre $x=y=z=0$ per avere i valori delle precedenti derivate, che figurano nei coefficienti cercati (50).

Eseguendo la detta derivazione si ottengono pel punto origine delle coordinate le equazioni

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{du}{dz}\right)_0\left(\frac{dR}{dx}\right)_0+3R_0\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)_0+\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0=0\\
&\left(\frac{du}{dz}\right)_0\left(\frac{dR}{dy}\right)_0+\;\;R_0\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)_0+\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right)_0=0\\
&\left(\frac{du}{dz}\right)_0\left(\frac{dT}{dx}\right)_0+\;\;T_0\left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)_0+\left(\frac{d^3u}{dy^2\,dx}\right)_0=0\\
&\left(\frac{du}{dz}\right)_0\left(\frac{dT}{dy}\right)_0+3T_0\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)_0+\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)_0=0\,.
\end{aligned}$$

e ponendo

$$u = z - \frac{1}{2}(R_o x^2 + T_o y^2) - \frac{1}{6}(R_o' x^3 + 3 S_o' x^2 y + 3 T_o' x y^2 + U_o y^3) + \ldots$$

risulta come potea prevedersi

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)_o = R_o' \quad \left(\frac{dR}{dy}\right)_o = S_o' \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_o = T_o' \quad \left(\frac{dT}{dy}\right)_o = U_o$$

e quindi le (50) danno

$$\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_o = R_o' \cos^3 Z + 3 S_o' \operatorname{sen} Z \cos^2 Z + 3 T_o' \operatorname{sen}^2 Z \cos Z + U_o \operatorname{sen}^3 Z$$

$$\left(\frac{d^4 y}{d\sigma^4}\right)_o = \begin{cases} -2 T_o \operatorname{sen} Z (R_o' \cos^3 Z + 3 S_o' \operatorname{sen} Z \cos^2 Z + 3 T_o' \operatorname{sen}^2 Z \cos Z + U_o \operatorname{sen}^3 Z) \\ -(R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z)(S_o' \cos^2 Z + 2 S_o' \operatorname{sen} Z \cos Z + T_o' \operatorname{sen}^2 Z) \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^4 x}{d\sigma^4}\right)_o = \begin{cases} -2 R_o \cos Z (R_o' \cos^3 Z + 3 S_o' \operatorname{sen} Z \cos^2 Z + 3 T_o' \operatorname{sen}^2 Z \cos Z + U_o \operatorname{sen}^3 Z) \\ -(R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z)(R_o' \cos^2 Z + 2 S_o' \operatorname{sen} Z \cos Z + T_o' \operatorname{sen}^2 Z) \end{cases}$$

espressioni che moltiplicate rispettivamente (secondo le 41) per $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$ ci danno i termini consecutivi a quelli già scritti nelle (37). Coi trovati valori (33) di r_o' ed s_o' si possono dedurre dalle (15) i termini ora trovati direttamente, collo stesso procedimento tenuto per avere dalle (15) le (37). Infatti il secondo termine della serie di z (37) si ottiene immediatamente col sostituire ad r_o' la sua espressione (33), per il terzo termine della serie di x basta notare che si ha

$$\begin{aligned} & 3 \cos Z (R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z) r_o' + (R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z) s_o' \operatorname{sen} Z + \\ & + 2 r_o' (R_o - T_o) \operatorname{sen}^2 Z \cos Z = 2 R_o r_o' \cos Z + \\ & + (s_o' \operatorname{sen} Z + r_o' \cos Z)(R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z) = 2 R_o r_o' \cos Z + \\ & + (R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z)(R_o' \cos^2 Z + 2 S_o' \operatorname{sen} Z \cos Z + T_o' \operatorname{sen}^2 Z) \end{aligned}$$

e per il terzo termine di y che

$$\begin{aligned} & 3 \operatorname{sen} Z (R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z) r_o' - (R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z) s_o' \cos Z - \\ & - 2 (R_o - T_o) r_o' \operatorname{sen} Z \cos^2 Z = 2 T_o r_o' \operatorname{sen} Z + (r_o' \operatorname{sen} Z - s_o' \cos Z)(R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z) = \\ & = 2 T_o r_o' \operatorname{sen} Z + (R_o \cos^2 Z + T_o \operatorname{sen}^2 Z)(S_o' \cos^2 Z + 2 T_o' \operatorname{sen} Z \cos Z + U_o \operatorname{sen}^2 Z) . \end{aligned}$$

19. Per avere il termine consecutivo a quello già scritto nella (48) dobbiamo prima applicare le precedenti formole allo sferoide rappresentato dalla equazione (25). Le (52) danno

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dz} R + 2 p^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi) - 2 p e^2 \operatorname{sen} 2 \varphi - 2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0 \\ & \frac{du}{dz} T - 2 q^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi) + 2 (1 - e^2) = 0 \\ & \frac{du}{dz} S + 2 p q (1 - e^2 \cos^2 \varphi) - q e^2 \operatorname{sen} 2 \varphi = 0 . \end{aligned}$$

Derivando la prima e la seconda di queste equazioni rispetto ad x e ad y, e trascurando i termini che si annullano all'origine si ha

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 \left(\frac{dR}{dx}\right)_0 - 3\, e^2 R_0 \operatorname{sen} 2\varphi = 0$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 \left(\frac{dR}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 \left(\frac{dT}{dx}\right)_0 - T_0\, e^2 \operatorname{sen} 2\varphi = 0$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 \left(\frac{dT}{dy}\right)_0 = 0\,,$$

dalle quali, essendo

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = -2N(1-e^2)$$

si ottiene

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)_0 = -\frac{3\, e^2 R_0 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{N(1-e^2)} \qquad \left(\frac{dR}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = -\frac{T_0\, e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{N(1-e^2)} \qquad \left(\frac{dT}{dy}\right)_0 = 0\,.$$

Sostituendo nella (50) e tenendo presenti le (51) e le (44) si ottiene

$$\left(\frac{d^3 z}{d\sigma^3}\right)_0 = -\frac{3\, e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{N(1-e^2)} \cos Z (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z)$$

$$\left(\frac{d^4 y}{d\sigma^4}\right)_0 = +\frac{8\, e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{N(1-e^2)} \operatorname{sen} Z \cos Z (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z)\, T_0$$

$$\left(\frac{d^4 x}{d\sigma^4}\right)_0 = +\frac{e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{N(1-e^2)} (R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z)(9 R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z)$$

e quindi le (37) col detto termine consecutivo, e relativamente all'ellissoide di rotazione saranno

$$x = \sigma \cos Z - \frac{\sigma^3}{6\rho R} \cos Z + \frac{\sigma^4}{24 N R} \frac{e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{1-e^2} (9 R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) + \ldots$$

$$y = \sigma \operatorname{sen} Z - \frac{\sigma^3}{6 N R} \operatorname{sen} Z + \frac{\sigma^4}{3 N^2 R} \frac{e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{1-e^2} \operatorname{sen} Z \cos Z + \ldots$$

$$z = \frac{\sigma^2}{2R} \qquad - \frac{\sigma^3}{2 N R} \frac{e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{1-e^2} \cos Z + \ldots$$

20. Ci rimane ora a trovare nella (47) il coefficiente $\left(\frac{d^3 Z}{d\sigma^3}\right)_0$. A tale scopo sostituiamo le precedenti espressioni di x ed y nella equazione

$$x \operatorname{sen}\beta - y \cos\beta = 0$$

e si ottiene

$$\operatorname{sen}(\beta - Z) = \frac{\sigma^2}{6} A B - \frac{\sigma^3}{3} K A D$$

ove

$$A = \frac{1}{R}, \quad B = \frac{\cos Z \operatorname{sen} \beta}{\rho} - \frac{\operatorname{sen} Z \operatorname{sen} \beta}{N}$$

$$K = \frac{e^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{N(1-e^2)}, \quad D = \frac{1}{8}(9 R_0 \cos^2 Z + T_0 \operatorname{sen}^2 Z) \operatorname{sen} \beta - \frac{\operatorname{sen} Z \cos Z \operatorname{sen} \beta}{N}.$$

Derivando tre volte consecutivamente e poi supponendo che σ converga verso zero, per cui Z convergerà verso Z_0 che può ritenersi uguale a β avremo per σ infinitamente piccolo

$$\left(\frac{d^3 Z}{d \sigma^3}\right)_0 = 2 K A_\beta D_\beta$$

ove A_β e D_β esprimono ciò che divengono A e D, quando nelle loro espressioni in luogo di Z si pone β e quindi si otterrà

$$\left(\frac{d^3 Z}{d \sigma^3}\right)_0 = \frac{e^2 \operatorname{sen} 2 \varphi}{8 N^2 (1-e^2)^2 R} \operatorname{sen} \beta$$

trascurando i termini col fattore e^4, avremo la cercata differenza di azimut col termine di 4° ordine

$$Z - \beta = -\frac{1}{12} \frac{e^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} 2\beta}{1-e^2} \frac{\sigma^2}{N R} + \frac{1}{48} \frac{e^2 \operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{sen} \beta}{(1-e^2)^2} \frac{\sigma^3}{N^2 R} + \dots$$

e ponendo R in luogo di $N(1-e^2)$ si ha

$$Z - \beta = -\frac{1}{12} \frac{e^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} 2\beta}{1-e^2} \frac{\sigma^2}{N R} + \frac{1}{48} e^2 \operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{sen} \beta \frac{\sigma^3}{R^3} + \dots$$

come già avevamo ottenuto col primo procedimento.

Firenze, 31 Ottobre 1883.

SUGLI
ARCHI ELASTICI

MEMORIA

DELL'INGEGNERE

CAMILLO GUIDI

Approvata nell' adunanza 30 Dicembre 1883

1. In altra mia Memoria (*) sopra lo stesso argomento mi sono occupato di rappresentare graficamente la legge di variazione delle forze interne in una sezione qualunque di un arco da ponte a due o a tre cerniere, quando il ponte fosse percorso da un carico concentrato. Accennai in seguito come da queste rappresentazioni grafiche si potessero immediatamente dedurre le massime forze interne nella detta sezione quando il ponte venisse percorso da un complesso di carichi concentrati, ovvero da un carico uniformemente ripartito. Tale problema potè essere risoluto colle sole leggi della statica per gli archi a tre cerniere, mentre per gli archi a due cerniere si richiedeva il soccorso della teoria dell'elasticità ed io supposi nella suddetta Memoria già determinata la spinta orizzontale dell'arco prodotta da un carico concentrato in varie posizioni. Quest'ultimo problema, ovvero il problema più generale: « costruire la curva delle pressioni in un arco elastico caricato, qualunque sia la sua forma e qualunque siano le condizioni di posa » è uno dei problemi meno facili della teoria dell'elasticità e per applicare a ciascun caso particolare le formole finali che da quella teoria si deducono bisogna eseguire laboriosi calcoli, a meno che si faccia uso di apposite tabelle numeriche già calcolate o di formule approssimate.

2. Il Prof. Eddy (Università di Cincinnati) nelle sue *New Constructions in Graphical Statics* (**) dà di questo problema una soluzione puramente grafica che sembra la più semplice e la più facile di quelle già conosciute. Egli risolve il problema per un arco di un sol pezzo incastrato alle estremità, per un arco incastrato alle estremità e con una cerniera in chiave, per un arco di un sol pezzo collegato a cerniera

(*) *Sulla determinazione grafica delle forze interne negli archi metallici.* — Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie 3ª, Vol. IV.
(**) *Researches in Graphical Statics.* — New-York, Van Nostrand 1878.

alle estremità, per un arco a tre cerniere (in questo caso il problema è determinato staticamente) per un arco incastrato ad un estremo e collegato a cerniera all'altro estremo, e finalmente per un arco con una cerniera di estremità e con un'altra in chiave. In tutti questi esempi ritenendo l'arco di sezione costante, sollecitato da carichi fissi, determina sempre collo stesso metodo la curva delle pressioni, dalla quale poi deduce gli sforzi nelle varie sezioni dell'arco; e lo stesso metodo gli serve ancora a determinare gli sforzi prodotti da un aumento di temperatura ovvero da un difetto di posa.

Peraltro il metodo dell'Eddy, come egli lo espone, è soltanto approssimato, e l'autore stesso lo avverte in una appendice a pag. 99; infatti egli ritiene l'elemento Δs dell'arco eguale alla sua proiezione orizzontale Δx, ciò che può supporsi senza grave errore se l'arco è ribassatissimo. Inoltre egli, senza dirlo, trascura le deformazioni prodotte nell'arco dagli sforzi di compressione agenti secondo i vari elementi dell'arco stesso. Anche noi in questo scritto non ci occuperemo di tali deformazioni: in generale esse sono trascurabili rispetto a quelle prodotte dal momento flettente; peraltro se si volesse tenerne conto, si può determinare con grandissima approssimazione e semplicità la spinta orizzontale che ne deriva nell'arco collo stesso metodo che serve per determinare la spinta orizzontale prodotta da una variazione di temperatura: anzi le due ricerche si possono riunire in una (*).

Se non che alcune delle proposizioni che l'Eddy premette nel libro citato prima di entrare nell'argomento e che servono a giustificare il suo metodo sono dimostrate in modo poco chiaro e soddisfacente e specialmente la dimostrazione della proposizione IV (pag. 12) che è fondamentale per quella trattazione lascia il lettore poco soddisfatto. E l'A. stesso, riconoscendo l'insufficienza di quella dimostrazione, aggiunge a pag. 98 un'appendice, la quale comincia con queste parole:

« The truth of Proposition IV is, perhaps, not sufficiently established in the » demonstration heretofore given. As it is a fundamental proposition in the graphical » treatment of arches, and as it is desiderable that no doubt exist as to its vali- » dity, we now offer a second proof of it, which, it is thought, avoids the difficulties » of the former demonstration ».

E la seconda dimostrazione, benchè più esplicita della prima, lascia però anche essa a desiderare in fatto di chiarezza e non sembra applicabile in quei casi nei quali la retta di chiusa rispetto all'asse dell'arco considerato come curva funicolare non è orizzontale come per es. nell'arco con una sola cerniera di estremità.

3. In questo scritto do una dimostrazione della Proposizione IV di Eddy, che mi sembra più soddisfacente, estendo il metodo di Eddy all'arco di sezione variabile, in seguito faccio lo studio dei massimi sforzi interni in un arco di un sol pezzo incastrato alle estremità e sollecitato da carichi mobili e da ultimo mi occupo della determinazione della spinta orizzontale in un arco di sezione costante articolato alle estremità, prodotta da un carico concentrato in varie posizioni, problema che avevo supposto risoluto nella mia precedente Memoria.

(*) Cr. Culmann - *Statique Graphique*, pag. 526.

4. Ecco l'enunciato della Proposizione IV:

« If in any arch that equilibrium polygon (due to the weights) be constructed
» which has the same horizontal thrust as the arch actually exerts; and if its closing
» line be drawn from consideration of the conditions imposed by the supports, etc.;
» and if furthermore the curve of the arch itself be regarded as another equilibrium
» polygon due to some system of loading not given, and its closing line be also found
» from the same considerations respecting supports etc., then, when these two polygons
» are placed so that these closing lines coincide and their areas partially cover each
» other, the ordinates intercepted between these two polygons are proportional to the
» real bending moments acting in the arch ».

Immaginiamo costruita la vera curva delle pressioni dell'arco ossia il poligono funicolare dei carichi che ha per distanza polare la spinta orizzontale dell'arco e per lati estremi le linee delle reazioni degli appoggi. La figura racchiusa fra questo poligono funicolare, che indicheremo colla lettera p, e l'asse dell'arco rappresenta, come è noto, il diagramma del momento flettente per l'arco e che indicheremo colla lettera D. Questo diagramma, dovrà soddisfare in ogni caso particolare a certe determinate condizioni richieste dalla natura degli appoggi e dalla presenza o assenza di cerniere.

Per fissare le idee, supponiamo che si tratti di un arco simmetrico di un sol pezzo, incastrato alle estremità. Indichiamo con M il momento flettente in una sezione trasversale qualunque il cui momento d'inerzia sia I, con E il modulo di elasticità del materiale di cui è formato l'arco, con Δs l'elemento dell'arco e assumendo la corda come asse delle x e la perpendicolare per un estremo dell'arco come asse delle y, è noto che devono in tal caso sussistere le eguaglianze

$$\sum \frac{M \Delta s}{E I} = 0 \; , \qquad \sum \frac{M \Delta s}{E I} x = 0 \; , \qquad \sum \frac{M \Delta s}{E I} y = 0$$

dove le sommatorie s'intendono estese da un estremo all'altro; e ciò per essere le tangenti estreme dell'arco invariabili di posizione e nulla la deformazione totale. Le quali equazioni, ponendo $I_1 = I \frac{\Delta x}{\Delta s}$ possono anche scriversi

$$\sum \frac{M \Delta x}{E I_1} = 0 \; , \qquad \sum \frac{M \Delta x}{E I_1} x = 0 \; , \qquad \sum \frac{M \Delta x}{E I_1} y = 0 \; ; \qquad \ldots (1)$$

le prime due esprimono che il diagramma D del momento flettente dopo averne divise le ordinate per I_1 è di area nulla e che il suo momento rispetto una qualunque delle verticali degli appoggi, è del pari nullo.

Conduciamo del poligono funicolare p una retta di chiusa u in modo che il diagramma D' racchiuso fra p ed u soddisfi alle stesse condizioni del diagramma D; D' rappresenta evidentemente il diagramma del momento flettente per una trave orizzontale della stessa portata dell'arco, nelle stesse condizioni di posa, sollecitata dallo stesso carico e per la quale I_1 sia il momento d'inerzia variabile della sezione trasversale. Il diagramma D'' racchiuso fra l'asse dell'arco e la retta u risultando dalla differenza dei due diagrammi D' e D soddisferà anche esso alle stesse condizioni dei due diagrammi D e D' e rappresenterebbe il diagramma del momento flettente per

la stessa trave rettilinea orizzontale, di cui sopra si è detto, quando essa fosse sollecitata da un carico che avesse per curva funicolare l'asse dell'arco.

Da ciò risulta che costruiti i due diagrammi D' e D'', dalla loro differenza si ottiene il diagramma D del momento flettente per l'arco, ciò che prova la Proposizione IV dell'Eddy.

Per un arco articolato alle estremità, la Proposizione IV di Eddy è evidente.

5. Il diagramma D'' è facile a costruirsi giacchè è facile condurre la retta u in modo da soddisfare alle condizioni richieste dalla natura degli appoggi e dalla presenza o assenza di cerniere. Riguardo al diagramma D' non essendo nota la spinta orizzontale dell'arco, noi possiamo soltanto costruire un diagramma D_1' affine a D'; resterà poi a determinare per quale rapporto devono moltiplicarsi le ordinate di questo diagramma D_1' per ottenere quelle del diagramma D'. Ora ecco come si risolve questa seconda parte del problema. Supponiamo ancora che si tratti dello stesso arco incastrato alle estremità: indichiamo con b la base di riduzione dei momenti M, ossia la distanza polare del poligono funicolare p e ritenendo Δx costante, indichiamo con η le ordinate del diagramma D distanti fra loro di Δx: la terza delle equazioni (1), la quale esprime l'invariabilità della lunghezza della corda dell'arco fornisce $\sum \frac{\eta}{I_1} y = 0$, ovvero indicando con η' ed η'' le ordinate corrispondenti dei due diagrammi D' e D'' dalla cui differenza risulta il diagramma D, si dovrà avere $\sum \frac{\eta'}{I_1} y = \sum \frac{\eta''}{I_1} y$ e quindi se indichiamo con η_1' le ordinate del diagramma D'_1 affine a D' e costruiamo con due poligoni di moltiplicazione i segmenti $\sum \frac{\eta''}{I_1} y = f$ e $\sum \frac{\eta_1'}{I_1} y = g$, moltiplicando le ordinate del diagramma D_1' pel rapporto $\frac{f}{g}$ si otterranno le ordinate del vero diagramma D'.

All'espressione $\sum \frac{\eta}{I_1} y$ si può dare questa interpretazione. Immaginiamo una trave verticale della stessa altezza dell'arco, incastrata all'estremo superiore e nelle cui sezioni di momento d'inerzia I_1 variabile agiscano gli stessi momenti flettenti che agiscono nelle sezioni dell'arco di momento d'inerzia I e che sono allo stesso livello con quelle; la deformazione totale di questa trave è appunto data da $\sum \frac{\eta}{I_1} y$; per la condizione dell'invariabilità della lunghezza della corda dell'arco, anche la deformazione totale di questa trave dev'essere nulla.

Per l'arco incastrato all'estremità la y della terza delle equazioni (1) può anche rappresentare la distanza del baricentro della sezione dell'arco dalla tangente al vertice dell'arco stesso di guisa che la trave verticale, di cui sopra si è detto, si può anche supporre incastrata all'estremità inferiore, come si è fatto nelle applicazioni che seguono.

Se si suppone che il momento d'inerzia della sezione dell'arco cresca dalla chiave verso l'imposta nella stessa ragione in cui crescono i rapporti $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, ciò che, per un

arco incastrato alle estremità, è in generale più prossimo al vero di quel che supporre la sezione costante (*), il prodotto $I \frac{\Delta x}{\Delta s} = I_1$ è costante, ed in tal caso le (1) possono anche scriversi

$$\Sigma M \Delta x = 0 \ , \quad \Sigma M \Delta x . x = 0 \ , \quad \Sigma M \Delta x . y = 0 \ , \qquad \ldots (2)$$

ossia, è lo stesso diagramma D del momento flettente che deve soddisfare alle condizioni già accennate ed è di molto agevolata la ricerca delle ordinate f e g. Se l'arco è molto ribassato si può senza grave errore ritenere $\Delta s = \Delta x$, ed in tal caso se la sezione dell'arco è variabile le (1) possono scriversi come segue

$$\sum \frac{M}{I} \Delta x = 0 \ , \quad \sum \frac{M}{I} \Delta x . x = 0 \ , \quad \sum \frac{M}{I} \Delta x . y = 0 \ , \qquad \ldots (3).$$

e se l'arco è di sezione costante, si hanno ancora le relazioni (2).

6. Nell'esempio che segue essendo l'arco molto ribassato riterremo $\Delta s = \Delta x$ e ci riferiremo quindi alle formole (3).

Sia $b_8 a b_8'$ (Tav. I) l'asse di un arco simmetrico incastrato all'estremità, il momento d'inerzia della sezione dell'arco sia I per i due tratti $b_8 a_2$, $b_8' a_2'$, I_1 per gli altri due tratti $a_2 a_1$, $a_2' a_1'$, ed I_2 per la porzione di mezzo $a_1 a_1'$. L'arco sia sollecitato da carichi eguali ed equidistanti applicati ai punti $a_i a_i'$ dove i varia da 1 a 7 e supponiamo i carichi sulla metà di sinistra dell'arco doppi di quelli sulla metà di destra; al vertice dell'arco vi sia applicato un carico eguale alla somma di due, uno metà di un carico di sinistra, l'altro metà di un carico di destra. Questi carichi concentrati possano rappresentare due carichi uniformemente ripartiti lungo le due semicorde dell'arco uno metà dell'altro, se questi carichi vengono per mezzo di montanti verticali trasmessi all'arco nei punti a_i, a, a_i'.

Portiamo sulla verticale estrema di sinistra in 01, 12, ..., 78 i carichi gravanti sulla metà di sinistra dell'arco (01 rappresenta quello agente sul vertice dell'arco e dovuto al carico uniformemente ripartito di sinistra) e sulla verticale estrema di destra in 0'1', 1'2', ..., 7'8' i carichi applicati alla metà di destra dell'arco (0'1' rappresenta quello agente sul vertice dell'arco e dovuto al carico uniformemente ripartito di destra). Proiettiamo le due rette delle forze dal polo c punto d'intersezione della 0 0' colla mezzeria dell'arco, e costruiamo i due poligoni funicolari c_i, c_i' partendo dal punto c: si ha così il poligono funicolare di tutti i carichi sollecitanti l'arco.

7. Andiamo ora in cerca della retta di chiusa $h_8 h_8'$ tale che col poligono funicolare già tracciato racchiuda il diagramma D_1' del momento flettente per una trave orizzontale della stessa portata dell'arco, avente le stesse sezioni dell'arco, incastrata orizzontalmente all'estremità e caricata come lo è l'arco. Se la trave fosse di sezione costante tale retta di chiusa resterebbe determinata dalle due condizioni: *a*) che l'area del diagramma suddetto risulti nullo; *b*) che i baricentri della parte positiva e della parte negativa si trovino sulla medesima verticale; ma essendo invece variabile la sezione è il diagramma che si ottiene da quello del momento flettente dividendone le

(*) Cr. CULMANN, l. c. pag. 553.

ordinate per il momento d'inerzia variabile, che deve soddisfare alle due suddette condizioni (*). Ora il diagramma D_1' può considerarsi come differenza fra l'area positiva $l_8 c l_8' l_8$ e l'area negativa del trapezio $l_8 h_8 h_8' l_8'$ di cui non conosciamo ancora il lato $h_8 h_8'$, ma qualunque esso sia possiamo scomporre il trapezio nei due triangoli $l_8 l_8' h_8$, $h_8 l_8' h_8'$ che chiameremo rispettivamente triangolo negativo di sinistra e triangolo negativo di destra. Ciò posto congiungiamo l_8' con un punto qualunque h_8^o della verticale estrema di sinistra e supponiamo sia $l_8' l_8 h_8^o$ il triangolo negativo di sinistra. Dividiamo le ordinate sì dell'area positiva $l_8 c l_8'$ come del triangolo negativo $l_8 l_8' h_8^o$ per il momento d'inerzia variabile: o ciò che torna lo stesso per il nostro scopo, moltiplichiamo le ordinate delle due aree per il rapporto del momento d'inerzia I dei tratti estremi dell'arco al momento d'inerzia variabile: quindi le ordinate fra le verticali estreme e quelle per $a_2 a_2'$ restano invariate, quelle comprese fra le verticali per a_2, a_1 e fra le verticali per a_2', a_1' debbono essere moltiplicate per $\frac{I}{I_1}$ e finalmente le ordinate fra le verticali per a_1, a_1' vanno moltiplicate per $\frac{I}{I_2}$. Nel nostro esempio abbiamo supposto $I : I_1 : I_2 = 5 : 4 : 3$ abbiamo quindi moltiplicato le ordinate corrispondenti ai due tratti $a_2 a_1$, $a_2' a_1'$ per $\frac{5}{4}$ e quelle corrispondenti al tratto di mezzo $a_1 a_1'$ per $\frac{5}{3}$. Con ciò l'area positiva si è deformata nella figura $l_8 \gamma_2 \gamma_2'' \gamma_1'' \gamma_1^{iv} \gamma_1^{v} \gamma_1''' \gamma_2''' \gamma_2' l_8' l_8$ che indicheremo con Ω e quella negativa del triangolo $l_8 l_8' h_8^o$ nella figura $l_8 \lambda_2 \lambda_2'' \lambda_1'' \lambda_1^{iv} \lambda_1^{v} \lambda_1''' \lambda_2''' \lambda_2' l_8' h_8^o$ che indicheremo con Ω_s'. Sia tw la verticale pel baricentro dell'area Ω e sia pq la misura di quest'area ridotta ad una base eguale alla semicorda dell'arco; sia poi pq la verticale baricentrica dell'area Ω_s', la quale verticale evidentemente non muta col variare del punto h_8^o che noi abbiamo assunto ad arbitrio; la verticale pel baricentro dell'area negativa di destra Ω_d' sarà evidentemente simmetrica alla pq rispetto alla verticale di mezzo. Da un punto qualunque s di quest'ultima verticale baricentrica proiettiamo la misura pq dell'area Ω posta sulla verticale baricentrica di Ω_s', tiriamo poi wr parallela al raggio sp: risultano pr, rq rispettivamente le misure della vera area negativa di sinistra e di quella di destra essendo ancora la semicorda dell'arco la base di riduzione. Infatti la somma di queste misure risulta eguale alla misura dell'area Ω e di più il baricentro di tutta l'area negativa deformata cadrà sulla verticale del baricentro dell'area positiva Ω. Possiamo ora determinare la vera retta di chiusa del poligono funicolare, per averne infatti le ordinate estreme $l_8 h_8$, $l_8' h_8'$ basta moltiplicare l'ordinata $l_8 h_8^o$ assunta ad arbitrio rispettivamente pei rapporti $\frac{pr}{l_8 i}$, $\frac{rq}{l_8 i}$ dove $l_8 i$ rappresenta la misura (sempre rispetto alla stessa base di riduzione) dell'area Ω_s' di cui abbiamo assunto ad arbitrio l'ordinata $l_8 h_8^o$. Ribaltiamo $l_8 h_8^o$ in $l_8 h^o$ quindi

(*) In ogni caso è *il diagramma delle curvature*, ossia quel diagramma le cui ordinate sono proporzionali alle curvature dell'asse deformato, che deve soddisfare alle due accennate condizioni; il quale diagramma si ottiene da quello del momento flettente dividendone le ordinate pel momento d'inerzia; ma se questo è costante, lo stesso diagramma del momento flettente rappresenta evidentemente il diagramma delle curvature.

prendiamo $l_8 r_1 = pr$, $l_8 r_2 = rq$ proiettiamo r_1, r_2 da i, da h^o tiriamo le parallele $h^o h_8$, $h^o s_1$ finalmente portiamo $l_8 s_1$ in $l_8' h_8'$ risulta $h_8 h_8'$ la retta di chiusa cercata.

8. Più semplice è determinare la retta di chiusa rispetto all'asse dell'arco considerato come curva funicolare, giacchè in grazia della simmetria dell'arco questa retta dev'essere evidentemente orizzontale e quindi essa resta determinata dalla sola condizione che l'area del diagramma che da quello D'' si ottiene dividendone le ordinate pel momento d'inerzia variabile, riesca nulla: l'altra condizione è soddisfatta di conseguenza essendo il diagramma simmetrico.

Il diagramma D'' può essere considerato come la differenza fra l'area positiva $b_8 a b_8' b_8$ e l'area negativa di un rettangolo di cui vogliamo ora determinare l'altezza. Deformiamo l'area positiva $\Big($ nella figura si è eseguita l'operazione soltanto per la metà di sinistra moltiplicando le ordinate fra i punti $\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_1$ pel rapporto $\frac{5}{4}$, e quelle fra i punti $\mathfrak{a}_1$ ed $\mathfrak{a}$ pel rapporto $\frac{5}{3}\Big)$ con che si ottiene per la metà di sinistra la figura $b_8 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2'' \mathfrak{a}_1'' \mathfrak{a}_1''' \mathfrak{a}'' b\, b_8$: ridotta quest'area alla base $b b_8$ se ne porti la misura in $b_8 x$. Congiunto poi b_8' con un punto k_8^o scelto ad arbitrio sulla verticale estrema di sinistra si consideri il triangolo $b_8 b_8' k_8^o$ come metà del rettangolo negativo, ossia si supponga il punto k_8^o appartenere alla retta di chiusa. Moltiplichiamo le ordinate di questo triangolo comprese nei tratti $\mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2' \mathfrak{b}_1'$ per $\frac{5}{4}$ e quelle del tratto intermedio $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1'$ per $\frac{5}{3}$, con che otteniamo la figura $b_8\, \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_2'' \mathfrak{b}_1'' \mathfrak{b}_1''' \mathfrak{b}_1^{v} \mathfrak{b}_1^{iv} \mathfrak{b}_2''' \mathfrak{b}_2' b_8' k_8^o$: sia $b_8 z$ la misura di quest'area rispetto alla base $b b_8$, congiungiamo z con x e per k_8^o guidiamo la parallela, risulterà $b_8 k^o$ l'altezza del rettangolo negativo.

Per le ulteriori costruzioni da eseguire conviene affine di avere un risultato più esatto di disegnare l'asse dell'arco adottando per le altezze una scala maggiore che per le lunghezze. Nel nostro disegno si è tenuta la scala delle altezze doppia di quella delle lunghezze e si è avuto con ciò la linea $b d b_8'$ che ora considereremo come l'asse dell'arco; ciò posto si prenda $b_8 k_8$ eguale al doppio di $b_8 k^o$, $k_8 k_8'$ sarà la retta di chiusa della linea $b_8 d b_8'$ considerata come curva funicolare.

9. Rimane ora a risolvere la seconda parte del problema, cioè dedurre dal diagramma D_1' il diagramma D', ossia trovare il rapporto per cui bisogna moltiplicare le ordinate del diagramma D_1' per avere quelle del diagramma D'.

Costruiamo i diagrammi delle curvature corrispondenti ai diagrammi D_1' e D'', ciò che otteniamo moltiplicando le ordinate dei due diagrammi corrispondenti ai tratti $\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2'\, \mathfrak{a}_1'$ per il rapporto $\frac{I}{I_1} = \frac{5}{4}$ e quelle corrispondenti al tratto $\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_1'$ per $\frac{I}{I_2} = \frac{5}{3}$. Per il diagramma D'' in grazia della sua simmetria basta eseguire questa operazione per una metà. Si ha così il diagramma delle curvature $l_8\, \gamma_2 \gamma_1^{vi} \gamma_1^{vii} \gamma_1^{viii} \gamma_1^{ix} \gamma_2^{iv} \gamma_2' l_8' h_8' h_8$ corrispondente al diagramma D_1' e il diagramma $b_8\, \mathfrak{d}_2\, \mathfrak{d}_1'' \mathfrak{d}_1''' d' k k_8$ metà del diagramma delle curvature corrispondente al diagramma D''.

Ciò posto sull'orizzontale per d assunta come retta delle forze portiamo

$$d\,m_8 = \frac{k_8\,b_8 + k_8'\,b_8'}{4}, \quad m_8\,m_7 = \frac{k_7\,d_7 + k_7'\,d_7'}{2}, \; \ldots\ldots$$

o, ciò che torna lo stesso, in grazia della simmetria del diagramma prendiamo $d\,m_8 = \frac{k_8\,b_8}{2}$, $m_8\,m_7 = k_7\,d_7$, $m_7\,m_6 = k_6\,d_6$, $m_6\,m_5 = k_5\,d_5$ e poi in senso contrario, giacchè il momento flettente muta di senso, prendiamo $m_5\,m_4 = k_4\,d_4'''$, $m_4\,m_3 = k_3\,d_3'''$, $m_3\,m_2 = k_2\,d_2'''$, $m_2\,m_1 = k_1\,d_1'''$. Consideriamo queste ordinate come forze applicate alle sezioni b, d_7'', d_6'', ..., d_1'' della trave bd, supposte eguali alle sezioni b_8, b_8'; d_7, d_7'; d_6, d_6', ... dell'arco che trovansi al medesimo livello, proiettiamo la retta delle forze da b e costruiamo il poligono funicolare $b\,f_7\,f_6\,f_5 \ldots, f$, assumendo come primo vertice lo stesso punto b; esso risulta inscritto in una curva che con sufficiente approssimazione possiamo ritenere affine all'asse deformato della trave $b\,d$ incastrata in b e sollecitata dai momenti flettenti del diagramma D''. Similmente portiamo sulla stessa orizzontale per d

$$d\,n_8 = \frac{h_8\,l_8 + h_8'\,l_8'}{4}, \; n_8\,n_7 = \frac{h_7\,c_7 + h_7'\,c_7'}{2}, \; n_7 n_6 = \frac{h_6\,c_6 + h_6'\,c_6'}{2}, \; n_6\,n_5 = \frac{h_5\,c_5 + h_5'\,c_5'}{2},$$

e poi in senso inverso

$$n_5\,n_4 = \frac{h_4\,c_4^{\text{IV}} - h_4'\,c_4'}{2}, \; n_4 n_3 = \frac{h_3\,c_3^{\text{IV}} + h_3'\,c_3^{\text{V}}}{2}, \; n_3\,n_2 = \frac{h_2\,c_2^{\text{IV}} + h_2'\,c_2^{\text{V}}}{2}, \; n_2\,n_1 = \frac{h_1 c_1^{\text{IV}} + h_1'\,c_1^{\text{V}}}{2}$$

e conservando lo stesso polo b costruiamo il poligono funicolare corrispondente $b\,g_7\;g_6\,g_5 \ldots g$, assumendo come primo vertice il punto b. Questo poligono funicolare risulta inscritto in una curva che con sufficiente approssimazione possiamo ritenere affine all'asse deformàto della trave bd sollecitata dai momenti flettenti del diagramma D_1'. Se le ordinate di questo diagramma fossero eguali a quelle del diagramma D' ossia se la distanza polare $c\,o$ fosse eguale alla spinta orizzontale esercitata dall'arco dovrebbe risultare, per quanto si è detto di sopra, $d\,f = d\,g$: ciò non essendo, si otterranno le ordinate del diagramma D' moltiplicando quelle corrispondenti del diagramma D_1' pel rapporto $\frac{d\,f}{d\,g}$ e la distanza polare relativa al diagramma D' si otterrà moltiplicando quella relativa al diagramma D_1' pel rapporto inverso $\frac{dg}{df}$. Nella figura si è preso $k_8\,e_8 = h_8\,l_8\,\frac{df}{dg}$, $k\,e = h\,c\,\frac{df}{dg}$, $k_8'\,e_8' = h_8'\,l_8'\,\frac{df}{dg}$: e_8, e, e_8' sono tre punti della curva delle pressioni; per costruirla conviene tracciare il nuovo poligono funicolare dei carichi. Dovendo la nuova retta di chiusa riuscire orizzontale coincidente colla $k_8\,k_8'$ troveremo il nuovo polo conducendo per c la parallela $c\,\upsilon$ alla retta di chiusa $h_8\,h_8'$ e per υ l'orizzontale $\upsilon\,\omega$, risulta ω il nuovo polo di proiezione, assumiamo poi $\omega\,\upsilon' = \omega\,\upsilon\,\frac{dg}{df}$ e sulla verticale per ν^{I}, costruiamo la retta delle forze prendendo i punti $u_1\,u_2\,u_3$ ... di livello coi punti 1 2 3 ... e $u_1\,u_1' = 0\,1 + 0'\,1'$. $u_1'\,u_2' = 1'\,2'$, ... Costruendo il poligono funicolare corrispondente, partendo da uno

dei tre punti e_8, e, e_8' esso dovrà passare per verifica per gli altri due. Il diagramma racchiuso fra questo poligono funicolare e l'asse $b_8 d b_8'$ dell'arco costituisce il diagramma D del momento flettente per l'arco. Nel rappresentare l'asse dell'arco essendosi presa la scala delle altezze doppia di quella delle lunghezze, la distanza polare $\omega v'$ rappresenta nella scala delle forze nella quale furono portati i carichi, la metà della spinta orizzontale mentre invece le ordinate momenti cioè le ordinate intercette fra il poligono funicolare relativo al polo ω e l'asse $b_8 d b_8'$ dell'arco risultano raddoppiate nella scala delle lunghezze.

10. Se dal diagramma D si deducesse il diagramma delle curvature, esso per verifica dovrebbe soddisfare alle due condizioni già più volte accennate. Sul libro già citato dell'Eddy il lettore troverà una costruzione grafica semplicissima che serve a verificare se coi momenti forniti dal diagramma D la deformazione totale della trave $b d$ è veramente nulla: nel nostro caso essendo l'arco di sezione variabile si dovrà per altro all'ordinate del diagramma D sostituire in quella verifica le ordinate del diagramma delle curvature corrispondente al diagramma D.

Abbiamo stimato conveniente di tralasciare questa verifica per non complicare maggiormente la nostra figura.

11. L'identico procedimento di cui ci siamo ora occupati può applicarsi alla determinazione della curva delle pressioni in un arco in muratura quando esso possa essere considerato come un arco elastico.

Arco incastrato sollecitato da carichi mobili.

12. Sia $b_8 a b_8'$ l'asse di un arco (Tav. II) incastrato agli estremi e pel quale supporremo $I \frac{\Delta x}{\Delta s} = I_1 =$ costante; anche qui per maggiore esattezza delle costruzioni grafiche che dobbiamo eseguire raddoppiamo la scala delle altezze rappresentandoci l'arco colla linea $b_8 d b_8'$. Divisa la corda $b_8 b_8'$ in 16 parti eguali, riteniamo che lungo le verticali passanti per i punti di divisione agiscano dei carichi concentrati eguali: anzi per la simmetria dell'arco sarà sufficiente considerare i carichi agenti sulla metà sinistra dell'arco. Per ciascuno di tali carichi troviamo la linea delle pressioni o, ciò che torna lo stesso in questo caso, determiniamo le linee d'azione delle reazioni degli appoggi. Supponiamo l'arco caricato dal solo carico più vicino all'appoggio di sinistra: il poligono funicolare si riduce ad una bilatera $l_8 c_7 l_8'$; per trovarne la retta di chiusa ricordiamo che il diagramma D_1' deve soddisfare alle due condizioni di essere di area nulla e che i baricentri della porzione positiva e della negativa stiano sulla medesima verticale. Il diagramma D_1' nel nostro caso risulta dalla differenza del triangolo positivo $l_8 c_7 l_8'$ e di un trapezio negativo che potremo al solito immaginare decomposto in due triangoli negativi i cui baricentri si trovano sulle verticali $p'p$, $s's$ che dividono la corda dell'arco in tre parti eguali. La misura del triangolo positivo rispetto alla semicorda dell'arco è la sua altezza pq, il bari-

centro si trova in u: proiettiamo pq da un punto s della $s's$ risultano allora rr_1, r_1r_2 le misure dei due triangoli negativi, quindi preso $l_8h_8 = rr_1$, $l_8'h_8' = r_1r_2$ si ha in h_8h_8' la retta di chiusa cercata. È facile infatti riconoscere che il trapezio $l_8h_8h_8'l_8'$ non solo è di area eguale al triangolo $l_8c_7l_8'$, ma ha di più il suo baricentro sulla verticale rr_2.

13. Se per tutti gli altri carichi facciamo costantemente passare il primo lato del poligono funicolare per l_8 ed il secondo per l_8' ed il vertice sulla linea del carico lo facciamo cadere sull'orizzontale per c_7, la misura dell'area del triangolo positivo del diagramma D_1' è costante per tutti i carichi ed eguale a pq. Inoltre pel poligono $l_8c_0l_8'$ relativo al carico di mezzo la retta di chiusa è evidentemente l'orizzontale pel punto di mezzo h dell'altezza lc_0 ed è poi facile riconoscere che si ottengono le rette di chiusa per tutti gli altri poligoni funicolari dividendo $h_8^0h_8$ in 7 parti eguali e congiungendo i punti di divisione col punto h. Infatti le verticali rr_2 contenenti i baricentri u dei triangoli positivi risultano equidistanti e quindi delle misure rr_1, r_1r_2 la prima diminuisce, la seconda aumenta secondo i termini di una progressione aritmetica.

14. La retta di chiusa rispetto all'asse dell'arco considerato come curva funicolare si ottiene costruendo l'orizzontale di compenso k_8k_8' rispetto all'asse stesso. Si hanno così i due diagrammi D'_1 e D''.

15. Per risolvere ora la seconda parte del problema portiamo sull'orizzontale per d, $d8 = \frac{k_8b_8}{2}$, $87 = k_7d_7$, $76 = k_6d_6$, $65 = k_5d_5$ e poi in senso inverso $54 = k_4d_4$, $43 = k_3d_3$, $32 = k_2d_2$, $21 = k_1d_1$ e scelto il polo nel punto b costruiamo il poligono funicolare bf. In seguito sulla stessa orizzontale portiamo

$$d8_7 = \frac{h_8l_8 + h_8'l_8'}{2}, \quad 8_77_7 = h_7c_7 - h_7'c_7', \quad 7_76_7 = h_6c_6 - h_6'c_6' \; .\; .\; .\; .\; 2_71_7 = h_1c_1 + h_1'c_1'$$

(evidentemente $8_77_7 = 7_76_7 = \; .\; .\; .\; .\; . = 2_71_7$) e si costruisca il poligono funicolare bg_{VII}. Ciò fatto per avere le linee delle reazioni degli appoggi basta moltiplicare le tre ordinate h_8l_8, h_7c_7, $h_8'l_8'$ pel rapporto $\frac{2\,.\,df}{dg_{\text{VII}}}$ e portarle nel dovuto senso a partire dalla retta di chiusa k_8k_8' e congiungere i punti così ottenuti. Ciò è stato fatto nella Tav. III: in questa tavola è rappresentato colla linea —·—·— l'asse dello stesso arco e colla scala delle altezze eguale a quella delle lunghezze, cosicchè le altezze sono in questa tavola in iscala metà rispetto a quelle della tavola precedente; si sono perciò moltiplicate le tre ordinate h_8l_8, h_7c_7, $h_8'l_8'$ della Tav. II pel rapporto $\frac{df}{dg_{\text{VII}}}$ e si sono portate a partire dalla retta di compenso (non segnata nella figura) dell'arco a_2c_2' (Tav. III): si sono così ottenuti i punti $a_7b_7c_7$ cosicchè a_7b_7, c_7b_7, sono le linee delle reazioni degli appoggi prodotte dal carico d_7b_7.

Nell'identico modo si sono costruite le linee delle reazioni degli appoggi dovute a ciascuno degli altri carichi. Sull'orizzontale per d (Tav. II) si trova anche la retta

delle forze per il poligono funicolare $b g_{vi}$ e b è il polo; per i poligoni funicolari $b g_{v}$, $b g_{iv}$, $b g_{iii}$ la retta delle forze si è costruita sulla semicorda $b b_8$ e d è il polo; finalmente per i poligoni funicolari $b g_{ii}$, $b g_{i}$, $b g$ la retta delle forze è stata costruita in scala metà per ragione di spazio, ma sull'orizzontale pel punto medio di $b d$, conservando in b il polo.

16. Il luogo delle intersezioni delle reazioni degli appoggi colle verticali dei carichi corrispondenti (Tav. III) è una linea leggermente incurvata verso l'arco; le altre due linee simmetriche rispetto alla verticale di mezzo e segnate più forti rappresentano l'inviluppo delle linee delle reazioni degli appoggi. Chiameremo la prima: *linea d'intersezione;* le altre due insieme: *inviluppo delle reazioni.*

17. Sia $k k'$ (fig. α) Tav. II. la retta di chiusa rispetto all'arco considerato come curva funicolare, sia e_0 il punto d'intersezione delle reazioni prodotte dal carico P: congiungiamo e_0 con k e k' e da k_0 punto di mezzo di $k k'$ guidiamo le parallele $k_0 e$, $k_0 e'$; dimostriamo che $e e_0$, $e' e_0$ sono le linee delle reazioni degli appoggi. Conduciamo la $e e'$ e la $e_0 k_0$, il triangolo $e\, k_0 k$ è equivalente all'altro $e k_0 e_0$ ed il triangolo $k_0 e' k'$ all'altro $k_0 e' e_0$; ne segue che il triangolo $e e_0 e'$ è equivalente all'area del trapezio $e k k' e'$ per modo che l'area del diagramma $e e_0 e' k' k$ è nulla. Inoltre sia u il baricentro del triangolo $e e_0 e'$, conduciamo per esso la verticale $r u$ e dimostriamo che essa contiene anche il baricentro del trapezio $e k k' e'$: basta per questo dimostrare che $\frac{k e}{k' e'} = \frac{r s}{r p}$ se s e p dividono $k k'$ in tre parti eguali; ma

$$r s = r k_0 + k_0 s = \frac{1}{3}(q k_0 + k_0 k') = \frac{1}{3} q k', \quad r p = k_0 p - k_0 r = \frac{1}{3}(k_0 k - k_0 q) = \frac{1}{3} q k,$$

basterà quindi dimostrare che $\frac{k e}{k' e'} = \frac{q k'}{q k}$. Prolunghiamo $e' k_0$ in v, risulta $k v = k' e'$ e poichè l'area del triangolo $e e_0 e'$ è eguale a quella del trapezio $e k k' e'$ dev'essere $e k + k v = c e_0$, ossia la congiungente $v e_0$ deve risultare parallela ad $e e'$; ma d'altra parte $k e = e_0 n$ quindi $n c = k' e'$, ossia anche la congiungente $n k'$ è parallela ad $e e'$. Prolunghiamo anche $e k_0$ in v' e congiungiamo k con m dalla considerazione dei due quadrangoli completi $e v v' e'$, $k v e_0 m$ che hanno cinque coppie di lati corrispondenti paralleli si deduce che i sesti lati $k m$, $e e'$, sono anche paralleli, quindi $k m$ è parallela a $k' n$. Ne segue che $\frac{k e}{k' e'} = \frac{k e}{k v} = \frac{q n}{q m} = \frac{q k'}{q k}$ come volevasi dimostrare. Da ciò ne deriva che $e e_0 e' k' k$ è il vero diagramma del momento flettente ossia che $e e_0$, $e' e_0$ sono le reazioni degli appoggi.

18. Dal numero precedente si ricava un metodo semplicissimo per dedurre dalla *linea d'intersezione, l'inviluppo delle reazioni.* Ora, come già si è notato, la linea d'intersezione è di leggera curvatura, quindi con molta approssimazione può essere sostituita da un arco parabolico: si può dunque limitare la determinazione grafica delle reazioni degli appoggi ai soli due carichi $b d$, $b_7 d_7$ (Tav. III) ossia determinare

i soli due punti b, b_7, dai quali risulta individuato l'arco parabolico da sostituire alla vera linea d'intersezione. Dopo ciò si può dedurre l'inviluppo delle reazioni, come è stato indicato al n° 17.

19. Eseguendo la costruzione della linea d'intersezione, per un arco parabolico, si trova che essa può essere sostituita senza errore apprezzabile da un'orizzontale la quale taglia la verticale media al disopra dell'arco ad una distanza dal suo vertice eguale ad $\frac{1}{5}$ della freccia dell'arco stesso. Questo risultato evidentemente è il medesimo per tutti gli archi parabolici, giacchè essi rappresentano altrettante curve affini fra loro. Ne deriva, come ora dimostreremo, che l'inviluppo delle reazioni è costituito da due iperbole.

Infatti, se la linea d'intersezione è una retta (fig. β) Tav. II, le punteggiate a_3, a_2, a_1 . . . ; b_3, b_2, b_1 . . . sono proiettive perchè sezioni di due fasci eguali k_4, k; quindi le congiungenti $a_3 b_3$, a_2, b_2, . . . ossia le linee delle reazioni dell'appoggio sinistro inviluppano una conica di cui sono tangenti la $b_2 b_3'$ e la verticale $k_4 a_3$. È poi evidente che quest'ultima tangente viene intersecata da quella che immediatamente segue, nel suo punto all'∞, quindi la conica è un'iperbola di cui la verticale dell'appoggio è un assintoto. Lo stesso va detto riguardo alla linea inviluppata dalle reazioni dell'appoggio di destra (*).

20. Costruita la linea d'intersezione e l'inviluppo delle reazioni, passiamo alla ricerca dei massimi sforzi interni in una sezione qualunque dell'arco prodotti da un carico mobile che riterremo uniformemente ripartito. Consideriamo la sezione mn (Tav. III) e supponiamola da prima a doppio T di guisa che si possa ritenere che le tavole superiore ed inferiore resistano agli sforzi normali e la parete verticale allo sforzo di taglio: consideriamo, come faremo sempre in seguito, l'equilibrio della porzione di arco compresa fra la sezione mn e l'appoggio di sinistra. Potremo, senza errore apprezzabile, sostituire gli sforzi interni normali con due forze concentrate applicate ai baricentri m,n delle tavole superiore ed inferiore. Si voglia determinare lo sforzo φ contro la tavola inferiore; poniamo il centro dei momenti nel punto d'incontro degli altri due sforzi incogniti cioè nel punto m. Conduciamo da questo punto le tangenti all'inviluppo delle reazioni fino ad incontrare la linea d'intersezione in t e t': un carico concentrato la cui linea d'azione passi per t o per t' non produce evidentemente sforzo alcuno nella tavola inferiore n, infatti in ambedue i casi la risultante delle forze esterne che sollecitano la porzione d'arco che si considera passa pel centro m dei momenti. Se il carico è situato fra t e t' la risultante delle forze esterne incontra il piano della sezione al disopra del punto m ed il suo momento intorno ad m è positivo, quindi per mantenere l'equilibrio bisogna applicare contro la tavola inferiore n uno sforzo di tensione. Se finalmente il carico è fra t e l'appoggio di sinistra, ovvero fra t' e l'appoggio di destra la risultante delle forze esterne incontra il piano della

---

(*) Cfr. E. Winkler, *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, Prag. 1867. — Culmann, l. c. — Du Bois, *Graphical Statics*, New-York, 1879.

sezione al disotto del punto m ed il suo momento intorno a questo punto è negativo, quindi per l'equilibrio si deve applicare contro la tavola inferiore n uno sforzo di compressione. Da ciò si conchiude, che si verifica il massimo sforzo di tensione nella tavola inferiore n, quando il carico mobile uniformemente ripartito è esteso a tutto il tratto fra t e t' ed il massimo sforzo di compressione per la condizione complementare di caricamento, come è indicato schematicamente al di sopra della figura.

21. Se la sezione dell'arco non fosse a doppio T e quindi gli sforzi normali di tensione e compressione non si potessero sostituire con due forze concentrate, si determinerebbero le condizioni più sfavorevoli di carico che producono i massimi sforzi unitari di tensione o pressione nel lembo inferiore della sezione ripetendo lo stesso ragionamento; ma conducendo le tangenti all'inviluppo delle reazioni dall'estremo superiore del nocciolo centrale della sezione.

22. Determinate le condizioni più sfavorevoli di caricamento col metodo ora esposto, dovuto al Winkler, passiamo ora a valutare i massimi sforzi e supponiamo che si voglia da prima il massimo sforzo di compressione. Se riteniamo che il carico uniformemente ripartito venga trasmesso all'arco per mezzo di montanti verticali equidistanti alla distanza δ uno dall'altro, in corrispondenza delle verticali dei carichi concentrati che abbiamo fin qui considerati, possiamo ammettere con grande approssimazione che il massimo di compressione contro la tavola n si ottiene caricando completamente i tre primi montanti di sinistra e gli ultimi otto di destra; ossia se p rappresenta il carico uniformemente ripartito per metro corrente, potremo ritenere l'arco sollecitato dai carichi $d_7 b_7$, $d_6 b_6$, $d_5 b_5$, $d b$, $d'_1 b'_1, \ldots\ldots, d'_7 b'_7$ tutti eguali a $p\,\delta$. È facile riconoscere che lo sforzo che otterremo in base a quest'ipotesi di carico è approssimato in eccesso al vero sforzo massimo di compressione. Ciò posto se fosse nota la risultante delle forze esterne per la porzione di arco che si considera e corrispondente alla stabilita condizione di carico, sarebbe anche noto il suo momento M intorno al polo m ed allora indicando con H la distanza fra i baricentri delle tavole superiore ed inferiore, si otterrebbe lo sforzo cercato colla relazione

$$(1) \ldots\ldots \qquad \varphi^{c}_{max} = \frac{M}{H}.$$

Ora, senza determinare la risultante delle forze esterne, possiamo sostituire al suo momento la somma algebrica dei momenti delle componenti e precisamente la somma dei momenti delle reazioni verticali di sinistra prodotti da tutti i carichi sollecitanti l'arco, meno la somma dei momenti delle spinte orizzontali prodotte dai carichi stessi, meno la somma dei momenti dei carichi $d_7 b_7$ $d_6 b_6$ $d_5 b_5$, che trovansi applicati alla porzione di arco che si considera in equilibrio. Per avere i momenti suddetti (come anche quelli relativi ad un'altra qualunque condizione di caricamento) ridotti ad una stessa base, procediamo nel modo che segue. Cominciamo a determinare per ciascuno dei carichi, $d b$, $d_1 b_1, \ldots\ldots, d_7 b_7$ le reazioni verticali degli appoggi e la spinta orizzontale colla decomposizione che vedesi indicata su ciascuno dei carichi. Portiamo su di un'orizzontale le spinte orizzontali $q, q_1 \ldots\ldots, q_7$ così determinate e

quelle q_1', q_2', ..., q_7', prodotte dai carichi che gravitano sulla metà di destra dell'arco: proiettiamole da un polo o e connettiamo le linee d'azione delle varie spinte orizzontali col poligono funicolare e_7, e_6, ..., e_7' segnandone con tratto pieno i lati fra la tangente orizzontale all'estradosso e l'orizzontale per l'imposta dell'intradosso. Si ha in tal modo il mezzo di ottenere la somma dei momenti ridotti alla base h di un complesso qualunque di spinte orizzontali rispetto un punto qualunque dell'estradosso o intradosso dell'arco. Per la nostra condizione di carico e per il punto m questa somma dei momenti è fornita da $(r_8 r_5 + r_1 r_7')h$. In modo affatto simile si possono avere i momenti ridotti dovuti alle reazioni verticali dell'appoggio di sinistra, ovvero ai carichi che trovansi sulla porzione di arco che si considera. Per le reazioni verticali il poligono funicolare si riduce ad un fascio. Sopra una verticale furono portati i segmenti v_7, v_6, ..., v_7' rappresentanti le reazioni verticali di sinistra dovute rispettivamente ai carichi $d_7 b_7$, $d_6 b_6$, ..., $d_7' b_7'$: furono proiettati da un polo o_1 distante $2h$ e centro in un punto i della verticale dell'appoggio di sinistra fu costruito un fascio di raggi paralleli. Questo fascio ci fornisce i momenti ridotti dovuti alle reazioni verticali: per la nostra condizione di carico e per il punto m tale somma di momenti è data da $(u_8 u_5 + u_1 u_7')\,2h$. Finalmente sulla stessa retta delle reazioni verticali portiamo in 76, 65, ..., 10 i carichi $d_7 b_7$, $d_6 b_6$, ..., $d_1 b_1$ e mantenendo lo stesso polo di proiezione o_1 costruiamo il poligono funicolare g_7, g_6, ..., g_1 tenendo per primo lato il primo raggio del fascio i: questo poligono funicolare serve a darci la somma delle misure dei momenti dei carichi che trovansi sulla porzione di arco che si considera, tale somma nel nostro caso vien data dal segmento $u_8 s_5$.

Si ha dunque

$$\left\{ 2(s_5 u_5 + u_1 u_7') - (r_8 r_5 + r_1 r_7') \right\} h = M$$

e quindi per la (1) resta determinato lo sforzo φ^c_{max}.

23. Nell'identico modo si valuta il massimo sforzo di tensione φ^t_{max}. Ed invero abbiamo detto che il massimo di tensione si ha quando il carico è esteso fra t e t': potremo quindi ritenere con sufficiente approssimazione che l'arco sia sollecitato dai carichi $d_1 b_1$, $d_2 b_2$, $d_3 b_3$, $d_4 b_4$. Il momento delle forze esterne intorno al polo m, per questa condizione di carico ci vien dato da

$$\left(2(u_5 u_1 - s_5 s_2) - r_5 r_1\right) h = M_1$$

e quindi il massimo sforzo di tensione dalla

$$\varphi^t_{max} = \frac{M_1}{H}.$$

Anche qui è facile riconoscere che lo sforzo φ^t_{max} è approssimato al vero in eccesso.

24. Sempre collo stesso metodo si può ottenere lo sforzo φ_0 contro la tavola inferiore n quando l'arco sia completamente caricato. Infatti il momento delle forze esterne in tal caso è fornito da

$$(2 s_2 u_7' - r_8 r_7') h = M_0$$

che risulta negativo e perciò lo sforzo φ_0 è di compressione ed è dato al solito dalla

$$\varphi_0 = \frac{M_0}{H} \ .$$

L'espressione di questo sforzo è esatta, mentre quelle di φ^t_{max} e φ^c_{max}, come abbiamo detto, sono approssimate in eccesso. Evidentemente lo sforzo φ_0 deve risultare la somma del vero massimo di compressione e del vero massimo di tensione; quindi la differenza $\varphi_0 - \varphi^c_{max} = (\varphi^t_{max})$ ci darà un valore approssimato in difetto al vero massimo di tensione e la differenza $\varphi_0 - \varphi^t_{max} = (\varphi^c_{max})$ ci darà un valore approssimato in difetto al vero massimo di compressione. Dovendo dunque il vero massimo sforzo di compressione essere compreso fra φ^c_{max} e (φ^c_{max}) e quello di tensione fra φ^t_{max} e (φ^t_{max}) possiamo avere un criterio del grado della nostra approssimazione che sarà sempre sufficiente per la pratica quando i montanti che trasmettono il carico all'arco siano, come d'ordinario si verifica, abbastanza vicini fra loro.

25. In modo affatto simile si determina il massimo sforzo di tensione e di compressione contro la tavola superiore, prendendo per centro dei momenti il punto n.

26. Per determinare il massimo sforzo di taglio in una sezione qualunque $m_1 n_1$ si conduca la tangente all'inviluppo delle reazioni normale al piano della sezione fino ad incontrare in t_1 la linea d'intersezione e pel basicentro w della sezione si conduca la verticale $w t_1'$. Un carico concentrato posto fra t_1' e t_1 dà luogo ad una risultante sul piano della sezione, la cui componente secondo il piano stesso, ossia lo sforzo di taglio, è diretta verso l'esterno; qualunque carico invece alla sinistra di t_1' o alla destra di t_1 dà luogo ad uno sforzo di taglio diretto verso l'interno. Si ha dunque il massimo sforzo di taglio diretto verso l'esterno caricando il tratto fra t_1' e t_1; si ha il massimo sforzo di taglio diretto verso l'interno caricando i due tratti complementari. Queste condizioni di carico trovansi indicate schematicamente nella figura. Per valutare poi questi massimi sforzi riterremo nel primo caso (cioè per avere lo sforzo massimo diretto verso l'esterno) l'arco sollecitato dai carichi $d_3 b_3$, $d_2 b_2$, . . . , $d_2' b_2'$ e lo sforzo di taglio sarà misurato dalla somma delle proiezioni sul piano della sezione delle reazioni verticali dell'appoggio di sinistra meno la somma delle proiezioni delle spinte orizzontali. Condotta quindi pel punto 7 della retta delle forze verticali e pel punto l_8 della retta delle spinte orizzontali la parallela alla sezione $m_1 n_1$ e proiettandovi sopra le forze suddette si ha nella differenza $0' f_4 - l_4 l_2'$ il massimo sforzo di taglio diretto verso l'esterno. Si ottiene invece il massimo sforzo di taglio diretto verso l'interno supponendo l'arco sollecitato dai carichi $d_7 b_7$, $d_6 b_6$, $d_5 b_5$, $d_4 b_4$, $d_3' b_3'$, $d_4' b_4'$, $d_5' b_5'$, $d_6' b_6'$, $d_7' b_7'$, e prendendo la somma delle proiezioni sul piano della sezione delle spinte orizzontali, più la somma delle proiezioni dei carichi che gravitano sulla porzione di arco che si considera, meno la somma delle proiezioni delle reazioni verticali dell'appoggio di sinistra. Tale sforzo viene misurato nella nostra figura da

$$l_8 l_4 + l_2' l_7' + f_4 3' - f_7' 0' \ .$$

Di questi due sforzi di taglio nel nostro caso risulta maggiore il primo.

27. Che se finalmente l'arco è completamente caricato lo sforzo di taglio nella sezione $m_1 n_1$ è misurato da $f_7' 3' - l_8 l_7'$ che risulta diretto all'esterno. Si può qui ripetere quanto è stato detto per gli sforzi normali per decidere del grado di approssimazione col quale vennero determinati i due massimi sforzi di taglio.

28. Se la sezione dell'arco in questione non fosse a doppio T come fin qui abbiamo supposto, ma invece qualunque, ossia tale che tutti gli elementi della sezione concorrano a sopportare gli sforzi normali, interessa per i calcoli di stabilità di determinare i massimi sforzi normali unitari al lembo superiore e al lembo inferiore della sezione ed il massimo sforzo di taglio. Riguardo a quest'ultimo vale quanto è stato detto per la sezione a doppio T. Riguardo agli sforzi normali supponiamo che si voglia il massimo di compressione al lembo inferiore della sezione. Determinata, nel modo che è stato accennato al n° 21, la condizione più sfavorevole di carico, sia M la somma algebrica dei momenti delle forze esterne applicate alla porzione di arco che si considera in equilibrio, rispetto al baricentro della sezione, sia N la somma algebrica delle componenti normali al piano della sezione delle dette forze esterne, il massimo sforzo unitario di compressione viene allora dato, come è noto, dalla formola

$$R^c_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M v_1}{I} ,$$

se A rappresenta l'arco della sezione, I il suo momento d'inerzia rispetto all'asse neutro baricentrico, v_1 la distanza del lembo che si considera dall'asse suddetto. I termini M, N vengono forniti dalla figura.

Arco a sezione costante con cerniere all'estremità.

29. Sia $b_8 a b_8'$ (Tav. IV) l'asse di un arco a sezione costante articolato a cerniera alle estremità. Riteniamo l'arco sollecitato dai carichi eguali equidistanti uv, $u_1 v_1$ ....., $u_7 v_7$ gravanti sulla metà sinistra dell'arco e per ciascuno di essi determiniamo la linea delle pressioni ossia le reazioni degli appoggi, le quali devono passare per le cerniere. Cominciamo a supporre l'arco sollecitato dal carico $u_7 v_7$: il poligono funicolare si riduce ad una spezzata bilatera $h_8 k_7 h_8'$ di cui la retta di chiusa è $h_8 h_8'$, quindi il triangolo $h_8 k_7 h_8'$ rappresenta il diagramma D_1'. La retta di chiusa poi per l'asse dell'arco considerato come curva funicolare è la sua corda $b_8 b_8'$ cosicchè il diagramma D'' resta rappresentato dalla figura $b_8 a b_8' b_8$.

30. Per risolvere ora la seconda parte del problema si osservi che l'invariabilità della lunghezza della corda dà luogo alla terza delle equazioni (1), nella quale y rappresenti la distanza del baricentro di una sezione qualunque dalla corda. Ora supposto il momento d'inerzia I costante, e chiamando con η le ordinate del diagramma D distanti lungo l'asse dell'arco della quantità Δs costante, quell'equazione si riduce a $\Sigma \eta . y = 0$. Se quindi indichiamo con η'' ed η_1' le ordinate corrispondenti dei due diagrammi D'' e D_1', e costruiamo con due poligoni di moltiplicazione le ordinate bf

$=\Sigma\eta''y$ e $bg_{\text{vii}}=\Sigma\eta_1'y$ potremo, come si è già visto, dedurre il diagramma D'. Nella figura per maggiore esattezza si sono raddoppiate le y. La $\Sigma\eta y$ rappresenta la deformazione totale di una trave verticale della stessa altezza dell'arco, di sezione costante, incastrata all'estremità superiore e sollecitata nelle sezioni che sono allo stesso livello con quelle dell'arco dagli stessi momenti flettenti che agiscono sull'arco.

Preso dunque sulla corda dell'arco

$$b0=\frac{1}{4}ba\ ,\ \ 01=\frac{1}{2}b_1a_1\ ,\ \ 12=\frac{1}{2}b_2a_2\ ,\ \ldots\ ,\ 67=\frac{1}{2}b_7a_7$$

e assunto d per polo, costruiamo il poligono funicolare df. Sulla stessa corda prendiamo poi

$$b0_7=\frac{1}{2}hc\ ,\ \ 0_71_7=\frac{h_1c_1+h_1'c_1'}{2}\ ,\ \ 1_72_7=\frac{h_2c_2+h_2'c_2'}{2}\ ,\ \ldots\ldots,\ 6_77_7=\frac{h_7c_7+h_7'c_7'}{2}$$

(evidentemente $0_71_7=1_72_7=\ldots, 5_76_7=hc$) e ritenendo lo stesso polo d costruiamo il poligono funicolare dg_{vii}. Ciò posto rappresentato l'arco in e_8me_8', prendiamo

$$e_7v_7=2\,l_7\,h_7\frac{bf}{bg_{\text{vii}}}$$

risultano e_8v_7, $e_8'v_7$ le reazioni degli appoggi prodotte dal carico u_7v_7.

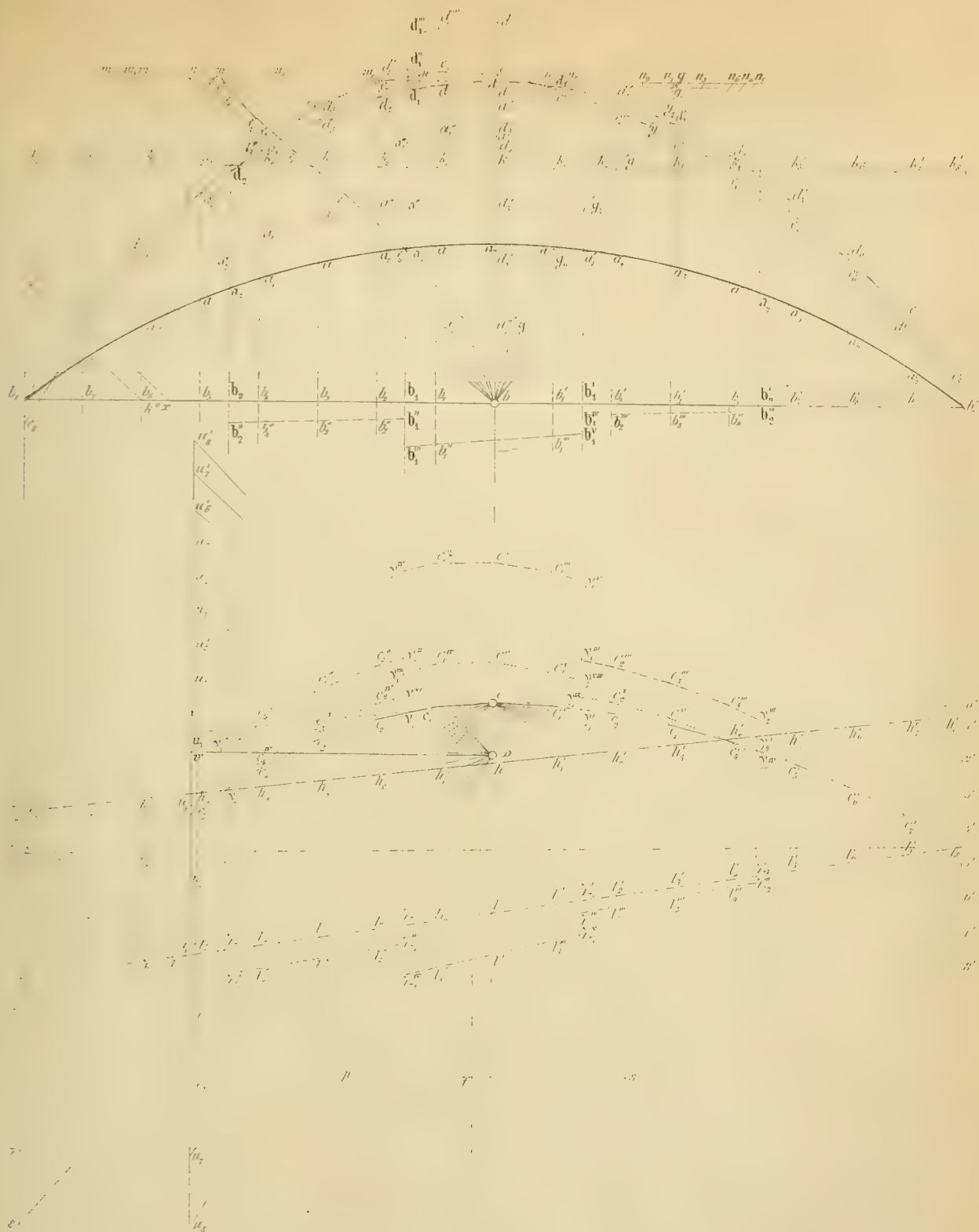
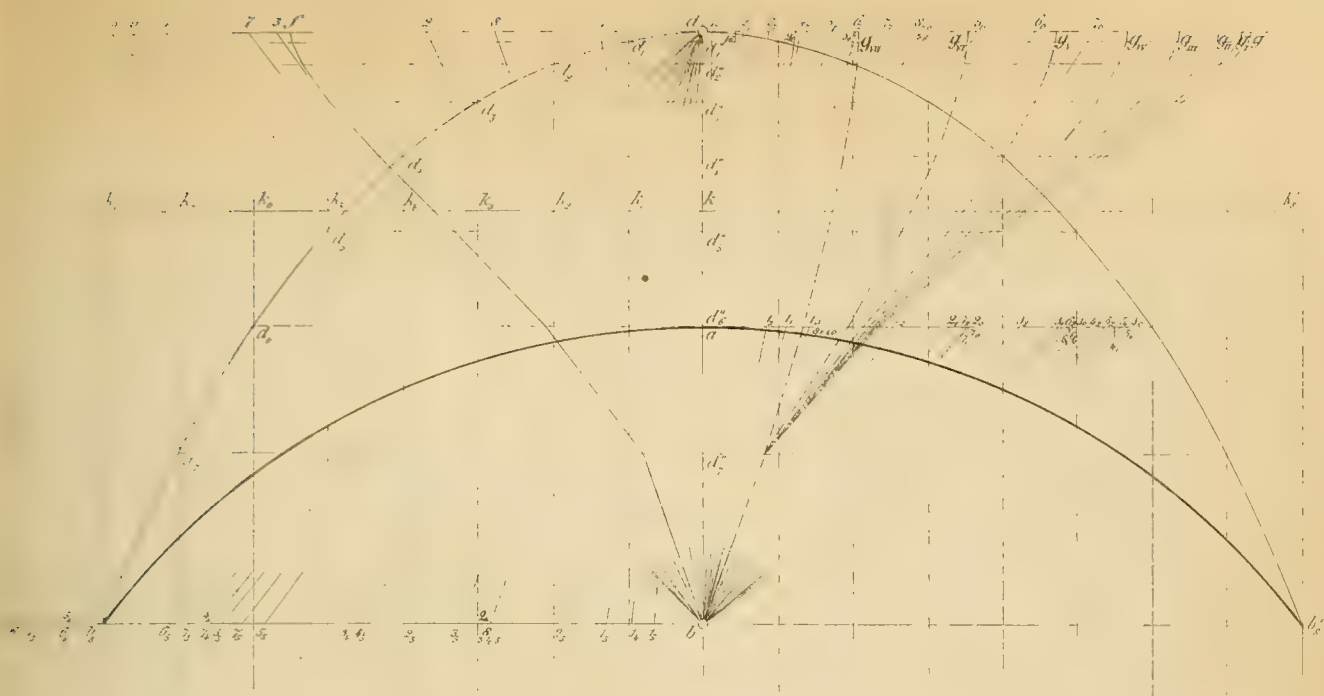
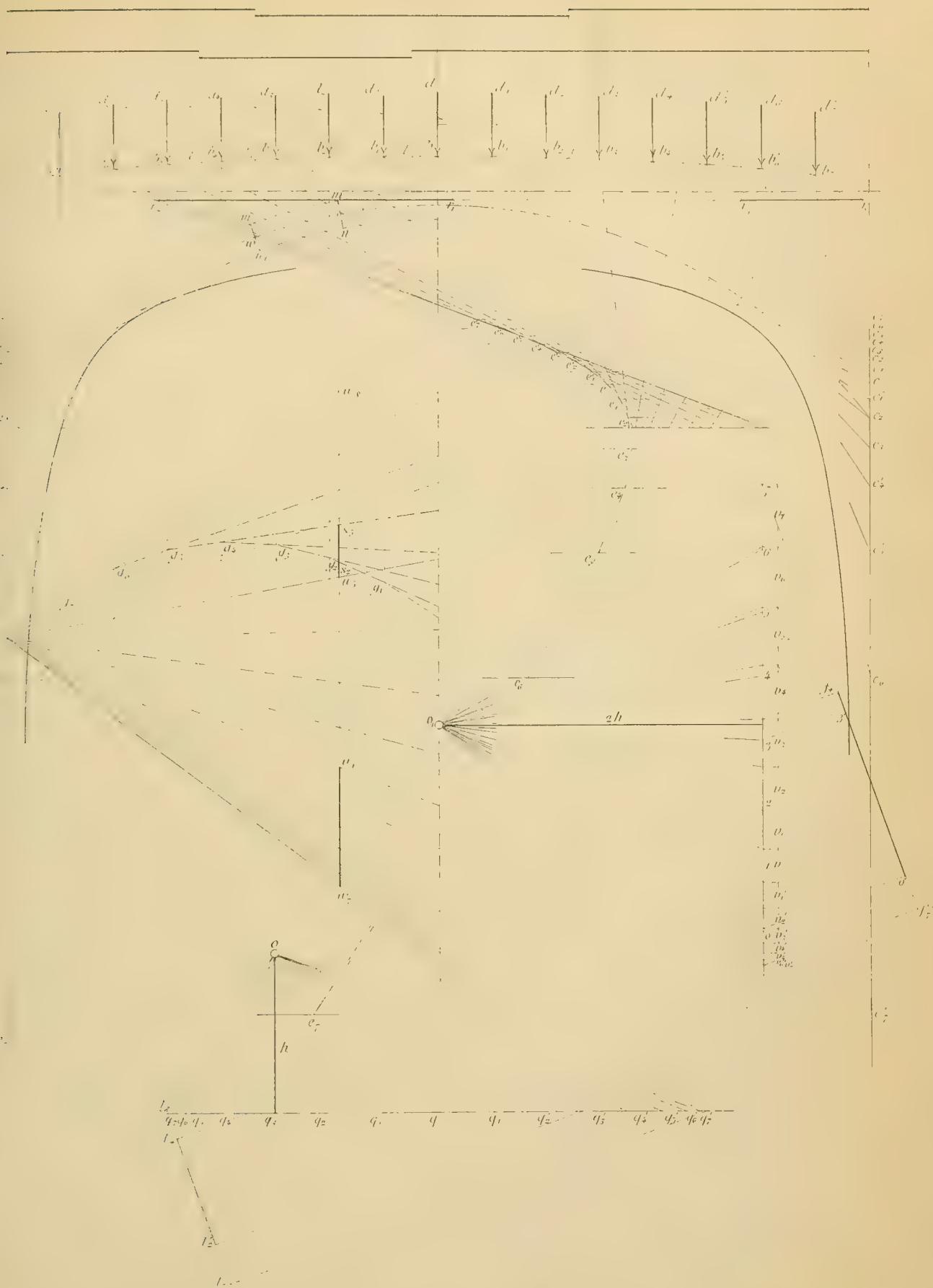
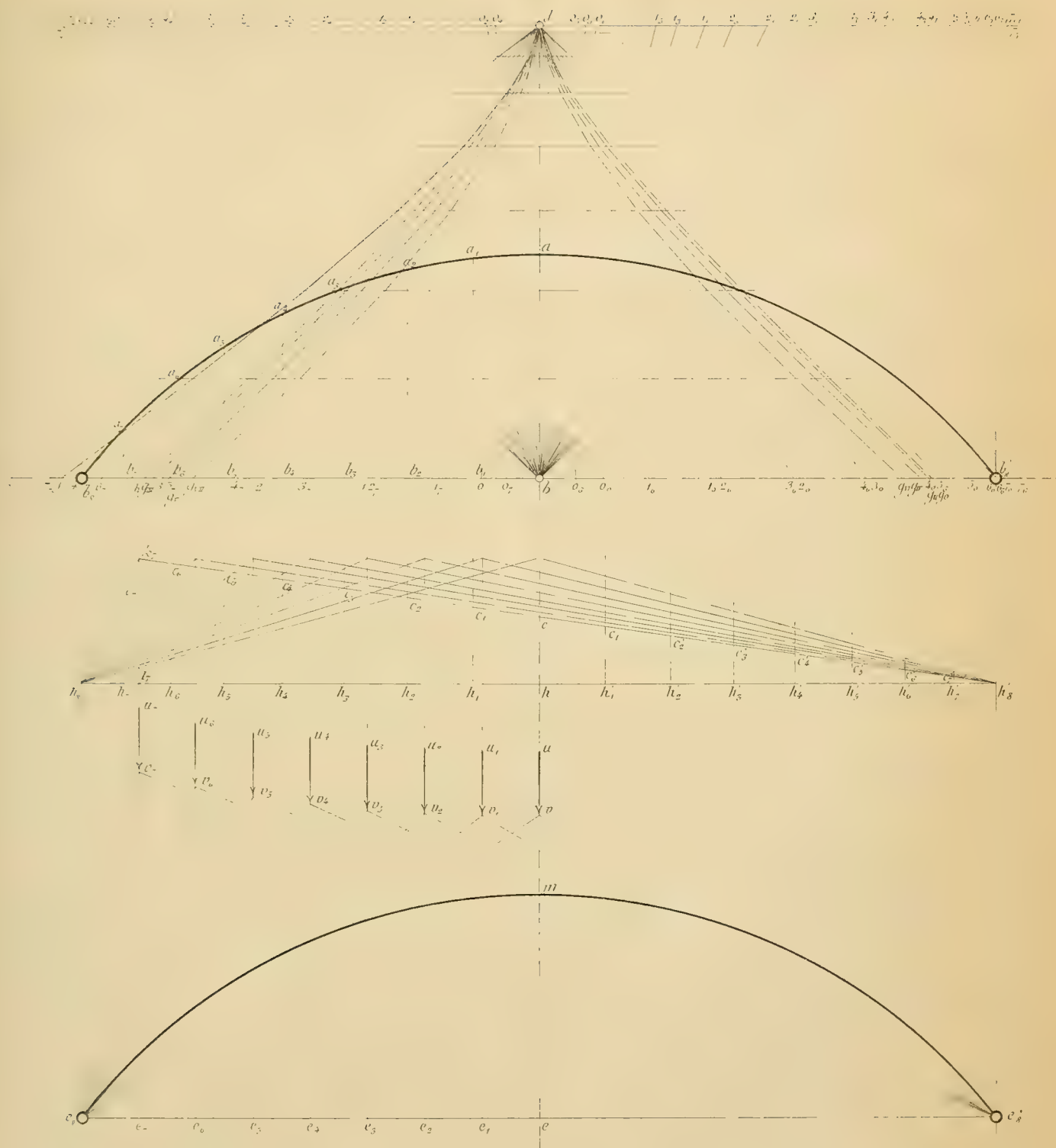
Nello stesso modo si determinano le reazioni prodotte dagli altri carichi. Per questi si è fatto passare costantemente il primo lato del poligono funicolare per h_8, il secondo per h_8' ed il vertice sulla linea del carico si è mantenuto sull'orizzontale per k_7. Le rispettive rette delle forze momenti furono costruite per i carichi u_6v_6, u_0v_0 sulla corda da b verso destra tenendo d per polo: pei carichi u_5v_5, u_3v_3, u_1v_1, sulla orizzontale per d verso destra e si prese il polo in b e finalmente pei carichi u_4v_4, u_2v_2 sulla stessa orizzontale verso sinistra e si mantenne il polo in b.

31. Determinate le reazioni degli appoggi si possono immediatamente ottenere, come si è fatto per l'arco incastrato, le spinte orizzontali prodotte dai vari carichi. La determinazione dei massimi sforzi interni prodotti da carichi mobili fu già da me esposta nell'altra Memoria sopra citata.

Torino Lit. Salussolia

Torino Lit. Salussolia

Torino Lit Salussolia

Torino Lit. Salussolia

RICERCHE

INTORNO ALLA

GEOMETRIA DELLA SFERA

E

LORO APPLICAZIONE ALLO STUDIO ED ALLA CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE DI QUARTO ORDINE

AVENTI PER LINEA DOPPIA IL CERCHIO IMAGINARIO ALL'INFINITO

MEMORIA

DI

GINO LORIA

Approvata nell'adunanza 30 Dicembre 1883

« Geometrie der reciproken Radien im Raume ist mit der projectivischen Behandlung einer Mannigfaltigkeit gleichbe deutend, die durch eine quadratische Gleichung zwischen fünf homogenen Veränderlichen dargestellt wird ».

KLEIN.

Una delle idee più originali e profonde di Plücker è quella di potere attribuire al nostro spazio un numero qualunque (non minore di tre) di dimensioni scegliendo convenientemente l'ente geometrico che si considera come suo elemento. Ad essa è dovuto, non meno al certo che ai lavori di Grassmann e Riemann l'indirizzo odierno della geometria, il quale diede alle sue ricerche quella generalità che prima credevasi patrimonio esclusivo dell'analisi; ad essa il considerare la geometria che prende per elemento dello spazio il punto sotto il suo vero aspetto, cioè come *uno dei metodi* per studiare le proprietà del nostro spazio.

La prima e più interessante applicazione del nuovo modo di concepire le ricerche geometriche fu la geometria che prende per suo elemento la retta, la pura geometria della retta in cui punti e piani si considerano come figure secondarie, la quale, per opera specialmente di Klein e Voss (*), forma oggi una dottrina che si può concepire indipendente dalle altre teorie geometriche.

(*) A questi posso ora [Agosto 1884] aggiungere il nome del mio amico carissimo CORRADO SEGRE, in grazia dei suoi importanti lavori pubblicati fra le Memorie di questa illustre Accademia.

Volendo proseguire nella via aperta da Plücker, è naturale di proporsi di stabilire geometrie di altri enti che possano con vantaggio considerarsi come elementi del nostro spazio; e primo fra questi enti si presenta la sfera. La presente Memoria si deve considerare come un primo tentativo di stabilire la geometria dello spazio di sfere: dico *primo* perchè i lavori di Lie e Reye non mi sembrano avere il fine che ho testè indicato.

Infatti, le importantissime ricerche di Lie, esposte nell'omai celebre Memoria *Ueber Complexe insbesondere Linien und Kugel-Complexe* (Math. Annalen Bd. V, p. 145) (*), quantunque informate alle idee di Plücker, non possono riguardarsi come un fondamento della geometria della sfera, giacchè il loro scopo principale fu lo stabilire una connessione fra questa e la geometria della retta, e il loro precipuo risultato (geometrico) si trova nelle importanti proposizioni di geometria metrica che l'àutore mostrò potersi trarre dalla rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio punteggiato (già indicato da Nöther (**)) disponendo convenientemente degli elementi fondamentali della rappresentazione.

Invece l'opera del Reye (*Synthetische Geometrie der Kugeln*, ecc. 1879) ha per iscopo uno studio diretto dello spazio di sfere; ma il carattere elementare che l'autore volle imprimere alla sua esposizione non gli permise di introdurre nel suo lavoro quei concetti ampii che formano il pregio massimo e il carattere distintivo della moderna geometria.

Volendo affrontare lo studio dello spazio di sfere coll'aiuto dell'analisi è indispensabile stabilire da principio un sistema di coordinate per le sfere. Il metodo più generale (e nello stesso tempo più conforme alle idee di Plücker) è quello di lasciarne dapprima indeterminato il significato, e, partendo dal fatto che lo spazio di sfere è lineare e a quattro dimensioni (perchè si può far corrispondere proiettivamente all'insieme delle quadriche passanti per una conica fissa), prendere per determinare una sfera quattro quantità indipendenti o meglio i rapporti di cinque, che diremo $X_i (i = 1.2.3.4.5)$. Allora in questo spazio appariranno quali spazii subordinati a tre dimensioni gli ordinarii spazii di punti e di piani, quadratico il primo (***), lineare il secondo (vedi nel testo la nota al n. 6) e tangenti fra loro. Ottenuta così una prima rappresentazione analitica dello spazio di sfere, un'altra se ne può ottenere colla seguente considerazione: Se $X_i^{(1)}, \ldots, X_i^{(5)}$ sono le coordinate di cinque sfere qualunque, ogni altra sfera avrà coordinate della forma $x_1 X_i^{(1)} + \ldots + x_5 X_i^{(5)}$; le quantità x_i sono necessarie e sufficienti per determinare coi loro rapporti univocamente una sfera, onde possono assumersi quali nuove coordinate di una sfera. Ora è evidente che, per la generalità delle coordinate x_i, non è necessario il supporre che le coordinate X_i siano le più generali possibili, ma basta che esse soddisfino alla condizione di individuare una sfera e di esserne individuate; laonde, quando si abbiano in vista le applicazioni, si potranno scegliere le X_i nel modo più opportuno. È chiaro che,

(*) Vedi anche una nota nei *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (t. LXXI, 1871, p. 579).

(**) *Zur Theorie des algebraischen Functionen*, ecc., Göttinger Nachrichten, 1869, p. 304.

(***) Chiameremo in seguito, per brevità, *quadrica dei punti* lo spazio punteggiato considerato in questo modo.

per le applicazioni allo spazio ordinario, converrà prendere per coordinate X_i i coefficienti dell'equazione di una sfera in coordinate cartesiane: è questo il partito a cui mi sono appigliato. Questo, lo ripeto, feci unicamente in vista delle applicazioni che mi ero proposte; ma poichè, qualunque sia il significato che attribuir si voglia allo X_i, sussistono sempre gli sviluppi che concernono la teoria generale dello spazio di sfere, così la scelta da me fatta non trae seco che le mie ricerche di pura geometria della sfera abbiano un fondamento estraneo a questa. Questa scelta sarà, credo, pienamente giustificata, quando si pensi che lo studio dello spazio di sfere in sè coincide con quello di un qualunque spazio lineare a quattro dimensioni, epperò si può ritenere già in parte compreso in lavori meritamente noti di geometria a quante si vogliono dimensioni (*), ma che invece esso acquista un interesse individuale quando lo si consideri in relazione coll'ordinario spazio punteggiato.

Le considerazioni ora esposte costituiscono il fondamento delle ricerche che feci sulla geometria delle sfere, i cui risultati principali contenuti in questo lavoro, passo ad esporre brevemente.

Nella prima parte studio il sistema di coordinate ora definito e le proprietà generali dello spazio di sfere. Stabilisco anzitutto una proprietà importante del sistema di coordinate la quale estende i risultati ai quali si perviene col suo mezzo a tutte le trasformazioni per raggi reciproci dello spazio e trovo il significato di una trasformazione (lineare) di coordinate. Cerco poi le condizioni affinchè una sfera si riduca a un punto o a un piano e concludo che: La geometria dello spazio punteggiato equivale alla geometria di una *quadrica* a tre dimensioni in uno spazio lineare a quattro, mentre la geometria dello spazio di piani è quella di un *piano* in questo medesimo spazio. Introducendo la considerazione delle trasformazioni lineari dello spazio di sfere e avendo di mira le applicazioni alla geometria dello spazio punteggiato, si presenta una questione analoga ad una che s'incontra nello studio dell'ordinaria geometria metrica. Come in questa si domanda quali siano le trasformazioni omografiche che mutano in se stesso il cerchio imaginario all'infinito, così nel nostro caso è naturale chiedersi quali fra le trasformazioni lineari dello spazio di sfere lascino immutata la quadrica de' punti. Ebbene, a ciò si risponde: Se si associa al gruppo delle trasformazioni dell'ordinaria geometria metrica (movimenti e trasformazioni per simmetria e per similitudine) quello delle trasformazioni per raggi vettori reciproci, si ottiene il gruppo delle trasformazioni lineari dello spazio di sfere che lasciano immutata la quadrica dei punti. Segue da ciò che la geometria proiettiva dello spazio di sfere nel quale esiste come ente fisso la quadrica dei punti, equivale alla geometria metrica del nostro spazio quando si stabilisca di considerare come identiche due figure mutabili l'una nell'altra con una trasformazione per raggi vettori reciproci. Donde la giustificazione dell'epigrafe posta a questo lavoro:

(*) JORDAN, *Essai sur la Géométrie à n dimensions* (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. III, pag. 103 e seg.). D'OVIDIO, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni* (Memorie della R. Accademia de' Lincei, 1876-77).

VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, etc. (Math. Annalen, Bd. XIX, p. 161).

« La geometria dei raggi reciproci nello spazio equivale alla geometria proiettiva di una varietà rappresentata da una equazione quadratica omogenea fra cinque variabili » (*).

Proseguendo nello studio del sistema di coordinate, dimostro che le coordinate di una sfera da me usate sono suscettibili di un'importante interpretazione geometrica sia nel caso generale, sia quando la sfera si riduce a un punto o a un piano; vengo così naturalmente ad associare al sistema di cinque sfere *fondamentali* un secondo sistema di cinque sfere che ha un'importanza grandissima pel nostro studio. La metrica dello spazio di sfere presenta una particolarità degna di nota; se, cioè, nello spazio a quattro dimensioni si stabilisce una metrica proiettiva avente per assoluto la quadrica dei punti, si trova per espressione della *distanza di due punti* la stessa che si ottiene per l'angolo di due sfere nello spazio ordinario: considerato in questo modo, lo spazio di sfere, ha dunque per base una metrica ad assoluto reale.

La seconda parte comprende uno studio di sistemi lineari o quadratici di sfere. A base di esso sta la proposizione: Un complesso lineare di sfere è l'insieme delle ∞^3 sfere ortogonali a una sfera fissa. Applicandola, si trova la sfera ortogonale del complesso lineare delle sfere ridotte a piani e si indica una via per determinare le coordinate della sfera ortogonale a quattro sfere date; applicazioni della stessa proposizione sono le determinazioni geometriche delle sfere di una congruenza o di un fascio, dalle quali risultano poi facilmente la dimostrazione di un elegante teorema enunciato da Moutard.

Esaurite le proprietà fondamentali dei sistemi lineari di sfere, passo ai quadratici. Dimostro subito che in un complesso quadratico di sfere sono contenuti ∞^3 fasci di sfere; mi volgo poi ad esporre la teoria della polarità rispetto a un complesso quadratico e determino di passaggio le equazioni di questo in coordinate di sistemi lineari di sfere. Un'applicazione importante della teoria della polarità rispetto a un complesso quadratico si presenta nella determinazione di quelle funzioni che io chiamo *invarianti dei sistemi lineari di sfere;* queste funzioni godono, però, di proprietà invariantive solo rispetto alle trasformazioni lineari dello spazio di sfere che mutano in sè stessa la quadrica de' punti, esse sono cioè invarianti simultanei del corrispondente sistema e della quadrica dei punti. Per chiarire completamente questo fatto, apparentemente strano, che una stessa funzione si presenti sotto due aspetti diversi, rammenterò ciò che dissi dianzi sulle trasformazioni lineari dello spazio di sfere e riporterò queste parole di Klein (*Vergl. Betr.* p. 9): « Se si sostituisce il gruppo principale di trasformazioni con uno più comprensivo, sussisteranno ancora soltanto alcune delle proprietà geometriche. Le altre non appariranno più come proprietà intrinseche degli enti geometrici, ma come proprietà del sistema che risulta associando ad esse una certa figura. Questa figura (quando è determinata) è definita dalla proprietà di ammettere fra le trasformazioni del dato gruppo solo quelle del gruppo principale ». Per farne l'applicazione al caso nostro basta supporre che il gruppo principale sia quello che si ottiene associando il gruppo delle trasformazioni per raggi

(*) Klein, *Vergleichende Betrachtungen ueber neuere geometrische Forschungen*, 1872, p. 22.

reciproci a quello dell'ordinaria geometria metrica, che il gruppo più comprensivo sia formato da tutte le trasformazioni lineari dello spazio di sfere, che la figura speciale di cui sopra è parola sia la quadrica dei punti e che finalmente le proprietà che cessano d'essere intrinseche siano quelle espresse dall'annullarsi degli invarianti dei sistemi lineari di sfere.

I complessi quadratici di sfere, oltre ad invarianti di questa specie (che si ottengono cercando gl'invarianti simultanei di due complessi quadratici e quindi facendo coincidere uno di essi colla quadrica dei punti), posseggono eziandio una funzione che ha carattere invariantivo per tutte le trasformazioni lineari dello spazio di sfere: la considerazione di questa funzione dà i complessi quadratici specializzati una o due volte. In ogni fascio di complessi quadratici vi sono in generale cinque complessi quadratici semplicemente speciali, ma può esservene un numero minore e alcuni possono divenire doppiamente speciali; queste costituiranno altrettante particolarità della congruenza di quarto grado che è sostegno del fascio e l'esame dei varii casi che si possono presentare darà la classificazione completa delle congruenze di quarto grado.

Una importante congruenza quadratica è costituita dagli ∞^2 punti sfere di un complesso quadratico di sfere; questi punti costituiscono una superficie che dimostro essere in generale una superficie di quarto ordine avente il cerchio imaginario all'infinito per linea doppia cioè, seguendo la denominazione proposta da Darboux, una *ciclide*. Le proposizioni esposte sullo spazio di sfere porgono un modo nuovo e uniforme che si raccomanda per la sua eleganza e semplicità, di dedurre i principali teoremi che riguardano queste superficie: così si ottengono le generazioni della superficie come luogo di punti e come inviluppi di sfere e le loro modificazioni, i piani bitangenti, le rette della superficie, le curve focali, i fuochi, ecc., ecc. Infine si può ottenere l'equazione più generale del sistema di ciclidi omofocali: la memoria del Reye: *Ueber quadratische Kugelcomplexe und confocalen Cycliden* (*) mi fu in questa ricerca di grandissima utilità, tanto che posso dire essere, quanto feci a questo proposito, non altro che una generalizzazione analitica e un complemento delle ricerche dovute a questo illustre geometra (**).

La terza parte racchiude la soluzione del problema che diede origine a' miei studii sulla geometria della sfera, cioè la classificazione delle ciclidi. Già Darboux e Casey nei loro importanti lavori su questa superficie (***) si erano proposti questa questione, ma nè l'uno nè l'altro di questi geometri seguì un metodo che assicurasse che niuna delle superficie di cui si tratta fosse sfuggita (****). Definendo la ciclide come luogo dei punti sfere d'un complesso quadratico di sfere si ha la sua rappresentazione analitica con due equazioni quadratiche omogenee, onde si può ap-

(*) *Collectanea mathematica*, 1881, p. 241 e seg.

(**) Cfr. anche le *Schlussbemerkungen* della Memoria dello stesso autore: *Ueber lineare und quadratische Strahlen-complexe und Complexen-Gewebe. Journal f. d. r. u. a. Math.* Bd. 95, p. 347 [Agosto 1884].

(***) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, etc. Paris, 1873. Casey, *On Cyclides and Sphero-quartics.* Philosophical Transactions of the R. Society of London, 1871.

(****) Basti il dire che Casey aveva dimenticate le ciclidi con tre e quattro punti doppi, e non ne tenne conto che dopo le osservazioni di Cayley (v. la memoria citata, p. 622).

plicare il metodo e il teorema di Weierstrass (*) avente per oggetto la distinzione in ispecie delle coppie di forme bilineari e quadratiche. Il metodo permette di assegnare le varie forme (canoniche) sotto cui si possono porre le due equazioni rappresentatrici della ciclide; il teorema ci dice che due ciclidi, le cui equazioni appartengono a specie diverse, non si potranno mai mutare l'una nell'altra mediante una delle trasformazioni di cui prima (pag. 201) si tenne parola. Tutte le ciclidi che corrispondono alle varie forme canoniche debbono (in forza di questo teorema) essere fra loro diverse, ed infatti lo studio particolare da me fatto su ognuna delle forme canoniche mi porse le particolarità di ogni specie e mi guidò alla conclusione che *vi sono diciotto specie di ciclidi non mutabili l'una nell'altra mediante trasformazioni proiettive o raggi reciproci.* Per ogni specie determinai le singolarità, la disposizione delle rette, le proprietà focali e i modi di generazione: ciò mi parve essere più che sufficiente a caratterizzare ciascuna. Ma nel sistema di ciclidi omofocali ad una data vi è almeno una superficie di terzo ordine, onde il metodo seguito dà pure una classificazione delle ciclidi di terzo ordine. Siccome poi l'insieme di una ciclide di terzo ordine e del piano all'infinito può sempre considerarsi come la trasformazione proiettiva di una superficie di terzo ordine e di un piano passante per una sua retta, così è evidente che il metodo indicato deve dare tutte le superficie di terzo ordine. Se non tutte le specie di Schläfli (v. la Memoria da esso pubblicata nelle *Philosophical transactions*, 1863 (**)) si presentano nella enumerazione da me fatta, gli è che alcune delle superficie di Schläfli si possono ottenere da altre con una conveniente trasformazione per raggi reciproci.

Esposto così sommariamente il contenuto di questo lavoro mi sia lecito fare una osservazione sull'indole e la portata del metodo seguito in queste ricerche.

Io mi servii per brevità della parola sfera per designare l'elemento dello spazio che studio, ma tutto ciò che esposi può applicarsi integralmente allo spazio delle quadriche passanti per una conica fissa non degenerata. Per conseguenza la clas-

---

(*) *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* Berlinen Monatsberichte, Mai, 1868. Il metodo di WEIERSTRASS fu già applicato con successo da GUNDELFINGER (nelle note alle *Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes* di HESSE, 3e ed. 1876), da KLEIN (*Inauguraldissertation*, 1868) e da WEILER (Math. Ann., Bd. VII) per classificare le quartiche di prima specie e i complessi quadratici di rette.

Dello stesso modo io feci applicazione (la prima, credo, relativa a forme bilineari) per ottenere le varie specie di corrispondenze omografiche che possono stabilirsi fra due spazii a due o tre dimensioni. Per le forme di seconda specie non ottenni omografie che non fossero già note, ma per lo spazio giunsi ad alcuni risultati che credo nuovi, i quali mi permisero poi di stabilire quali fra i complessi quadratici di rette aventi per superficie singolare un tetraedro proprio o degenerato, possano generarsi colle congiungenti o colle intersezioni degli elementi corrispondenti di due spazii proiettivi di punti o di piani [Il lavoro qui citato venne poi pubblicato nel Vol. 22, p. 1 del *Giornale di Matematiche*, (Agosto 1884)].

Infine, un'ultima applicazione dello stesso teorema fu fatta dal mio carissimo amico Corrado SEGRE e da me in un lavoro comune, in cui proponemmo di riconoscere quali dei complessi quadratici di rette possano venir generati dalle rette che secano armonicamente due quadriche date [Anche questa Memoria ha già visto la luce e trovasi nel Vol. XXIII, p. 213 dei *Mathematische Annalen*, (Agosto 1884)].

(**) *On the distribution of surfaces of the third Order into species in reference to the presence or absence of singular Points, and the reality of their Lines.*

sificazione delle ciclidi da me indicata si può intendere come quella delle superficie di quarto ordine a conica doppia non scissa in due rette (*).

Si presenta ora naturale la questione della ricerca analoga per le superficie di quarto ordine aventi per linee doppie due rette che si secano (**). Ora il metodo da me seguito è applicabile con lievi modificazioni anche a questo caso.

Per mostrarlo notiamo che la ragione per cui è possibile applicare le ricerche di Weierstrass alla classificazione delle superficie di quarto ordine a conica doppia è che una tal superficie si può rappresentare con un' equazione quadratica omogenea fra cinque variabili fra cui passa una relazione quadratica omogenea di discriminante non nullo. Orbene, per una parte, una superficie di quarto ordine con due rette doppie che si secano è rappresentabile con un' equazione quadratica omogenea fra cinque variabili fra cui passa una relazione quadratica omogenea di discriminante nullo (se le due rette doppie sono infinitamente vicine, tutti i determinanti di quarto ordine del discriminante sono nulli); d'altra parte, i risultati di Weierstrass presuppongono unicamente che una sola delle due forme che si considerano non sia specializzata, dunque di essi si può far uso per raggiungere lo scopo indicato.

CAPITOLO PRIMO

Proprietà generali dello spazio di sfere.

1. Siano date cinque sfere qualunque aventi per equazioni cartesiane

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad s_i \equiv (x-\alpha_i)^2+(y-\beta_i)^2+(z-\gamma_i)^2-R_i^2=0 \qquad (i=1.2.3.4.5).$$

Qualunque altra sfera dello spazio potrà rappresentarsi con un'equazione della forma:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad s\equiv s_1 x_1+s_2 x_2+s_3 x_3+s_4 x_4+s_5 x_5=0\cdot;$$

confrontando infatti quest' equazione con quella d'una sfera arbitraria si ottengono, per determinare le x_i quattro equazioni lineari omogenee; d'altronde date le x_i, o meglio, dati i rapporti di quattro di queste quantità alla rimanente, è determinata in modo unico la sfera s. Dunque le x_i possono assumersi come *coordinate omogenee della sfera* s; chiameremo *fondamentali* le sfere (1).

Da tale definizione delle coordinate x_i, segue immediatamente: Date cinque sfere di coordinate $x_i^{(k)}$ $(i, k = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5)$ ogni sfera del fascio determinato dalle

(*) Kummer nella sua Memoria: *Ueber die Flächen viertes Grades auf welche Schaaren von Kegelschnitte liegen* (Berliner Monatsberichte 1863) considerò alcuni dei casi particolari di queste superficie; altri ne considerò Korndörfer nel suo lavoro: *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Doppelpuncten* (Math. Annalen, Bd. I, II). Ma un gran numero di quelli da me ottenuti sfuggirono all'attenzione di questi geometri.

(**) Anche alcuni casi di queste superficie furono già studiati da Korndörfer in altra Memoria (Math. Annalen, Bd. III).

$x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ ha coordinate della forma $\lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)}$, ogni sfera della rete determinata dalle $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$ ha coordinate della forma $\lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \lambda^{(3)} x_i^{(3)}$, ogni sfera del sistema lineare di terza specie determinato dalle $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, x_i^{(4)}$ ha coordinate della forma $\lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \lambda^{(3)} x_i^{(3)} + \lambda^{(4)} x_i^{(4)}$, infine ogni altra sfera dello spazio ha coordinate della forma $\lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \lambda^{(3)} x_i^{(3)} + \lambda^{(4)} x_i^{(4)} + \lambda^{(5)} x_i^{(5)}$.

2. Le coordinate x_i ora definite godono di una importante proprietà, la quale può enunciarsi così:

Se si trasforma per raggi reciproci lo spazio di sfere e si chiamano S_i, S *le trasformate di* s_i, s, *allora la sfera* S *trasformata di* s, *ha rispetto alle* S_i *trasformate di* s_i, *le stesse coordinate che aveva* s *rispetto alle* s_i.

Per dimostrare questo teorema rammenteremo che, se l'origine delle coordinate è il centro e k^2 la potenza della trasformazione per raggi reciproci, al punto di coordinate x, y, z corrisponde quello le cui coordinate X, Y, Z sono determinate dalle equazioni:

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} \ , \quad Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2} \ , \quad Z = \frac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \ ;$$

e che quindi alla sfera avente per equazione

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(bx + cy + dz) + e = 0 \ ,$$

corrisponde la sfera

$$e(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2k^2(bX + cY + dZ) + ak^4 = 0$$

(ridotta a un piano se $e = 0$). Ora se poniamo per brevità di scrittura

$$(3) \ \ldots\ldots \qquad \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - R_i^2 = p_i^2$$

(p_i^2 non è che la potenza dell'origine rispetto alla sfera s_i (*)) e applichiamo le formole di trasformazione ora citate alle sfere

$$s_i \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z) + p_i^2 = 0$$

$$s \equiv \sum_i s_i x_i \equiv \sum_i x_i (x^2 + y^2 + z^2) - 2\left(\sum_i \alpha_i x_i \cdot x + \sum_i \beta_i x_i \cdot y + \sum_i \gamma_i z_i \, . \, z\right) + \sum_i p_i^2 x_i = 0$$

otterremo le sfere

$$S_i \equiv p_i^2 (x^2 + y^2 + z^2) - 2k^2(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z) + k^4 = 0 \ ,$$

$$S \equiv \sum p_i^2 x_i (x^2 + y^2 + z^2) - 2k^2\left(\sum_i \alpha_i x_i \cdot x + \sum \beta_i x_i \cdot y + \sum_i \gamma_i x_i \, . \, z\right) + k^4 \sum_i x_i = 0 \ .$$

Ma da queste si ricava immediatamente

$$S \equiv \sum_i . \, S_i x_i \ ,$$

dunque le coordinate di S rispetto alle S_i sono le stesse di s rispetto alle s_i. *c. d. d.*

(*) Le quantità α_i, β_i, γ_i, p_i^2, sono secondo il REYE (V. *Synthetische Geometrie der Kugeln*, ecc., 1879, p. 75-76) le coordinate della sfera $s_i = 0$.

Da ciò risulta che lo studio analitico dello spazio di sfere basato su un certo sistema di cinque sfere fondamentali comprende tutte le trasformazioni per raggi reciproci dello spazio stesso.

3. Vogliamo ora stabilire quale sia il significato geometrico di una trasformazione lineare delle coordinate x_i. Siano X_i le nuove coordinate e siano esse definite dalle equazioni:

(4) .... $$x_i \equiv \sum_h a_{ih} X_h (i, h = 1.2.3.4.5 , a_{ih} \text{ in generale } \gtrless a_{hi}) .$$

Per definizione (n. 1) la sfera s di coordinate x_i ha per equazione in coordinate cartesiane (*)

$$s \equiv \sum_i s_i x_i = 0 ;$$

in virtù delle (4) questa può scriversi

$$s \equiv \sum_i s_i \sum_h a_{ih} X_h \equiv \sum_{i,h} a_{ih} s_i X_h = 0 ,$$

cioè
$$s \equiv \sum_h X_h \sum_i a_{ih} s_i ;$$

se adunque poniamo

(5) .... $$S_h \equiv \sum_i a_{ih} s_i ,$$

potremo scrivere

$$s \equiv \sum_i S_i X_i = 0 .$$

E questa ci prova che le nuove coordinate X definite dalle equazioni (4) sono le coordinate analoghe alle x ottenute prendendo quali sfere fondamentali le cinque sfere S definite dalla (5); notiamo anche che le (4) (5) ci dicono che per determinare le nuove sfere fondamentali basta trovare cinque sfere le quali abbiano, nel primitivo sistema, per coordinate i coefficienti della sostituzione lineare *trasposta* della sostituzione lineare data.

Per conseguenza, dicendo che mediante una trasformazione lineare si può ridurre una relazione fra le x a una certa forma, affermeremo la possibilità di determinare cinque sfere tali che, riferendosi ad esse, la relazione nelle nuove variabili sia della forma assegnata.

4. La sfera che in coordinate cartesiane ha per equazione

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(bx + cy + dz) + e = 0 ,$$

ha il suo centro nel punto di coordinate

$$-\frac{b}{a} , \quad -\frac{c}{a} , \quad -\frac{d}{a} .$$

(*) Ove non si avverta il contrario, s'intenderà che le somme indicate vanno estese da $i = 1$ a $i = 5$.

ed il quadrato del suo raggio uguale a

$$\frac{b^2+c^2+d^2-ae}{a^2} \;.$$

La sfera di coordinate x_i rispetto alle sfere (1) ha per equazione cartesiana

$$\sum_i x_i(x^2+y^2+z^2) - 2\left(\sum_i \alpha_i x_i . x + \sum_i \beta_i x_i . y + \sum_i \gamma_i x_i . z\right) + \sum_i p_i^2 x_i = 0 \;,$$

onde il suo centro (x, y, z) ed il suo raggio R sono determinati dalle seguenti equazioni:

$$(6) \;\ldots\ldots\; x = \frac{\sum_i \alpha_i x_i}{\sum x_i} \;, \quad y = \frac{\sum_i \beta_i x_i}{\sum x_i} \;, \quad z = \frac{\sum_i \gamma_i x_i}{\sum x_i} \;,$$

$$(7) \;\ldots\ldots\; R^2 = \frac{\left(\sum_i \alpha_i x_i\right)^2 + \left(\sum_i \beta_i x_i\right)^2 + \left(\sum_i \gamma_i x_i\right)^2 - \sum_i x_i \sum p_i^2 x_i}{\left(\sum_i x_i\right)^2} \;.$$

5. Il numeratore di quest'espressione di R^2 (che indicheremo con R_{xx}) può trasformarsi in modo notevole. Sviluppando i quadrati e i prodotti indicati otteniamo:

$$R_{xx} = \sum_i (\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2) x_i^2 + 2 \sum_{i,k} (\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k) x_i x_k$$
$$- \sum_{i,k} (\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2 - R_i^2 + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 - R_k^2) x_i x_k - \sum_i x_i^2 (\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2 - R_i^2) \;,$$

cioè (indicando con i, k una combinazione binaria dei numeri 1, ..., 5)

$$R_{xx} = \sum R_i^2 x_i^2 - \sum_{i,k} \left[(\alpha_i-\alpha_k)^2 + (\beta_i-\beta_k)^2 + (\gamma_i-\gamma_k)^2 - (R_i^2+R_k^2) \right] x_i x_k \;.$$

Ora se C_i e C_k sono i centri dell'i^{ma} e della k^{ma} sfera fondamentale, la funzione

$$R_i^2 + R_k^2 - \overline{C_i C_k}^2 = R_i^2 + R_k^2 - \left[(\alpha_i-\alpha_k)^2 + (\beta_i-\beta_k)^2 + (\gamma_i-\gamma_k)^2 \right]$$

è una funzione molto importante per le due sfere, il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le due sfere siano fra loro ortogonali: noi le daremo il nome di *invariante simultaneo delle due sfere* (*). Se una delle due sfere è un punto sfera l'invariante simultaneo di esse si annulla quando il punto sta sull'altra sfera; se entrambe sono punti-sfere, affinchè siano ortogonali la loro distanza dev'esser nulla, epperò essi debbono stare su una secante del cerchio imaginario all'infinito.

Se quindi poniamo

$$(8) \;\ldots\ldots\; 2R_{ik} = 2R_{ki} = R_i^2 + R_k^2 - \left[(\alpha_i-\alpha_k)^2 + (\beta_i-\beta_k)^2 + (\gamma_i-\gamma_k)^2 \right] \;,$$

$$(9) \;\ldots\ldots\; R_i^2 = R_{ii} \;,$$

(*) Il quoziente di essa pel doppio del prodotto dei raggi delle due sfere è la funzione a cui il sig. LUCAS dà il nome di *potenza mutua delle sfere stesse* (V. *Sur un principe fondamental de Géométrie et de Trigonométrie*, Memorie della R. Accademia dei Lincei. Serie III, Vol. II).

Avvertirò che, generalizzando una definizione data da STEINER (*Einige geometrische Betrachtungen* n. 10, *Ges. Werke*, I, p. 32); il sig. AFFOLTER introdusse (*Math. Annalen* Bd. IV, p. 185) altre due funzioni dei raggi e della distanza dei centri delle due sfere; esse si differenziano dalle funzioni di cui precedentemente tenemmo parola, perchè ognuna di esse si annulla, non già quando le due sfere sono fra loro ortogonali, ma quando esse si toccano internamente o esternamente.

potremo scrivere definitivamente

$$(10) \ldots\ldots\ldots \qquad R_{xx} = \sum_{i,k} R_{ik} x_i x_k$$

ove $i\ k$ è una disposizione binaria completa dei numeri $1, \ldots, 5$.

Chiameremo per brevità R_{xx} *forma fondamentale* del dato spazio e scriveremo la (7) così

$$(7') \ldots\ldots\ldots \qquad R^2 = \frac{R_{xx}}{(\Sigma x_i)^2} .$$

6. Dalla (7′) possiamo trarre alcune conseguenze importanti.

Le coordinate x_i assoggettate a convenienti limitazioni possono servire a rappresentare i punti e i piani dello spazio. Infatti la (7′) ci prova che se

$$R_{xx} = 0 \ ,$$

la sfera di coordinate x_i ha raggio nullo, epperò riducesi a un punto-sfera; se invece è

$$\Sigma x_i = 0 \ ,$$

la sfera di coordinate x_i ha raggio infinito, epperò riducesi a un piano.

Donde segue che se si considerano le sfere come i *punti* d'uno spazio in cui ciascun elemento è determinato dalle cinque coordinate omogenee x_i, la geometria dell'ordinario spazio punteggiato è quella di un *punto* di quello spazio a quattro dimensioni soggetto a trovarsi sulla quadrica a tre dimensioni $R_{xx} = 0$, mentre la geometria dell'ordinario spazio di piani è quella di un *punto* dello stesso spazio a quattro dimensioni obbligato a stare sul *piano* a tre dimensioni $\sum_i x_i = 0$ (*). I *punti* comuni a questi due spazii a tre dimensioni, sono le ∞^2 sfere che possono riguardarsi sia come punti sia come piani, cioè gli ∞^2 piani tangenti del cerchio imaginario all'infinito.

Sono di grande importanza, per lo studio dello spazio di sfere in connessione collo spazio punteggiato, quelle trasformazioni lineari dello spazio stesso per le quali la quadrica dei punti non muta; esse sono le ∞^{10} trasformazioni del tipo

$$x_i = \sum_k \lambda_{ik} y_k \qquad (i, k = 1.2.3.4.5) \ ,$$

che mutano la forma fondamentale R_{xx} in un multiplo di se stessa. A questa categoria appartengono le ∞^4 trasformazioni per raggi reciproci, e le ∞^7 trasformazioni

(*) Allo stesso risultato si giunge senza far uso di formole nel seguente modo:
Nello spazio di sfere il *bi-punto* o *retta* è il fascio di sfere. Ora un luogo a $n-1$ dimensioni contenuto in uno spazio lineare ad n dimensioni è di un ordine dato dal numero dei suoi *punti* che appartengono a qualunque *retta* dello spazio principale. Per conseguenza, nel nostro caso, il *luogo* delle sfere ridotte a punti e il *luogo* delle sfere ridotte a piani saranno di ordini uguali rispettivamente al numero dei punti-sfere e dei piani-sfere che stanno in un fascio di sfere. Ma è noto che in un fascio di sfere vi sono due punti sfere (punti doppi dell'involuzione determinata dal fascio di sfere sulla linea dei centri) e un piano-sfera (il piano radicale); dunque il *luogo* dei punti sfere è una *quadrica*, il *luogo* dei piani-sfere è un *piano*, come appunto si ottenne analiticamente.

che risultano trasportando comunque una figura e sostituendola con una ad essa simile. *Delle* ∞^{11} *trasformazioni che si ottengono combinandole fra loro non sono fra loro distinte che* ∞^{10}. Consideriamo infatti una trasformazione per raggi reciproci di centro O e potenza k e una trasformazione per omotetia di centro O e rapporto μ. Se in virtù della prima il punto A mutasi in A' e se in virtù della seconda il punto A' si muta in A_1, saranno O, A, A', A_1 punti d'una retta e avremo:

$$OA.OA'=k \; ; \; \frac{OA_1}{OA'}=\mu \, .$$

Ora da queste due relazioni si trae

$$OA.OA_1=k\mu$$

dunque le due trasformazioni equivalgono insieme a una trasformazione per raggi reciproci di centro O e potenza $K=k\mu$. Di più, a questa stessa trasformazione si giunge sostituendo alle due costanti k, μ altre due k', μ' soggette all'unica condizione di soddisfare l'equazione $k'\mu'=K$, dunque, non solo una trasformazione per omotetia dà assieme a una trasformazione concentrica un'altra trasformazione per raggi reciproci, ma quest'ultima può ritenersi in ∞^1 modi con due trasformazioni della specie indicata. Donde segue la proposizione enunciata ed infine l'altra:

Il gruppo delle trasformazioni lineari dello spazio di sfere che non mutano la quadrica dei punti, si ottiene associando al gruppo delle trasformazioni lineari dell'ordinaria geometria metrica, quello delle trasformazioni per raggi reciproci.

7. Data un'equazione quadratica omogenea nelle cinque variabili x_i di forma arbitraria (vedi n. seg.) noi potremo sempre considerarla come l'equazione di condizione a cui debbono soddisfare le coordinate dei punti-sfere di uno spazio di sfere. Di più essendo in conseguenza noti i raggi e gl' invarianti simultanei (n. 5) delle cinque sfere fondamentali, si potrà determinare il sistema di riferimento; anzi siccome dei centri delle cinque sfere da determinare non sono note che le mutue distanze, così in generale si potrà costrurre il sistema di riferimento in ∞^6 modi. Senza eseguire in ogni caso la determinazione effettiva delle cinque sfere fondamentali, si possono assegnare, col solo esame della data forma fondamentale R_{xx}, le particolarità del sistema di riferimento. Infatti, rammentando che R_{ii} non è che il quadrato del raggio dell'i^{ma} sfera fondamentale e che R_{ik} vale la metà dell'invariante simultaneo dell'i^{ma} e della k^{ma} sfera fondamentale, si ottengono subito i seguenti criterii:

a) Se in R_{xx} manca il termine in x_i^2, l'i^{ma} sfera fondamentale è un punto-sfera.

b) Se in R_{xx} manca il termine in $x_i\,x_k$ sono fra di loro ortogonali l'i^{ma} e la k^{ma} sfera fondamentale.

Donde poi risultano le regole più particolari:

c) Se in R_{xx} mancano i termini in x_i^2 e in $x_i\,x_k$, l'i^{ma} sfera fondamentale è un punto-sfera posto sulla k^{ma} sfera fondamentale.

d) Se in R_{xx} mancano i termini in x_i^2, in x_k^2 e in $x_i x_k$ le sfere fondamentali i^{ma} e k^{ma} sono due punti-sfere posti su una secante del cerchio imaginario all'infinito (*).

8. Dicemmo al principio del numero precedente che la forma fondamentale si può scegliere ad arbitrio; ora però dobbiamo aggiungere una limitazione relativa ai suoi coefficienti fondata sulla seguente proposizione generale:

Fra i raggi di cinque sfere qualunque ed i loro invarianti simultanei passa una relazione.

Per dimostrare questo teorema rammenteremo che dati ad arbitrio cinque punti nello spazio, se si indicano con d_{ik} $(= d_{ki})$ i quadrati delle loro mutue distanze, si ha la relazione (**).

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & . & . & d_{15} \\ 1 & d_{21} & 0 & . & . & d_{25} \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & d_{51} & d_{52} & . & . & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Se quei punti sono i centri di cinque sfere di raggi R_i delle quali $(k\,l)$ siano gli invarianti simultanei, si ha (n. 5):

$$(i\,k) = R_i^2 + R_k^2 - d_{ik} ,$$

onde

$$d_{ik} = d_{ki} = R_i^2 + R_k^2 - (i\,k) .$$

Sostituendo questi valori nell'equazione precedente otterremo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & R_1^2+R_2^2-(12) & R_1^2+R_3^2-(13) & R_1^2+R_4^2-(14) & R_1^2+R_5^2-(15) \\ 1 & R_2^2+R_1^2-(21) & 0 & R_2^2+R_3^2-(23) & R_2^2+R_4^2-(24) & R_2^2+R_5^2-(25) \\ 1 & R_3^2+R_1^2-(31) & R_3^2+R_2^2-(32) & 0 & R_3^2+R_4^2-(34) & R_3^2+R_5^2-(35) \\ 1 & R_4^2+R_1^2-(41) & R_4^2+R_2^2-(42) & R_4^2+R_3^2-(43) & 0 & R_4^2+R_5^2-(45) \\ 1 & R_5^2+R_1^2-(51) & R_5^2+R_2^2-(52) & R_5^2+R_3^2-(53) & R_5^2+R_4^2-(54) & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Questo determinante può molto semplificarsi; togliendo infatti dalla μ^{ma} orizzontale la prima moltiplicata per R_μ^2 e poi facendo la stessa operazione sulle verticali si ottiene:

(*) Cfr. le regole date da Klein (*Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten*, Mathematische Annalen, Bd. II, p. 366) e riportate da Weiler (*Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades*, Ib. Bd. VII, p. 151) per dedurre dall'equazione che lega le più generali coordinate di una retta, le specialità del sistema dei complessi fondamentali.

(**) Baltzer, *Theorie und Andwendung der Determinanten*, 5^e Auflage, p. 238.

$$(11) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2R_1^2 & (12) & (13) & (14) & (15) \\ 1 & (21) & 2R_2^2 & (23) & (24) & (25) \\ 1 & (31) & (32) & 2R_3^2 & (34) & (35) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 2R_4^2 & (45) \\ 1 & (51) & (52) & (53) & (54) & 2R_5^2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

è questa la relazione a cui si alludeva nel teorema enunciato al principio di questo numero (*).

9. Supponendo in particolare che tutte le sfere siano punti-sfere si ricade nell'equazione da cui siamo partiti; supponendo invece tutte le sfere fra di loro ortogonali, si ha $(ik)=0$, epperò la (11) diviene

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2R_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2R_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2R_3^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2R_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2R_5^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Sviluppando questo determinante si trova la relazione semplicissima

$$(12) \ldots\ldots \quad \frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}+\frac{1}{R_5^2}=0 .$$

A quest'equazione che lega i raggi di cinque sfere due a due ortogonali è giunto anche Darboux per tutt'altra via (**). Essa ci prova che non tutti i raggi di cinque sfere in questa condizione possono essere reali (***).

(*) Questa relazione è l'unica che lega le quantità di cui si tratta.

(**) Vedi: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, 1873, p. 135.

(***) Non sarà fuori di proposito il mostrare come le equazioni (11) e (12) non siano che casi particolari di altre che legano due sistemi di cinque sfere ciascuno.

È noto (BALTZER, l. c.) che fra le distanze di due sistemi 1, 2, 3, 4, 5; 1', 2', 3', 4', 5' di cinque punti passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \overline{11'}^2 & \ldots & \overline{15'}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \overline{51'}^2 & \ldots & \overline{55'}^2 \end{vmatrix} = 0;$$

se si suppone ora che i punti i, k' siano i centri di sfere aventi i raggi R_i R'_k, e indichiamo al solito con (ik') l'invariante simultaneo delle due sfere di centri i, k', potremo facilmente dedurre dalla relazione ora scritta la seguente

$$(11^*) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (11') & \ldots & (15') \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & (51') & \ldots & (55') \end{vmatrix} = 0$$

10. Si presenta ora la questione: Data la forma fondamentale e le coordinate cartesiane di un punto, trovare le coordinate x_i di questo.

Per risponderVi basta evidentemente risolvere rispetto alle x_i il sistema delle equazioni (6) (n. 4) e della

$$R_{xx} = 0 \ ;$$

---

che comprende evidentemente la (11). — Poniamo in particolare che la sfera i' sia ortogonale a tutte le sfere del *sistema non accentuato* di indice diverso da i, onde viceversa i sarà ortogonale a tutte le sfere del *sistema accentuato* di indice diverso da i'; sarà allora $(i\,k') = 0$ per $k \gtrless i$ epperò l'ultima relazione scritta si trasforma in

$$(12^*) \ldots\ldots \qquad \frac{1}{(11')} + \frac{1}{(22')} + \cdots + \frac{1}{(55')} = 0 \ ,$$

la quale è una generalizzazione della (12). Consideriamo un caso speciale quello cioè in cui uno dei due sistemi consta di 5 punti sfera, e l'altro delle 5 sfere circoscritte ai 4 tetraedri che possono formarsi con essi: potremo allora applicare l'ultima equazione ottenuta, ma di più notando che (11') non è che la potenza P_1 del punto 1 rispetto alla sfera circoscritta al tetraedro 2 3 4 5 e che (22'), ..., (55') hanno significati analoghi, ottenerne la relazione

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \cdots + \frac{1}{P_5} = 0$$

la quale esprime il seguente elegante teorema dovuto al Frobenius e da esso dimostrato in modo diverso da quello ora tenuto (V. la Memoria inserita nel vol. 79 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, p. 223).

Dati cinque punti, si considerino le cinque sfere circoscritte ai cinque tetraedri da essi determinati; la somma delle inverse delle potenze dei primi rispetto alle seconde, è uguale a zero.

Di un altro caso particolare della formola dimostrata al principio di questa nota, vogliamo fare un cenno, di quello cioè in cui ogni sfera del secondo sistema è tangente alle quattro, d'indice diverso del primo. In tal caso si ha in genere

$$(i\,k') = \pm 2\, R_i\, R'_k \ , \quad \text{per} \quad i \gtrless k \ ,$$

(ove si prenderà il segno superiore o l'inferiore secondochè il contatto è interno od esterno) onde l'equazione primitiva diviene, dopo poche semplici trasformazioni,

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R_1}, & \frac{1}{R_2} \cdot & \frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_1'} & \frac{(11')}{2R_1 R_1'} & \pm 1 \ldots & \pm 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{R_5'} & \pm 1 & \pm 1 & \frac{(55')}{2R_5 R_5'} \end{vmatrix} = 0$$

Se, finalmente, facciamo l'ipotesi, che il secondo sistema di 5 sfere coincida col primo, avremo l'equazione

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \ldots & \frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_1} & 1 & \pm 1 \ldots & \pm 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{R_5} & \pm 1 & \pm 1 \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

la quale lega i raggi di cinque sfere a due a due tangenti; i doppi segni che si trovano nel suo primo membro devono soddisfare all'unica condizione di rendere simmetrico il determinante che vi compare. La relazione a cui giungemmo risponde alla decimasesta delle questioni proposte a pp. 207-212 del Vol. III del *Giornale di Crelle* da Steiner; una verificazione della sua esattezza può aversi dal suo confronto colla relazione fra i raggi di 4 cerchi d'un piano a due a due tangenti, già trovata da Steiner (*Einige geometrische Betrachtungen*, n. 29, *Crelle's Journal*, Bd. I).

rammentando che R_{xx} non è che il numeratore della frazione che dà il quadrato del raggio R della sfera x_i (n. 4. eq. [7]), vedremo che all'ultima delle equazioni del sistema si può sostituire la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sum\limits_i p_i^2 x_i}{\sum x_i} \;,$$

e che quindi il sistema che bisogna risolvere rispetto alle x_i è:

$$\begin{array}{l}
(\alpha_1 - x) x_1 + (\alpha_2 - y) x_2 + (\alpha_3 - x) x_3 + (\alpha_4 - x) x_4 + (\alpha_5 - x) x_5 = 0 \\
(\beta_1 - y) x_1 + (\beta_2 - y) x_2 + (\beta_3 - y) x_3 + (\beta_4 - y) x_4 + (\beta_5 - y) x_5 = 0 \\
(\gamma_1 - z) x_1 + (\gamma_2 - z) x_2 + (\gamma_3 - z) x_3 + (\gamma_4 - z) x_4 + (\gamma_5 - z) x_5 = 0 \\
(p_1^2 - r^2) x_1 + (p_2^2 - r^2) x_2 + (p_3^2 - r^2) x_3 + (p_4^2 - r^2) x_4 + (p_5^2 - r^2) x_5 = 0 \,.
\end{array}$$

avendo posto per brevità $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Chiamando $i\; k\; l\; m\; n$ una permutazione circolare di 1 2 3 4 5 avremo dunque:

$$x_i \equiv \begin{vmatrix}
\alpha_k - x & \alpha_l - x & \alpha_m - x & \alpha_n - x \\
\beta_k - y & \beta_l - y & \beta_m - y & \beta_n - y \\
\gamma_k - z & \gamma_l - z & \gamma_m - z & \gamma_n - z \\
p_k^2 - r^2 & p_l^2 - r^2 & p_m^2 - r^2 & p_n^2 - r^2
\end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\alpha_k - x & \beta_l - x & \alpha_m - x & \alpha_n - x & 0 \\
\beta_k - y & \beta_l - z & \beta_m - y & \beta_n - y & 0 \\
\gamma_k - z & \beta_l - z & \gamma_m - z & \gamma_a - z & 0 \\
p_k^2 - r^2 & p_l^2 - r^2 & p_m - r^2 & p_n^2 - r^2 & 0
\end{vmatrix}$$

ossia

$$(13) \;.\;.\;.\;.\;.\quad x_i \equiv \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\alpha_k & \alpha_l & \alpha_m & \alpha_n & x \\
\beta_k & \beta_l & \beta_m & \beta_n & y \\
\gamma_k & \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n & z \\
p_k^2 & p_l^2 & p_m^2 & p_n^2 & x^2 + y^2 + z^2
\end{vmatrix}$$

Sviluppando questo determinante secondo l'ultima verticale otterremo una relazione della forma

$$(14) \;.\;.\;.\quad x_i \equiv A_i (x^2 + y^2 + z^2) + B_i x + C_i y + D_i z + E_i \qquad (i = 1.2.3.4.5).$$

11. Queste equazioni [14] ci provano che le coordinate x_i del punto (x, y, z) sono proporzionali alle sue potenze rispetto alle sfere aventi per equazioni:

$$S_i \equiv A_i (x^2 + y^2 + z^2) + B_i x + C_i y + D_i z + E_i = 0 \;.$$

Le sfere S_i sono pienamente determinate dalle cinque sfere s_i; ciò risulta dal modo con cui giungemmo ad esse, ma anche dalla seguente proposizione:

La sfera S_i *è ortogonale a ciascuna delle sfere* s_k, s_e, s_m, s_n.

Per dimostrare questo teorema osserveremo che in generale l' invariante simultaneo delle due sfere

$$a(x^2+y^2+z^2)+2(bx+cy+dz)+e=0 \; ;$$
$$a'(x^2+y^2+z^2)+2(b'x+c'y+d'z)+e'=0 \; ,$$

è espresso da

$$-\frac{ae'+a'e-2(bb'+cc'+dd')}{aa'} \; (*) \; ;$$

per conseguenza l'invariante simultaneo delle sfere

$$S_i \equiv A_i(x^2+y^2+z^2)+B_i x+C_i y+D_i z+E_i=0 \; ;$$
$$s_h \equiv x^2+y^2+z^2-2(\alpha_h x+\beta_h y+\gamma_h z)+p_h^2=0 \; ,$$

vale

$$-\frac{A_i p_h^2+B_i\alpha_h+C_i\beta_h+D_i\gamma_h+E_i}{A_i} \, ,$$

cioè è proporzionale al risultato della sostituzione delle quantità;

$$p_h^2 , \quad \alpha_h , \quad \beta_h , \quad \gamma_h \, ,$$

nel primo membro dell'equazione di S_i in luogo rispettivamente di

$$x^2+y^2+z^2 , \quad x , \quad y \quad z \, .$$

Dunque l'invariante simultaneo in discorso è proporzionale a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m & \alpha_n & \alpha_h \\ \beta_k & \beta_l & \beta_m & \beta_n & \beta_h \\ \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n & \gamma_h \\ p_k^2 & p_l^2 & p_m^2 & p_n^2 & p_h^2 \end{vmatrix} \, .$$

Ora questa quantità è nulla per $h=k, l, m, n$, dunque la sfera S_i è ortogonale alle sfere $s_k \; s_l \; s_m \; s_n$ come si era asserito. — Per concludere, diremo:

Le coordinate $\mathbf{x}_i$ *di un punto-sfera rispetto a cinque sfere qualunque sono proporzionali alle potenze del punto stesso rispetto alle sfere ortogonali alle cinque quaterne di sfere che possono formarsi colle cinque sfere date.*

Segue da ciò:

Le potenze di un punto rispetto a cinque sfere qualunque sono legate da una equazione quadratica omogenea.

(*) In generale l'invariante simultaneo delle due sfere di coordinate x_i, y_i è espresso da

$$-\frac{2R_{xy}}{\sum_i x_i \sum_i y_i} \, .$$

Darboux era giunto con altro metodo alla stessa conclusione (*) ; la via da noi seguìta ci guida anche alla seguente regola per ottenere questa equazione quadratica:

Se S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 *sono le date sfere, si determinino le cinque sfere* $s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_5$ *rispettivamente ortogonali alle quaterne di sfere:* $S_2 S_3 S_4 S_5$; $S_3 S_4 S_5 S_1$; $S_4 S_5 S_1 S_2$; $S_5 S_1 S_2 S_3$; $S_1 S_2 S_3 S_4$; *l'equazione che lega le coordinate di un punto rispetto alle sfere* $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ *è quella cercata che collega le potenze dello stesso punto rispetto alle sfere date.*

Quando in particolare le cinque sfere date sono due a due ortogonali, s_i coinciderà con S_i e le coordinate x_i saranno proporzionali alle potenze del corrispondente punto rispetto alle cinque sfere fondamentali ; per conseguenza applicando la nostra regola potremo concludere che le potenze x_i di un punto rispetto a cinque sfere ortogonali sono legate dalla relazione

$$\sum_i R_i^2 x_i^2 = 0 \ .$$

12. Le sfere S_i a cui fummo naturalmente condotti nel numero precedente porgono anche il significato geometrico delle coordinate x_i di una sfera qualsivoglia.

Consideriamo infatti una sfera qualunque S di coordinate x_i; la sua equazione in coordinate cartesiane sarà

$$\sum_j x_j (x^2 + y^2 + z^2) - 2 (\sum_j \alpha_j x_j x + \sum_j \beta_j x_j y + \sum_j \gamma_j x_j z) + \sum_j p_j^2 x_j = 0 \quad ,$$

onde l'invariante simultaneo di essa e della sfera

$$S_i \equiv A_i (x^2 + y^2 + z^2) + B_i x + C_i y + D_i z + E_i = 0 \quad ,$$

è espresso da

$$-\frac{A_i \sum_j p_j^2 x_j + B_i \sum \alpha_j x_j + C_i \sum_j \beta_j x_j + D_i \sum_j \gamma_j x_j + E_i \sum_j x_j}{A_i \sum_j x_j} \ .$$

Ricordando infine i significati di $A_i, \ldots, E_i$, e indicando con V_i il volume del tetraedro avente per vertici i centri delle sfere $s_k\, s_l\, s_m\, s_n$, avremo che l'invariante simultaneo di cui si tratta è determinato dall'equazione

$$(S, S_i) V_i \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \sum_j x_j \\ \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m & \alpha_n^2 & \sum_j \alpha_j x_j \\ \beta_k & \beta_l & \beta_m & \beta_n & \sum_j \beta_j x_j \\ \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m & \gamma_n & \sum_j \gamma_j x_j \\ p_k^2 & p_l^2 & p_m^2 & p_n^2 & \sum_j p_j^2 x_j \end{vmatrix} \ ,$$

ove il segno $\equiv$ indica una relazione di proporzionalità.

(*) L. c. p. 271.

Nel determinante del secondo membro sottragghiamo dall'ultima verticale la prima moltiplicata x_k, la seconda moltiplicata per x_l, la terza moltiplicata per x_m, e la quarta moltiplicata per x_n; lo trasformeremo così in

$$x_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 & p_5^2 \end{vmatrix},$$

laonde potremo scrivere

$$(15) \ldots\ldots \qquad x_i \equiv V_i(S, S_i) ,$$

e questa ci dà il significato che cercavamo delle coordinate x_i; essa infatti dice:

Le coordinate x_i *di una sfera* S *rispetto alle cinque sfere* $s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_5$ *sono proporzionali agli invarianti simultanei di essa e delle sfere* $S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5$ *moltiplicati per fattori costanti, i quali misurano i volumi dei tetraedri formati dai centri delle sfere* s_i *presi a quattro a quattro.*

In particolare:

Le coordinate x_i *di un piano sono proporzionali ai prodotti delle sue distanze dai centri delle sfere* S_i *per coefficienti costanti.* Per conseguenza quattro delle coordinate x_i di un piano sono le sue coordinate tetraedriche rispetto al tetraedro formato dai centri delle corrispondenti sfere S_i.

13. La forma R_{xx}, che chiamammo fondamentale, ha una parte importante nella metrica dello spazio di sfere, come riconosceremo ora determinando l'angolo di due sfere (*distanza* fra due *punti* dello spazio stesso).

Risolviamo dapprima questa questione in coordinate cartesiane. Se

$$a(x^2+y^2+z^2)+2(bx+cy+dz)+e=0 \; ; \qquad a'(x^2+y^2+z^2)+2(b'x+c'y+d'z)+e'=0$$

sono le equazioni delle date sfere e indichiamo con (x, y, z) un punto ad esse comune e con $X\,Y\,Z$ coordinate correnti avremo che l'angolo θ cercato è uguale a quello dei due piani

$$(ax+b)X+(ay+c)Y+(az+d)Z=0 \; ; \quad (a'x+b')X+(a'y+c')Y'+(a'z+d')Z'=0,$$

onde si ha

$$\cos\theta = \frac{(ax+b)(a'x+b')+(ay+c)(a'y+c')+(az+d)(a'z+d')}{\sqrt{(ax+b)^2+(ay+c)^2+(az+d)^2}\,\sqrt{(a'x+b')^2+(a'y+c')^2+(a'z+d')^2}} \,.$$

Eseguendo le operazioni indicate e tenendo conto del fatto che il punto (x, y, z) sta su entrambe le date sfere si trova

$$\cos\theta = \frac{2(bb' + c'c + dd') - (ae' + a'e)}{2\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 - ae}\sqrt{b'^2 + c'^2 + d'^2 - a'e'}} \ .$$

Applichiamo ora questa formola alle sfere di coordinate y_i, z_i ed otterremo per determinare il loro angolo (y, z) l'equazione

$$\cos(y, z) = \frac{2(\sum_i \alpha_i y_i \sum_i \alpha_i z_i + \sum_i \beta_i y_i \sum_i \beta_i z_i + \sum_i \gamma_i y_i \sum_i \gamma_i z_i) - (\sum_i y_i \sum_i p_i^2 z_i + \sum_i z_i \sum_i p_i^2 y_i)}{2\sqrt{R_{yy} R_{zz}}} \ ;$$

ma si dimostra senza difficoltà che il numeratore di questa espressione non è che il doppio della forma polare di R_{zz} rispetto ad y o di R_{yy} rispetto a z; indicandolo con $R_{yz} = R_{zy}$ avremo dunque

$$(16) \ \ldots\ldots \qquad \cos(y, z) = \frac{R_{yz}}{\sqrt{R_{yy} R_{zz}}} \ ,$$

e quindi

$$(17) \ \ldots\ldots \qquad \text{sen}\,(y, z) = \sqrt{\frac{R_{yy} R_{zz} - R^2_{yz}}{R_{yy} R_{zz}}} \ ,$$

$$(18) \ \ldots\ldots \qquad (y, z) = \frac{1}{2i} \log \frac{R_{yz} + \sqrt{R^2_{yz} - R_{yy} R_{zz}}}{R_{yz} - \sqrt{R^2_{yz} - R_{yy} R_{zz}}} \ .$$

14. Queste equazioni ci fanno vedere che nello spazio di sfere, lo spazio a tre dimensioni

$$R_{xx} = 0$$

è quello che bisogna assumere come assoluto (*) per ottenere una metrica che coincida coll'ordinaria; allora lo spazio di sfere ha per base una metrica ad assoluto reale (**).

La quantità posta sotto il segno log nella [18] è (come si verifica facilmente) il rapporto anarmonico che le due sfere y, z determinano coi due punti-sfere del loro fascio; laonde si può definire l'angolo di due sfere come il prodotto di $\frac{1}{2i}$ pel logaritmo del rapporto anarmonico che esse formano coi due punti-sfere del loro fascio.

15. Dalla [16] possiamo dedurre varie conseguenze:

a) La condizione necessaria, e sufficiente, affinchè le sfere y, z siano fra di loro ortogonali, è espressa da

$$R_{yz} = 0 \ .$$

(*) Cayley, *A sixth Memoir upon quantics* (Philosophical Transactions of the R. Society of London, 1859, n. 209 e seg.).

In seguito, quando dirò *assoluto* senz'altro, intenderò di parlare dell'assoluto dello spazio ordinario, cioè del cerchio imaginario all'infinito.

(**) Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* Math. Ann., Bd. II, pag. 577.

Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* (Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, vol. 3°).

b) La condizione affinchè le sfere y, z si tocchino (cioè che il loro angolo sia un moltiplo di π) è data da

$$R_{yy} R_{zz} - R_{yz}^2 = 0 \ .$$

c) Supponiamo che le cinque sfere fondamentali siano due a due ortogonali e cerchiamo l'angolo (i, x) che una sfera qualunque x fa coll'i^{ma} sfera fondamentale; applicando la [16] otterremo

$$\cos^2(i, x) = \frac{R_i^2 x_i^2}{\sum_j R_j^2 x_j^2} \quad (*).$$

Addizionando le cinque equazioni che si ricavano da questa facendo successivamente $i = 1, 2, 3, 4, 5$, otterremo

$$(19) \ \ldots\ldots \qquad \sum_i \cos^2(i, x) = 1$$

la quale esprime una proprietà molto notevole (che non so se sia ancora stata notata da alcuno), che può enunciarsi così:

La somma dei quadrati dei coseni degli angoli, che una sfera qualunque dello spazio fa con cinque sfere due a due ortogonali, è uguale all'unità.

Questo teorema corrisponde alla nota relazione che lega i coseni degli angoli fatti da una retta con tre assi ortogonali.

d) Notiamo anche che le equazioni [16], [17], [18] non hanno più senso determinato se una o entrambe le sfere considerate son ridotte a punti, ma che invece sussistono se le sfere degenerano in piani.

e) La relazione dianzi trovata fra i coseni degli angoli fatti da una sfera con cinque sfere a due a due ortogonali, è compresa come caso particolare in quella che connette gli angoli di sei sfere qualunque e che può ottenersi nel seguente modo:

Siano $x_k^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 6;\ k = 1, \ldots, 5)$ le coordinate delle sei sfere date e indichiamo con $\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_k}\right)_i$ il valore che assume $\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_k}$ sostituendo in luogo delle coordinate correnti x_k quelle della sfera $x^{(i)}$. Facendo il prodotto per orizzontali dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} x_4^{(1)} x_5^{(1)} \, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(6)} x_2^{(6)} x_3^{(6)} x_4^{(6)} x_5^{(6)} \, 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_1}\right)_1, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_2}\right)_1, \ldots, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_5}\right)_1, 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_1}\right)_1, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_2}\right)_1, \ldots, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x_5}\right)_1, 0 \end{vmatrix}$$

(*) Si può notare che in generale si ha: $\cos(ix) = \frac{1}{R_i} \frac{\partial \sqrt{R_{xx}}}{\partial x_i}$.

si ottiene

$$\begin{vmatrix} R_{x^{(1)}x^{(1)}} & R_{x^{(1)}x^{(2)}} & \dots & R_{x^{(1)}x^{(6)}} \\ R_{x^{(2)}x^{(1)}} & R_{x^{(2)}x^{(2)}} & \dots & R_{x^{(2)}x^{(6)}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ R_{x^{(6)}x^{(1)}} & R_{x^{(6)}x^{(2)}} & \dots & R_{x^{(6)}x^{(6)}} \end{vmatrix} = 0$$

donde si deduce subito la relazione cercata

$$(19^*) \ \dots\dots \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \dots & \cos(16) \\ \cos(21) & 1 & \dots & \cos(26) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cos(61) & \cos(62) & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Fra i coseni degli angoli di sei sfere qualunque, passa dunque una relazione non omogenea di secondo grado in ciascuno di questi coseni. Supponendo le sfere $1, 2, \dots, 5$ a due a due ortogonali, si ricade nell'equazione già trovata

$$1 = \cos^2(1\,,6) + \dots + \cos^2(5\,,6) \ ;$$

ma di più da essa si può dedurre la condizione a cui debbono soddisfare gli angoli compresi da cinque sfere a due a due affinchè esse tocchino una medesima sfera: supponendo infatti $\cos(i\,6) = 1$, per $i = 1, \dots, 5$ ricaveremo

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \dots & \cos(15) & 1 \\ \cos(21) & 1 & \dots & \cos(25) & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 1 \\ \cos(51) & \cos(52) & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

ossia togliendo l'ultima verticale dalle precedenti e sostituendo in genere a $\cos(i\,k) - 1$ il suo equivalente $-2\,\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}(i\,k)$ avremo, dopo qualche riduzione:

$$(20) \ \dots\dots \quad \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}(12) & \dots & \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}(15) \\ \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}(21) & 0 & \dots & \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}(25) \\ \cdot & 0 & \dots & \cdot \\ \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}(51) & \cdot & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

che è l'equazione di cui andavamo in traccia; essa fu già dimostrata per altra via dal Frobenius (*).

f) Ma anche la relazione (19*) è suscettibile di generalizzazione. Infatti, se consideriamo due sistemi di sei sfere, che indicheremo coi numeri 1, ..., 6 e 1', ..., 6', otterremo con procedimento del tutto analogo a quello testè seguito

$$(21) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \cos(11') & \cos(12') & \ldots & \cos(16') \\ \cos(21') & \cos(22') & \ldots & \cos(2,6') \\ . & . & \ldots & . \\ \cos(61') & \cos(62') & \ldots & \cos(66') \end{vmatrix} = 0$$

Facendo coincidere le sfere 1', ..., 5' rispettivamente con 1, ..., 5 e indicando con y, z le sfere 6, 6' otterremo l'altra equazione

$$(22) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \ldots & \cos(15) & \cos(1,x) \\ \cos(21) & 1 & \ldots & \cos(25) & \cos(2,x) \\ . & . & \ldots & . & . \\ \cos(51) & \cos(52) & \ldots & 1 & \cos(5,x) \\ \cos(y,1) & \cos(y,2) & \ldots & \cos(y,5) & \cos(y,x) \end{vmatrix} = 0$$

la quale può servire a determinare l'angolo di due sfere quando si conoscano gli angoli che queste fanno con 5 sfere date (p. e. colle sfere fondamentali); supponendo finalmente che queste ultime siano a due a due ortogonali si ottiene la relazione:

$$(23) \ldots\ldots \quad \cos(x,y) = \sum_i \cos(i,x)\cos(i,y) \quad ,$$

di cui è evidente l'analogia colla nota relazione che dà l'angolo di due rette in funzione degli angoli che esse fanno con tre rette fra loro perpendicolari.

16. Come applicazione proprietà delle esposte vogliamo stabilire la condizione affinchè due date superficie rappresentate in coordinate x_i dalle equazioni

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = 0 \ ; \quad g(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0 \ ,$$

siano fra di loro ortogonali. Consideriamo perciò una qualunque delle sfere S_i e ne sia

$$x_i \equiv (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2 - r_i^2 = 0 \ ,$$

l'equazione; avremo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x_i}{\partial x} = x - a_i \ ; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial x_i}{\partial y} = y - b_i \ ; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial x_i}{\partial z} = z - c_i \ ;$$

(*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 79, p. 225.

epperò:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}=4\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-a_i)\sum_j\frac{\partial g}{\partial x_j}(x-a_j)+4\Sigma_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(y-b_i)\Sigma_j\frac{\partial g}{\partial j}(y-b_j)+$$

$$+4\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(z-c_i)\sum_j\frac{\partial g}{\partial x_j}(z-c_j)=4\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2\Big]+$$

$$+4\sum_{i,k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}\Big[(x-a_i)(x-a_k)+(y-b_i)(y-b_k)+(z-c_i)(z-c_k)\Big]\,.$$

Ma si ha:

$$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2=x_i+r_i^2\;;$$

$$2\Big\{(x-a_i)(x-a_k)+(y-b_i)(y-b_k)+(z-c_i)(z-c_k)\Big\}=x_i+x_k+I_{ik}\,,$$

(ove I_{ik} rappresenta l'invariante simultaneo delle sfere S_i, S_k); onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}=$$

$$=2\left\{2\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}(x_i+x_k)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}+\sum_i r_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}I_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right\}\ (*)\,.$$

Ora dalle equazioni

$$\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\;,\qquad\sum_i x_i\frac{\partial g}{\partial x_i}=0\;,$$

si ricava

$$\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}\left(x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}+x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=0\;,$$

$$\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}\left(x_k\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}+x_i\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=0\;,$$

e quindi

$$2\sum x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}(x_i+x_k)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=0\;.$$

Togliendo dall'equazione precedente il doppio, di questa si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}=2\left\{\sum_i r_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}I_{ik}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\right\}\,.$$

Ma l'annullarsi del primo membro di quest'equazione è la condizione d'ortogonalità delle due superficie, dunque la condizione cercata affinchè le due superficie si sechino ad angolo retto, è

$$(24)\ldots\ldots\qquad\sum_i r_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\sum_{i,k}I_{ik}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=0\quad(**).$$

(*) Avvertiamo che nelle formole che precedono $i\,k$ è una disposizione binaria, nelle seguenti una combinazione binaria di 1, 2, 3, 4, 5.

(**) La condizione analoga nel caso in cui le cinque sfere fondamentali siano a due a due ortogonali trovasi anche nell'*Analytische Geometrie des Raumes*, di SALMON-FIEDLER (II. Th. III. Aufl. 1880, p. 445) riportata dall'opera di DARBOUX (p. 138).

CAPITOLO SECONDO.

Dei sistemi di sfere, in particolare dei sistemi lineari e quadratici.

§ 1. *Definizioni.*

17. Qualunque equazione onogenea fra le coordinate omogenee x_i di una sfera separa dallo spazio un numero triplicemente infinito di sfere le quali diremo costituire un *complesso di sfere*. Se l'equazione è algebrica e di grado n il complesso si dirà di *ordine* n; qualunque fascio ha in generale comuni con esso n sfere.

Due equazioni qualunque fra le x_i determinano un numero doppiamente infinito di sfere le quali costituiscono una *congruenza di sfere;* se le equazioni date sono dei gradi m, n la congruenza si dirà d'ordine mn, ogni rete di sfere ha comuni con essa mn sfere.

Così tre equazioni fra le x_i determinano una *serie* (semplicemente infinita) *di sfere* la quale si dirà d'ordine mnp se le equazioni date sono dei gradi m, n, p; ogni complesso lineare la seca in mnp sfere (*).

Infine quattro equazioni di gradi m, n, p, q nelle x_i determinano in generale $mnpq$ sfere.

Una congruenza lineare di sfere non è che una *rete*, una serie lineare di sfere è un *fascio.*

§ 2. *Sistemi lineari di sfere.*

18. Un complesso lineare di sfere è definito dall'equazione

$$(1) \ldots\ldots \qquad \xi_x \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \xi_5 x_5 = 0 \ .$$

La prima questione che si presenta è la ricerca della condizione geometrica a cui soddisfano tutte le sfere le cui coordinate verificano quest'equazione. Ora la risposta è facile, ove si osservi che, siccome il determinante della forma fondamentale non è nullo, così è sempre possibile determinare cinque quantità X_j che soddisfino le equazioni

$$(2) \ldots\ldots \qquad \sum_i R_{ij} X_j = \xi_i \quad (i = 1 . 2 . 3 . 4 . 5) \ ;$$

fatto ciò la [1] equivarrà all'equazione seguente

$$\sum_{ij} R_{ij} x_i X_j = 0$$

cioè

$$R_{xX} = 0 \ .$$

(*) Volendo considerare anche le intersezioni parziali di complessi, si porranno le definizioni: Una congruenza o una serie semplicemente infinita di sfere si dice d'ordine r se una rete o risp. un complesso lineare di sfere ha comuni con essa r sfere.

Le quantità X_j definite dalle [2] possono considerarsi come coordinate di una sfera; l'ultima delle equazioni scritte ci dice allora che tutte le sfere x del complesso $\xi_x = 0$ sono ortogonali alla sfera X; dunque potremo concludere dicendo:

Tutte le sfere x *che compongono il complesso lineare* [1] *sono ortogonali alla sfera* X *determina dalle* [2]; quest'ultima dicesi *sfera ortogonale* del complesso.

Un complesso lineare è determinato da quattro sfere; esso contiene tutte le sfere del fascio determinato da due sue sfere, della rete determinata da tre di esse; donde seguono le limitazioni a cui debbono soddisfare quattro sfere, affinchè esse possano determinare un complesso lineare.

Dal teorema dimostrato sulla generazione del complesso lineare, segue che *la sfera ortogonale può definirsi anche come luogo dei suoi punti-sfere;* considerandola in questo modo è facile ottenerne l'equazione in coordinate cartesiane. Perciò basterà evidentemente sostituire nella [1] alle x_i le loro espressioni date dalle [13] del n° 10: si ottiene così la seguente equazione

$$(3) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & y \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & z \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 & p_5^2 & x^2+y^2+z^2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

L'inviluppo dei piani-sfere del complesso dato è rappresentato dalle equazioni

$$\sum_i \xi_i x_i = 0 \quad , \quad \sum_i x_i = 0 \quad ;$$

eliminando fra queste una delle x_i avremo l'equazione in coordinate tetraedriche di questo inviluppo, cioè *l'equazione del centro della sfera ortogonale del complesso.*

19. Fra i complessi lineari uno è notevolissimo, quello cioè composto dei piani-sfere; la sua equazione è (n. 6)

$$\sum_i x_i = 0 \ .$$

Vediamo quale sia la sua sfera ortogonale: ponendo nella [3] tutte le ξ_i uguali ad 1 ne avremo l'equazione. Ora, se dopo fatta questa sostituzione nel primo membro sottragghiamo l'ultima orizzontale dalla prima, giungeremo a una relazione della forma

$$\text{cost.} = 0 \ ,$$

la quale ci dice, che *la sfera ortogonale del complesso lineare costituito dai piani dello spazio si riduce al piano all'infinito, contato due volte.*

Le equazioni [2] applicate a questo caso ci danno, per determinare le coordinate del piano all'infinito, le seguenti relazioni

$$(4) \ldots\ldots \qquad \sum_i R_{ij} X_j = 1 \qquad (i = 1.2.3.4.5).$$

Si può verificare poi che le quantità X definite dalle [4] soddisfano l'equazione $\sum_i X_i = 0$; infatti da queste equazioni si ricava:

$$-\begin{vmatrix} R_{11} & \ldots & R_{15} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ R_{51} & \ldots & R_{55} \end{vmatrix} \sum_i X_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & R_{11} & \ldots & R_{15} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & R_{51} & \ldots & R_{55} \end{vmatrix} ;$$

ora il secondo membro è nullo in causa della equazione [11] del n. 8, dunque

$$\sum_i X_i = 0 .$$

Ma v'ha di più: se noi moltiplichiamo la [4] per X_i e addizioniamo le cinque equazioni analoghe, otterremo

$$\sum_i X_i \sum_j R_{ij} X_j = \sum_i X_i$$

cioè in causa di quanto si dimostrò or ora

$$\sum_{ij} R_{ij} X_i X_j = 0 ;$$

e quest'equazione ci prova che *il piano all' infinito deve considerarsi anche come un punto-sfera:* ciò va d'accordo con quanto prima dicemmo (n. 6), che cioè i piani tangenti all'assoluto debbono riguardarsi sia come punti-sfere, sia come piani-sfere.

20. Dalla proposizione dimostrata al principio nel n. 18 si deducono i seguenti teoremi:

a) Le sfere della congruenza comune ai due complessi lineari

$$\sum_i \xi_i^{(1)} x_i = 0 , \qquad \sum_i \xi_i^{(2)} x_i = 0 ,$$

sono ortogonali alle due sfere $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ determinate dai due sistemi

$$\sum_j R_{ij} X_j^{(1)} = \xi_i^{(1)} ; \qquad \sum_j R_{ij} X_j^{(2)} = \xi_i^{(2)} ,$$

e a tutte le sfere del fascio che esse determinano; in conseguenza quella congruenza si dirà *ortogonale* a questo fascio.

b) Le sfere del fascio comune ai tre complessi lineari

$$\sum_i \xi_i^{(1)} x_i = 0 ; \qquad \sum_i \xi_i^{(2)} x_i = 0 ; \qquad \sum_i \xi_i^{(3)} x_i = 0 ,$$

sono ortogonali alle tre sfere $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ determinate dai tre sistemi

$$\sum_j R_{ij} X_j^{(1)} = \xi_i^{(1)} \; ; \qquad \sum_j R_{ij} X_j^{(2)} = \xi_i^{(2)} \; ; \qquad \sum_j R_{ij} X_j^{(3)} = \xi_i^{(3)} \; ,$$

e a tutte quelle della rete da esse determinata.

c) Infine, la sfera comune ai quattro complessi lineari

$$\sum_i \xi_i^{(1)} x_i = 0 \; ; \qquad \sum_i \xi_i^{(2)} x_i = 0 \; ; \qquad \sum_i \xi_i^{(3)} x_i = 0 \; ; \qquad \sum_i \xi_i^{(4)} x_i = 0 \; ,$$

è ortogonale alle sfere definite dai quattro sistemi

$$\sum_j R_{ij} X_j^{(1)} = \xi_i^{(1)} \; ; \qquad \sum_j R_{ij} X_j^{(2)} = \xi_i^{(2)} \; ; \qquad \sum_j R_{ij} X_j^{(3)} = \xi_i^{(3)} \; ; \qquad \sum_j R_{ij} X_j^{(4)} = \xi_i^{(4)} \; .$$

e a tutte quelle del complesso lineare da esse determinato.

Donde segue che per determinare la sfera x ortogonale alle sfere $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}$, si può procedere nel seguente modo: si sostituiscano nelle ultime equazioni scritte le coordinate delle date sfere e si avranno le venti quantità $\xi_i^{(k)}$, epperò le equazioni di quattro complessi lineari $\sum_i \xi_i^{(k)} x_i = 0$ $(k = 1 . 2 . 3 . 4)$: la sfera comune a questi è quella che si cercava. Se in particolare supponiamo che le sfere fondamentali siano due a due ortogonali, la sfera x sarà determinata dalle equazioni

$$R_i^2 x_i = \begin{vmatrix} X_k^{(1)} & X_l^{(1)} & X_m^{(1)} & X_n^{(1)} \\ X_k^{(2)} & X_l^{(2)} & X_m^{(2)} & X_n^{(2)} \\ X_k^{(3)} & X_l^{(3)} & X_m^{(3)} & X_n^{(3)} \\ X_k^{(4)} & X_l^{(4)} & X_m^{(4)} & X_n^{(4)} \end{vmatrix} \qquad (iklmn \text{ perm. circolare di } 1\,2\,3\,4\,5).$$

d) Si abbiano cinque sfere due a due ortogonali che indicheremo coi numeri 1, 2, 3, 4, 5. Le sfere 2, 3, 4, 5 determinano il complesso lineare di cui 1 è sfera ortogonale; così 1, 3, 4, 5 determinano il complesso lineare di cui 2 è sfera ortogonale. Per conseguenza tutte le sfere del fascio Φ determinato dalle sfere 1, 2 sono ortogonali a quelle della congruenza lineare Γ determinata dalle 3, 4, 5.

In particolare il piano-sfera π del fascio Φ sarà ortogonale a tutte le sfere della congruenza Γ, epperò coinciderà col piano dei centri delle sfere 3, 4, 5; ma d'altronde esso è perpendicolare alla retta, luogo dei centri delle sfere del fascio Φ, cioè alla congiungente dei centri delle sfere 1, 2; dunque possiamo concludere:

Se cinque sfere sono a due a due ortogonali, la congiungente i centri di due di esse è perpendicolare al piano determinato dai centri delle altre tre.

Indicando con $C_1\, C_2\, C_3\, C_4\, C_5$ i centri delle sfere considerate, e applicando questo teorema avremo dunque che le rette $C_1 C_5$, $C_2 C_5$, $C_3 C_5$, $C_4 C_5$ sono ortogonali rispettivamente ai piani $C_2 C_3 C_4$, $C_3 C_4 C_1$, $C_4 C_1 C_2$, $C_1 C_2 C_3$; epperò C_5 è il punto d'incontro delle altezze del tetraedro $C_1 C_2 C_3 C_4$. In generale potremo dire:

I centri di cinque sfere che a due ortogonali determinano cinque tetraedri; ognuno di questi tetraedri ha per vertici i centri di quattro delle sfere e per punto d'incontro delle altezze il centro della rimanente.

Il teorema ora dimostrato fu dato senza dimostrazione da Moutard (*).

Siccome (come si dimostrò testè) la congiungente r_{12} dei centri delle sfere 1, 2 è normale al piano dei centri delle sfere 3, 4, 5; e siccome, analogamente, la congiungente r_{34} dei centri delle sfere 3, 4 è normale al piano dei centri delle sfere 1, 2, 5, così le due rette r_{12}, r_{34} sono fra loro ortogonali. Si ritrova in tal modo la nota proprietà dei tetraedri, le cui altezze s' incontrano, cioè chê i loro spigoli opposti sono ortogonali.

e) Quattro sfere 1, 2, 3, 4 determinano un complesso lineare costituito da tutte le sfere ortogonali a una sfera determinata; il raggio R di questa si può trovare servendosi della relazione dimostrata al n. 8. Infatti facendo in essa

$$(15) = (25) = (35) = (45) = 0\,,\ R_5 = R$$

e, indicando con $\overline{ik}$ la distanza fra i centri dell'i^{ma} e della k^{ma} delle date sfere, otterremo, dopo qualche facile riduzione, l'equazione

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \overline{12}^2 & . & \overline{14}^2 & R_1^2 \\ 1 & \overline{21}^2 & 0 & . & \overline{24}^2 & R_2^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & . & 0 & R_4^2 \\ 1 & R_1^2 & R_2^2 & . & R_4^2 & -2R^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

donde poi si trae

$$(5)\ldots\quad 2R^2 = \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \ldots & \overline{14}^2 & R_1^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \ldots & \overline{24}^2 & R_2^2 & 1 \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \ldots & 0 & R_4^2 & 1 \\ R_1^2 & R_2^2 & \ldots & R_4^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \ldots & \overline{14} & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \ldots & \overline{24}^2 & 1 \\ . & . & \ldots & . & . \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si ricava da quest'equazione:

1° La condizione necessaria e sufficiente affinchè le quattro date sfere determinino un complesso lineare la cui sfera ortogonale sia un punto sfera, o, in altre parole, la condizione necessaria e sufficiente affinchè le quattro sfere date passino per lo stesso punto è

(*) *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Nouvelles Annales, t. V, série II, pag. 306).

$$(6) \ldots\ldots\quad \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \cdot\,\cdot & \overline{14} & R_1^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \cdot\,\cdot & \overline{24}^2 & R_2^2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \cdot\,\cdot & 0 & R_4^2 & 1 \\ R_1^2 & R_2^2 & \cdot\,\cdot & R_4^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot\,\cdot & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

2° La condizione necessaria e sufficiente affinchè le quattro date sfere determinino un complesso lineare la cui sfera ortogonale sia un piano è:

$$(7) \ldots\ldots\quad \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \cdot\,\cdot & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \cdot\,\cdot & \overline{24}^2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \cdot\,\cdot & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot\,\cdot & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè dev'esser nullo il volume del tetraedro determinato dai loro centri, in altre parole questi devono stare nello stesso piano.

La prima delle due equazioni di condizione ora trovate, comprende la relazione notissima esistente fra gli elementi che determinano un tetraedro e il raggio della sfera ad esso circoscritta. Facendo infatti $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ avremo un' equazione che determina il raggio comune di quattro sfere uguali passanti per lo stesso punto e aventi i centri in 4 punti dati cioè il raggio della sfera passante per questi; tale equazione può scriversi

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \cdot & \overline{14}^2 & 1 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \cdot & \overline{24}^2 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & \frac{1}{R^2} \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & \frac{1}{R^2} & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ossia, dopo qualche semplificazione,

$$(8) \ldots \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 \end{vmatrix} + 2R^2 \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 & 1 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

equazione ben conosciuta (*).

(*) Cf. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, I Bd. III. Aufl., 1879, p. 77. — La stessa equazione può ottenersi più presto come caso particolare della (5), che dà il raggio della sfera ortogonale a quattro date, supponendo che queste si riducano a punti-sfere.

f) Affinchè cinque sfere di coordinate $x_i^{(\lambda)}$ appartengano allo stesso complesso lineare si deve avere

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_5^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(5)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_5^{(5)} \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Per trasformare questa condizione in altra indipendente dal sistema di coordinate, moltiplichiamone il primo membro (per orizzontali) successivamente pei due determinanti

$$\begin{vmatrix} R_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{15} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{55} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_5^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^{(5)} & \cdot & \cdot & \cdot & x_5^{(5)} \end{vmatrix} ,$$

ed otterremo:

$$\begin{vmatrix} R_{x^{(1)}x^{(1)}} & R_{x^{(1)}x^{(2)}} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{x^{(1)}x^{(5)}} \\ R_{x^{(2)}x^{(1)}} & R_{x^{(2)}x^{(2)}} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{x^{(2)}x^{(5)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{x^{(5)}x^{(1)}} & R_{x^{(5)}x^{(2)}} & \cdot & \cdot & \cdot & R_{x^{(5)}x^{(5)}} \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cdot & \cdot & \cdot & \cos(15) \\ \cos(21) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cos(25) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos(51) & \cos(52) & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Siccome in generale chiamando (ik) l'invariante simultaneo delle sfere i^{ma} e k^{ma} si ha $\cos(ik) = \frac{(ik)}{2 R_i R_k}$, così quest'uguaglianza equivale alla seguente:

$$\begin{vmatrix} 2R_1^2 & (12) & \cdot & \cdot & \cdot & (15) \\ (21) & 2R_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & (25) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (51) & (52) & \cdot & \cdot & \cdot & 2R_5^2 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

ossia, dopo varie trasformazioni, a questa:

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \overline{15}^2 & R_1^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \overline{25}^2 & R_2^2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & R_5^2 & 1 \\ R_1^2 & R_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & R_5^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

ove $\overline{ik}$ rappresenta, al solito, la distanza fra i centri delle sfere i^{ma} e k^{ma}.

Tale è la relazione cercata a cui soddisfano cinque sfere ortogonali a una medesima. Se in particolare tutti gli R_i sono nulli, si ottiene semplicemente

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \dots & \overline{15}^2 \\ \overline{21}^2 & 0 & \dots & \overline{25}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

come condizione, affinchè cinque punti-sfere siano ortogonali a una stessa sfera, cioè come *condizione affinchè cinque punti stiano sulla stessa sfera.*

21. I complessi lineari di sfere formano una varietà a quattro dimensioni; le *coordinate* di un elemento di tale varietà sono i coefficienti ξ_i nell'equazione del complesso lineare in coordinate di sfere. Se nell'equazione $\xi_x = 0$ si ritengono le x come date e le ξ come variabili avremo la rappresentazione analitica della sfera x in coordinate di complessi lineari.

Se si prende per assoluto l'insieme dei complessi speciali, la metrica dello spazio dei complessi lineari coincide con quella dello spazio di sfere perchè in tal modo la *distanza* di due complessi lineari è uguale a quella delle loro sfere ortogonali.

Dati due, tre, quattro o cinque complessi lineari, tutti i complessi le cui coordinate si ottengono combinando linearmente le coordinate dei dati si dicono costituire ordinatamente un *gruppo binomio*, *trinomio*, *tetranomio*, *pentanomio* (*) aventi per *sostegni* i sistemi di sfere comuni a tutte le sfere del gruppo. Per quanto concerne il modo di assegnare le coordinate di questi gruppi, di determinare il numero delle coordinate indipendenti e stabilire le relazioni fra quelle che non lo sono, rimandiamo ai lavori di Clebsch (**) e D' Ovidio (***) ove queste questioni sono risolte per varietà comunque estese.

Faremo invece notare quanto segue: Dalle [2] del n. 18 risulta che le coordinate della sfera ortogonale di un complesso lineare sono funzioni lineari delle sue coordinate, da ciò che ora dicemmo risulta poi che le coordinate di un complesso d'un gruppo k nomio di complessi sono funzioni lineari omogenee di k complessi del gruppo; dunque,

a) Le sfere ortogonali dei complessi d'un gruppo binomio formano un fascio.

b) Le sfere ortogonali dei complessi d'un gruppo trinomio formano una rete.

c) Le sfere ortogonali dei complessi d'un gruppo tetranomio formano un complesso lineare.

d) Infine, tutti i complessi lineari hanno per sfere ortogonali tutte le sfere dello spazio.

(*) Il gruppo pentanomio comprende tutti i complessi lineari dello spazio.

(**) *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. XVII).

(***) *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari* (Atti della R. Accademia di Torino, vol. XII, 1877).

Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni (Memorie della R. Accademia dei Lincei, 1876-77).

Di più i gruppi di complessi e i sistemi di sfere che stanno nella relazione ora esposta sono legati da una relazione proiettiva; il numero delle condizioni determinatrici di un gruppo di complessi coincide con quelle delle condizioni che determinano il corrispondente sistema di sfere: di qui in particolare segue che un gruppo binomio di complessi (e la congruenza che ne è sostegno) è determinato (come un cerchio nello spazio) da sei condizioni; un gruppo trinomio di complessi (e il fascio che ne è sostegno) è determinato (come una coppia di punti) da sei condizioni; un gruppo tetranomio è infine determinato (come una sfera) da quattro condizioni.

22. Come applicazione di quanto si espose riguardo ai sistemi lineari di sfere, dimostreremo tre teoremi a cui Frobenius (l. c., p. 229-230) pervenne con metodi diversi da quelli che ci servono.

a) Tutte le sfere (x) *che secano quattro sfere date* $(\mathrm{x}^{(i)})$ *sotto angoli i cui coseni sono le medesime funzioni lineari omogenee dei coseni degli angoli sotto cui le sfere* $(\mathrm{x}^{(i)})$ *sono secate da tre sfere date* $(\mathrm{a}^{(k)})$ *formano un sistema tale che tre qualunque di esse hanno per centro radicale un punto che è tale per ciascuno dei sistemi determinati da due di queste e dalla sfera* (X) *ortogonale alle quattro sfere* $(\mathrm{x}^{(i)})$.

Infatti si ha per ipotesi

$$\cos(x, x^{(i)}) = \lambda_1 \cos(a^{(1)}, x^{(i)}) + \lambda_2 \cos(a^{(2)}, x^{(i)}) + \lambda_3 \cos(a^{(3)}, x^{(i)}) ,$$

per $i = 1, 2, 3, 4$; onde eliminando le λ_k si avrà la seguente equazione verificata dalle coordinate d'una sfera variabile (x):

$$\begin{vmatrix} \cos(x, x^{(1)}) & \cos(a^{(1)}, x^{(1)}) & . & \cos(a^{(3)}, x^{(1)}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \cos(x, x^{(4)}) & \cos(a^{(1)}, x^{(4)}) & . & \cos(a^{(3)}, x^{(4)}) \end{vmatrix} = 0 .$$

Donde segue che le sfere (x) costituiscono un complesso lineare; ma per la sfera (X) si ha $\cos(X, x^{(i)}) = 0$ onde quest'equazione è soddisfatta, epperò (X) appartiene al complesso lineare predetto: da ciò segue tosto il teorema enunciato.

b) Tutte le sfere (x) *che secano quattro sfere date* $(\mathrm{x}^{(i)})$ *sotto angoli i cui coseni sono le stesse funzioni lineari omogenee dei coseni degli angoli sotto cui le sfere* $(\mathrm{x}^{(i)})$ *sono secate da due sfere date* $(\mathrm{a}^{(1)}, \mathrm{a}^{(2)})$ *passano per due punti fissi della sfera ortogonale* (X) *delle quattro sfere* $(\mathrm{x}^{(i)})$.

Eliminando λ_1, λ_2 dalle equazioni di condizioni del problema, cioè dalle

$$\cos(x, x^{(i)}) = \lambda_1 \cos(a^{(1)}, x^{(i)}) + \lambda_2 \cos(a^{(2)}, x^{(i)}) \qquad (i = 1.2.3.4) ,$$

si ottengono le equazioni rappresentate compendiosamente dalla scrittura:

$$\left\| \begin{matrix} \cos(x, x^{(1)}) & \cos(a^{(1)}, x^{(1)}) & \cos(a^{(2)}, x^{(1)}) \\ . & . & . \\ \cos(x, x^{(4)}) & \cos(a^{(1)}, x^{(4)}) & \cos(a^{(2)}, x^{(4)}) \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Siccome queste rappresentano una congruenza lineare così tutte le sfere (x) passano per due punti fissi; siccome esse sono soddisfatte dalle coordinate delle sfere (X), così quei due punti stanno su questa c. d. d.

c) Tutte le sfere (x) *che secano quattro date sfere* $(x^{(i)})$ *sotto angoli i cui coseni sono proporzionali, passano per un cerchio fisso appartenente alla sfera ortogonale* (X) *delle quattro sfere date.*

Dalle equazioni

$$\cos(x\,x^{(i)}) = \lambda\, c_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,,$$

che si hanno per ipotesi, seguono le equazioni

$$\left\| \begin{matrix} \cos(x, x^{(1)}) & c_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \cos(x, x^{(4)}) & c_4 \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

Queste sono soddisfatte dalle coordinate della sfera (X) onde rappresentano un fascio a cui appartiene la sfera (X), cioè il sistema semplicemente infinito di sfere passanti per un cerchio fisso di (X) c. d. d.

23. Il teorema fondamentale dimostrato al principio di questo § dà il modo di farsi un'idea della distribuzione nello spazio delle sfere di un sistema di ordine e specie qualunque.

Infatti, se è dato il complesso di sfere d'ordine m rappresentato dall'equazione

$$F_m = 0\,,$$

cerchiamo quale sia il luogo dei centri delle sfere che appartengono ad esso e sono ortogonali ad una sfera S. Perciò, se indichiamo con

$$\Sigma\, x_i\, \xi_i = 0\,,$$

l'equazione del complesso lineare costituito dalle sfere ortogonali ad S, e rammentiamo che le coordinate x, y, z del centro della sfera di coordinate x_i sono date dalle equazioni (num. 10)

$$\sum_i (\alpha_i - x)\, x_i = 0\,, \qquad \sum_i (\beta_i - y)\, y_i = 0\,, \qquad \sum_i (\gamma_i - z)\, z_i = 0\,,$$

potremo ricavare x_i proporzionale a una funzione lineare di x, y, z, ξ_i epperò lineare di x, y, z e delle coordinate della sfera data. Se quindi sostituiamo questi valori nell'equazione $F_m = 0$ otterremo l'equazione cercata del luogo dei centri delle sfere di $F_m = 0$ ortogonali a S. E siccome tale equazione è di grado m sia nelle coordinate x, y, z sia in quelle della sfera S, così potremo concludere:

Un complesso di sfere d'ordine m *determina un sistema di quarta specie di superficie* S_m *d'ordine* m; *ad ogni sfera* S *dello spazio corrisponde* S_m, *per*

modo che appartengono al dato complesso tutte sfere ortogonali ad S *e aventi i centri in* S_m : *l'equazione di* S_m *contiene al grado* m *le coordinate di* S.

A conclusioni analoghe guida la considerazione delle congruenze e delle serie di sfere; l'unica diversità consiste in ciò che si ottengono, invece di sistemi di superficie, sistemi di curve nel caso di congruenze, sistemi di gruppi di punti nel caso di serie; l'ordine delle curve è uguale a quello delle congruenze, il numero dei punti di ogni gruppo è uguale all'ordine della serie; le curve sono intersezioni complete di superficie se le congruenze sono intersezioni complete di complessi, i gruppi di punti sono intersezioni complete di superficie se le serie sono intersezioni complete di complessi.

§ 3. *Sistemi quadratici di sfere; invarianti dei sistemi lineari e quadratici* (*).

24. Un complesso quadratico di sfere è definito dall'equazione

$$(10) \ldots\ldots\ldots \qquad a_{xx} \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \ .$$

Siccome la sua equazione contiene quindici coefficienti, riducibili a quattordici indipendenti, così esso è definito da quattordici sue sfere; date le sfere che lo determinano si può subito scriverne l'equazione sotto forma di determinante.

Noi abbiamo già avuto occasione di considerare un complesso quadratico, quello cioè formato dai punti-sfere dello spazio; un complesso quadratico è pure formato da tutte le sfere di dato raggio (n. 4); un terzo esempio di complessi quadratici è offerto dall'insieme di tutte le sfere che secano sotto un angolo dato $\left(\text{diverso da } \frac{\pi}{2}\right)$ una sfera fissa (n. 13); un quarto dalle sfere che hanno i centri su una quadrica e sono ortogonali a una sfera fissa, ecc.

L'equazione di un complesso quadratico di sfere può ridursi in generale in infiniti modi alla forma (canonica)

$$\sum_i a_i x_i^2 = 0 \ ;$$

in virtù della legge d'inerzia delle forme quadratiche, se la trasformazione lineare è reale, comunque si operi, la differenza fra il numero dei coefficienti a_i positivi e quello dei negativi è sempre la stessa; questa differenza può essere uguale a 5, a 4, o a 3, corrispondentemente si hanno tre specie di complessi quadratici: il primo è imaginario, gli altri due si dicono rispettivamente *ellittico* e *iperbolico* (**) e sono sempre reali.

(*) Intorno a quanto è esposto in questo paragrafo, vedi le citate Memorie del Prof. D'Ovidio.
(**) V. Reye, *Synthetische Geometrie der Kugeln*, etc., n. 196.

25. Consideriamo due spazii di sfere: chiamiamo x gli elementi del primo e X quelli del secondo e consideriamo in essi due complessi quadratici

$$\sum_i a_i x_i^2 = 0 \quad ; \qquad \sum_i A_i X_i^2 = 0 \ .$$

Fra gli elementi di questi due spazii stabiliamo una corrispondenza proiettiva tale che alla sfera di coordinate x_i corrisponda la sfera determinata da

$$\rho X_i = \sqrt{\frac{a_i}{A_i}} x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \ .$$

Se la sfera x appartiene al primo dei complessi dati, la sfera X apparterrà al secondo e viceversa, onde le formole ora scritte stabiliscono una corrispondenza proiettiva (non sempre reale) fra gli elementi dei due complessi dati. Ora, avendo supposti distinti i due spazii di sfere, è sempre possibile ridurre le equazioni di entrambi i complessi (i cui primi membri non abbiano discriminante nullo) a forma canonica, epperò è sempre possibile stabilire fra gli elementi di due complessi quadratici una corrispondenza proiettiva. Per conseguenza: *un complesso quadratico di sfere non ha invarianti assoluti.*

In particolare, si può rappresentare un complesso quadratico di sfere elemento per elemento sullo spazio punteggiato (*); se quindi, nello spazio di sfere in cui è contenuta la quadrica de' punti, troviamo un fascio di sfere composto di punti-sfere, ad esso corrisponderà nell'altro spazio un fascio di sfere posto tutto sul corrispondente complesso: epperò la corrispondenza stabilita può servire a trovare i sistemi lineari di sfere contenuti in un complesso quadratico. Ed infatti, notando che, affinchè il fascio di sfere determinato da due punti sia composto tutto di punti-sfere è necessario e sufficiente che quei due punti stiano su una secante dell'assoluto (**), e e che vi sono ∞^3 tali secanti, potremo concludere subito:

(*) Ciò è lecito, perchè il discriminante della forma fondamentale R_{xx} non è uguale a zero. Infatti esso è proporzionale alla quantità

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \dots & \overline{15}^2 & R_1^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \dots & \overline{25}^2 & R_2^2 & 1 \\ \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \dots & 0 & R_5^2 & 1 \\ R_1^2 & R_2^2 & \dots & R_5^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} ,$$

la quale non è nulla, perchè le sfere fondamentali non appartengono allo stesso complesso lineare (n. 20, f).

(**) Per dimostrare quest'asserzione basta tener presente, che i punti-sfere del fascio

$$\{(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 - R_1^2\} + \lambda\{(x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 + (z-\gamma_2)^2 - R_2^2\} = 0$$

corrispondono ai valori di λ, che sono radici dell'equazione

$$R_1^2 + \lambda\{(\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\beta_1-\beta_2)^2 + (\gamma_1-\gamma_2)^2\} + \lambda^2 R_2^2 = 0 \ ;$$

infatti da questa segue che il fascio sarà composto tutto di punti-sfere, se i coefficienti di quest'equazione saranno separatamente nulli, se, cioè, si avrà

$$R_1 = 0 \ , \qquad R_2 = 0 \ , \qquad (\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\beta_1-\beta_2)^2 + (\gamma_1-\gamma_2)^2 = 0 \ ,$$

se, cioè (n. 5, nota) il fascio sarà determinato da due punti-sfere posti su una secante dell'assoluto.

In qualunque complesso quadratico di sfere sono contenuti ∞^3 *fasci di sfere, per ogni sua sfera ne passa una semplice infinità.*

Per determinare i fasci di un complesso quadratico $a_{xx}=0$ passanti per una sua sfera arbitraria y basta scrivere che, chiamando z una sfera qualunque d'un tale fascio, l'equazione

$$a_{\lambda y+\mu z,\,\lambda y+\mu z}\equiv\lambda^2 a_{yy}+2\lambda\mu\, a_{yz}+\mu^2 a_{zz}=0$$

è verificata qualunque sia $\lambda:\mu$. Oltre all'equazione $a_{yy}=0$, soddisfatta per ipotesi, si hanno le due equazioni

$$a_{yz}=0\ ,\qquad a_{zz}=0\ ,$$

le quali sono soddisfatte dalle ∞^2 sfere degli ∞^1 fasci passanti per la sfera y.

26. Rispetto a un complesso quadratico di sfere si può stabilire una *polarità*, analoga a quella che si considera nella teoria delle curve e delle superficie di 2° grado.

Due sfere y, z si diranno *coniugate* rispetto al complesso $a_{xx}=0$, quando le due sfere di questo che appartengono al fascio formano un gruppo armonico colle due sfere date; ora quelle due sfere hanno coordinate della forma $\lambda y_i+\mu z_i$, purchè $\lambda:\mu$ sia una radice dell'equazione

$$a_{\lambda y+\mu z,\,\lambda y+\mu z}\equiv\lambda^2 a_{yy}+2\lambda\mu\, a_{yz}+\mu^2 a_{zz}=0\ ;$$

quindi affinchè il rapporto anarmonico da esse fatto colle date sfere, cioè la condizione affinchè queste siano coniugate è

$$(11)\ \dots\dots\qquad a_{yz}=0\ .$$

Se in quest'equazione si tiene z fisso, si avrà l'equazione dell'insieme delle sfere z coniugate ad y; quest'insieme è un complesso lineare che si dirà *polare* della sfera y rispetto ad $a_{xx}=0$.

Viceversa, dato un complesso lineare qualunque $\xi_x=0$ e uno quadratico $a_{xx}=0$ (tale che il determinante della forma quadratica a_{xx} non sia nullo) ripetendo un ragionamento fatto in altra occasione (n. 18), si può dimostrare che:

Tutte le sfere di un complesso lineare $\xi_x=0$ *sono coniugate rispetto a un complesso quadratico arbitrario* $a_{xx}=0$ *di una sfera* X *determinata dalle equazioni*

$$\sum_i a_{ij} X_j=\xi_i\ ;$$

questo teorema è una generalizzazione di quello dimostrato al n. 18.

Siccome la [11] è simmetrica in y, z così si ha:

Due sfere coniugate rispetto a un complesso quadratico stanno ciascuna nel complesso polare dell'altra rispetto a questo.

Così, notando che nella [11] y e z entrano linearmente, si conclude:

Se una sfera è coniugata a due, tre o quattro date sfere, lo sarà rispetto a tutte le sfere del fascio, della rete, del complesso lineare, determinati ordinatamente dalle date sfere, epperò si dirà coniugata a questi sistemi lineari.

Prendiamo ad arbitrio una sfera S_1 e troviamone il complesso polare C_1 rispetto ad $a_{xx}=0$; in C_1 scegliamo una sfera S_2 e troviamone il complesso polare C_2 rispetto ad $a_{xx}=0$, il quale passerà per S_1. Nella congruenza lineare $C_1 C_2$ prendiamo una terza sfera S_3 e troviamone il complesso polare C_3 il quale passerà per S_1 e S_2; nel fascio $C_1 C_2 C_3$ prendiamo ad arbitrio una sfera S_4 e cerchiamone il complesso polare C_4. I quattro complessi lineari $C_1 C_2 C_3 C_4$ si secano in una sfera S_5 (n. 17) il cui complesso polare C_5 passa per $S_1 S_2 S_3 S_4$. Il sistema di cinque sfere e cinque complessi lineari che abbiamo così costruito è tale che ognuno di questi è determinato da quattro di quelle e polare della quinta rispetto al dato complesso quadratico; un sistema di tal natura diremo *autoconiugato* rispetto al dato complesso; i sistemi autoconiugati rispetto a un complesso di 2° grado formano una varietà a

$$4+3+2+1=10$$

dimensioni.

Dal confronto delle [11] con un teorema precedentemente dimostrato (n. 15, a) deduciamo: *Due sfere ortogonali sono coniugate rispetto al complesso dei punti-sfere.* Così supponendo che il complesso $a_{xx}=0$ coincida con quello dei punti-sfere si potrà cambiare in tutti i teoremi ora dimostrati la parola *coniugato* in *ortogonale*. Un sistema autoconiugato rispetto al complesso dei punti-sfere è composto di cinque sfere due a due ortogonali.

Per rendere manifesta la connessione delle equazioni [10], [11], con altre che incontreremo più innanzi (chiamando α_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante a di α_{xx}, e α il determinante delle α_{ik}) le vogliamo scrivere così

$$(10')\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1} & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{55} & x_5 \\ x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_5 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{15} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{55} & y_1 \\ z_1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (11')$$

ossia più brevemente, adottando una scrittura già in uso,

$$(10'')\ \ldots\ldots \qquad \left(\alpha\, {x \atop x}\right)=0\ ; \qquad \left(\alpha\, {y \atop z}\right)=0 \qquad \ldots\ldots\ (11'').$$

27. Esaminando la [11] del n° prec., vedremo ancora che affinchè una sfera stia nel proprio complesso polare rispetto a un complesso quadratico, essa deve far parte di questo; supponendo che ciò si verifichi, congiungiamo quella sfera con una sfera qualunque del suo complesso polare e cerchiamo le sfere del fascio così determinato che stanno nel complesso quadratico: otterremo così due sfere coincidenti con

quelle da cui partimmo. Il fascio in tal modo ottenuto gode dunque della proprietà di aver comuni col dato complesso di 2° grado due sfere coincidenti, onde a ragione può dirsi a quello *tangente;* ma un tal fascio si ottiene congiungendo la sfera primitiva con una sfera qualunque del suo complesso polare e un complesso lineare contiene tutto il fascio determinato da due sue sfere, dunque potremo concludere:

Il complesso polare rispetto a un complesso quadratico di una sua sfera è l'insieme degli ∞^2 *fasci di sfere tangenti in questa sfera al complesso dato*, epperò si dirà *complesso tangente* in questa sfera al complesso di 2° grado.

Ogni complesso tangente è secato da un complesso lineare qualunque contenente la *sfera di contatto* in una congruenza lineare contenente ∞ fasci tangenti al complesso di 2° grado e che per conseguenza si dirà *tangente* a questo in quella sfera.

In ognuna delle ∞^2 sfere comuni a due qualunque complessi di 2° grado, essi hanno comune una congruenza tangente; ma se in una di tali sfere essi hanno comune il complesso tangente, si diranno fra loro *tangenti*.

28. Consideriamo una sfera y non appartenente al complesso $a_{xx}=0$; se la congiungiamo mediante un fascio a una delle sfere x comuni al complesso $a_{xx}=0$ e al complesso lineare $a_{xy}=0$ polare di y rispetto ad $a_{xx}=0$, otterremo evidentemente un fascio di sfere tangente in x al dato complesso di 2° grado. *Gli* ∞^2 *fasci così ottenuti generano un complesso quadratico* (*speciale* nel senso che gli attribuiremo al n. 36), *che tocca* $a_{xx}=0$ *nella sua congruenza d'intersezione con* $a_{xy}=0$; l'equazione di questo complesso è

$$a_{xx}\,a_{yy}-a_{xy}^2=0 \;(*)\,.$$

Ricordando che se una sfera sta nel complesso polare di un'altra questa a sua volta sta nel complesso polare della prima (n. 26), si vedrà che i complessi tangenti ad $a_{xx}=0$ nelle sfere che esso ha comuni con $a_{xy}=0$ passano per la sfera y; dunque *la sfera polare di un complesso lineare rispetto a un complesso quadratico è comune agli* ∞^2 *complessi tangenti al complesso di* 2° *grado nelle sfere della sua intersezione col complesso lineare.*

Se ora consideriamo tutte le sfere di un fascio determinato dalle sfere y, z e ne cerchiamo i complessi polari otterremo un gruppo binomio di complessi lineari il cui sostegno seca $a_{xx}=0$ in una serie quadratica di sfere.

(*) Più, in generale, si può dimostrare che:

Gli ∞^2 *fasci di sfere che si ottengono congiungendo una sfera qualunque* y *alle* ∞^2 *sfere della congruenza d'intersezione dei due complessi* $a_{xx}=0$, $\xi_x=0$ *formano un complesso di secondo grado* (pure speciale) *la cui equazione è:*

$$\xi_y^2\,a_{xx}-2\,\xi_y\,\xi_x\,a_{xy}+\xi_x^2\,a_{yy}=0\,.$$

Le ∞^1 reti che congiungono una sfera di questa serie al fascio dato generano un complesso quadratico (doppiamente speciale nel senso che gli attribuiremo al n. 37); l'equazione di questo complesso è

$$a_{xx}(a_{yy}a_{zz}-a_{yz}^2)-a_{xy}^2a_{zz}-a_{xz}^2a_{yy}+2\,a_{xy}a_{xz}a_{yz}=0\ (*)\ ;$$

esso tocca $a_{xx}=0$ in tutte le ∞ sfere della serie quadratica

$$a_{xx}=0\ ,\quad a_{xy}=0\ ,\quad a_{xz}=0\ .$$

Infine, se consideriamo le ∞^2 sfere d'una congruenza lineare e ne cerchiamo i complessi polari, otterremo un gruppo trinomio di complessi lineari, il cui sostegno seca $a_{xx}=0$ in due sfere che congiunte colla data congruenza danno due complessi lineari tangenti ad $a_{xx}=0$ e passanti per questa. In ogni gruppo binomio di complessi lineari vi son dunque due complessi tangenti a un complesso quadratico qualsivoglia; questa proprietà può enunciarsi brevemente così:

I complessi di sfere di secondo ordine sono eziandio di seconda classe.

29. Dati due complessi lineari

$$\xi_x=0\ ;\quad \eta_x=0$$

e un complesso quadratico

$$a_{xx}=0$$

si determinino le sfere S_ξ, S_η di cui $\xi_x=0$ e $\eta_x=0$ sono i complessi polari rispetto ad $a_{xx}=0$.

Se S_ξ appartiene al complesso $\eta_x=0$, S_η apparterrà al complesso $\xi_x=0$; S_ξ, S_η saranno coniugate rispetto ad $a_{xx}=0$ (n. 24) e i complessi $\xi_x=0$, $\eta_x=0$ si *diranno coniugati* rispetto ad $a_{xx}=0$. Non è difficile stabilire la condizione analitica affinchè ciò accada: le coordinate X della sfera S_ξ sono determinate dalle equazioni (n. 26).

$$a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+a_{i3}X_3+a_{i4}X_4+a_{i5}X_5=\xi_i\ (i=1.2.3.4.5)\ ,$$

e affinchè S_ξ stia in $\eta_x=0$ si deve avere

$$\eta_1X_1+\eta_2X_2+\eta_3X_3+\eta_4X_4+\eta_5X_5=0\ ;$$

(*) Anche questo teorema può generalizzarsi, perchè si può dimostrare che:

Le ∞^1 reti di sfere che si ottengono congiungendo due sfere qualunque y, z *alle ∞^1 sfere della serie quadratica d'intersezione dei tre complessi* $a_{xx}=0$, $\xi_x=0$, $\eta_x=0$ *formano un complesso quadratico* (pure doppiamente speciale) *la cui equazione è:*

$$\begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} & \xi_x & \eta_x \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} & \xi_y & \eta_y \\ a_{zx} & a_{xy} & a_{zz} & \xi_z & \eta_z \\ \xi_x & \xi_y & \xi_z & 0 & 0 \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & 0 & 0 \end{vmatrix}=0\ .$$

onde eliminando le X fra queste equazioni otterremo la condizione cercata sotto la forma

$$(12) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{15} & \xi_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{51} & a_{52} & . & . & a_{55} & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & . & . & \eta_5 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

che scriveremo così:

$$(12') \ldots\ldots \quad \left(a \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right) = 0 .$$

Siccome la [12] è lineare nelle coordinate ξ, η; così da essa dedurremo che:

Se un complesso è coniugato a due, tre, quattro complessi lineari dati, lo sarà rispetto a tutto il gruppo di complessi da essi risp. determinato.

Se $a_{xx}=0$ è il complesso dei punti-sfera si dovrà mutare in ciò che si disse la parola *coniugato* nella *ortogonale.*

Facendo coincidere i due complessi $\xi_x=0$, $\eta_x=0$, noi avremo che

$$(13) \ldots\ldots\ldots \quad \left(a \begin{matrix} \xi \\ \xi \end{matrix} \right) = 0 ,$$

è la condizione necessaria o sufficiente affinchè il complesso $\xi=0$ contenga la propria sfera coniugata S_ξ rispetto ad $a_{xx}=0$, affinchè cioè S_ξ appartenga al complesso $a_{xx}=0$ e $\xi_x=0$ lo tocchi. In altre parole *la* [13] *può considerarsi come l'equazione del complesso quadratico* $a_{xx}=0$ *in coordinate di complessi lineari tangenti.* Usando le notazioni che già introducemmo (n. 26), potremo scrivere la [13] così:

$$(13') \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{i,k} \alpha_{ix} \xi_i \xi_x = 0 .$$

30. Un gruppo binomio di complessi lineari di sfere determinato dai due complessi $\xi_x=0$, $\eta_x=0$ si dice coniugato rispetto al complesso quadratico $a_{xx}=0$ del gruppo binomio determinato dai complessi $\xi'_x=0$, $\eta'_x=0$, quando nel primo esiste un complesso lineare la cui sfera coniugata sta nella congruenza sostegno del secondo; allora in questo si troverà un complesso la cui sfera coniugata sta nella congruenza sostegno del primo, cioè la relazione fra i due gruppi è scambievole epperò si diranno *fra loro coniugati.* La condizione affinchè ciò accada è espressa da

$$(14) \ldots\ldots\ldots \quad \left(a \begin{matrix} \xi & \eta \\ \xi' & \eta' \end{matrix} \right) = 0 .$$

In particolare

$$(15) \ldots\ldots\ldots \quad \left(a \begin{matrix} \xi & \eta \\ \xi & \eta \end{matrix} \right) = 0 ,$$

è la condizione affinchè la congruenza sostegno del gruppo binomio $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$ tocchi il complesso $a_{xx} = 0$; sviluppata convenientemente essa rappresenta il complesso $a_{xx} = 0$ in coordinate (cfr. n. 21) di gruppi binomii tangenti.

Analogamente si può stabilire la nozione di *gruppi trinomii e tetranomii coniugati* e dimostrare che le condizioni per ciò necessarie e sufficienti sono rispettivamente

$$(16) \ldots\ldots\ \left(a \begin{smallmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{smallmatrix}\right) = 0 \ ; \qquad \left(a \begin{smallmatrix} \xi & \eta & \zeta & \omega \\ \xi' & \eta' & \zeta' & \omega' \end{smallmatrix}\right) = 0 \ \ldots\ldots (17),$$

in particolare le condizioni di contatto d'un gruppo trinomio o tetranomio sono rispettivamente

$$(18) \ldots\ldots\ \left(a \begin{smallmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{smallmatrix}\right) = 0 \ ; \qquad \left(a \begin{smallmatrix} \xi & \eta & \zeta & \omega \\ \xi & \eta & \zeta & \omega \end{smallmatrix}\right) = 0 \ \ldots\ldots (19).$$

31. Nello spazio di sfere sono figure in un certo senso correlative la sfera e il complesso lineare, onde dai risultati ottenuti nei due numeri precedenti ne potremo dedurre altri scambiando le sfere coi complessi lineari e considerando il complesso quadratico come generato dai complessi lineari che lo toccano; così dalle formole a cui ora siamo pervenuti se ne potranno dedurre altrettante mutando le a nelle α e le coordinate di un complesso lineare in quelle di una sfera: le corrispondenti delle [12′] [13] nel n. 29 sono le [10″] [11″] nel n. 26, le altre si otterranno nel modo indicato.

32. Un caso merita speciale menzione: è quello in cui il dato complesso quadratico è formato dai punti-sfere. Allora la [13] si muta in

$$(20) \ldots\ldots\ \left(R \begin{smallmatrix} \xi \\ \xi \end{smallmatrix}\right) = 0 \ ;$$

questa è la condizione necessaria e sufficiente affinchè il complesso lineare $\xi_x = 0$ abbia per sfera ortogonale un punto-sfera cioè sia formato dalle ∞^3 sfere che passano per un punto fisso. Se si ritiene che nella [20] le ξ_i siano variabili, essa può riguardarsi come l'equazione dello spazio punteggiato in coordinate di complessi lineari tangenti. Quando invece le ξ si suppongono date, l'annullarsi della funzione $\left(R \begin{smallmatrix} \xi \\ \xi \end{smallmatrix}\right)$ è la condizione necessaria e sufficiente affinchè il complesso $\xi_x = 0$ sia specializzato nel modo detto; siccome poi se un complesso lineare è speciale esso si conserva tale anche se assoggettato alle trasformazioni di cui si tenne parola al n. 6, così sembra ragionevole il dare alla funzione $\left(R \begin{smallmatrix} \xi \\ \xi \end{smallmatrix}\right)$ il nome di *invariante del complesso lineare* $\xi_x = 0$ (*). Un complesso lineare di sfere è pienamente determinato dalla sua sfera ortogonale, onde tutte le specializzazioni di quello devono corrispondere a specializzazioni di questa; in particolare quelle sfere che hanno una specialità di carattere

(*) Riferendosi a cinque sfere due a due ortogonali, l'invariante di $\xi x = 0$ è $\sum_i \frac{\xi_i^2}{R_i^2}$.

invariantivo rispetto a tutte le trasformazioni del n. 6, determineranno dei complessi aventi una specialità godente di proprietà analoghe. Ora l'unica sfera speciale rispetto a quelle trasformazioni è il punto sfera, quindi l'unico complesso lineare speciale è quello che ha per sostegno un punto-sfera, epperò la funzione $\left(R_{\xi}^{\xi}\right)$ è l'unica che meriti il nome di invariante del complesso lineare.

Il complesso (lineare) dei piani-sfera è speciale; infatti siccome tutte le sue coordinate sono uguali ad 1 (n. 6), il suo invariante è espresso da

$$\left(R\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right),$$

e questo è nullo in causa dell' equazione [11] del n. 8. Dunque il complesso dei piani-sfere tocca il complesso quadratico dei punti-sfera: l'elemento di contatto è il piano all'infinito.

33. Nel numero precedente fummo naturalmente condotti all'invariante di un complesso lineare espresso dal terminante della forma fondamentale orlato coi coefficienti del complesso dato; analogamente applicando le equazioni [15], [18], [19] si otterrebbero funzioni a cui si vedrebbe convenire i nomi di *invarianti* dei corrispondenti gruppi e dei loro sostegni. Ma a questi si giunge anche colle seguenti considerazioni più dirette (*).

Siano $\xi_x=0$, $\eta_x=0$ due complessi lineari qualunque. Nel gruppo binomio da essi determinato vi sono in generale due complessi speciali le cui sfere ortogonali sono degenerate nei punti-sfere del fascio costituito dalle sfere ortogonali dei complessi del gruppo (n. 21, *a*); essi corrispondono ai valori di $\lambda:\mu$ che soddisfano l'equazione:

$$\left(R\begin{matrix}\lambda\xi+\mu\eta\\\lambda\xi+\mu\eta\end{matrix}\right)\equiv\lambda^2\left(R\begin{matrix}\xi\\\xi\end{matrix}\right)+2\lambda\mu\left(R\begin{matrix}\xi\\\eta\end{matrix}\right)+\mu^2\left(R\begin{matrix}\eta\\\eta\end{matrix}\right)=0\,.$$

Se quest'equazione ha radici uguali, i due complessi speciali del gruppo coincidono; epperò coincidono i due punti-sfere del fascio di sfere ortogonali, cioè questo è formato da sfere fra di loro tangenti. Dunque la funzione

$$(21)\,\ldots\ldots\quad\begin{vmatrix}\left(R\begin{matrix}\xi\\\xi\end{matrix}\right) & \left(R\begin{matrix}\xi\\\eta\end{matrix}\right)\\ \left(R\begin{matrix}\eta\\\xi\end{matrix}\right) & \left(R\begin{matrix}\eta\\\eta\end{matrix}\right)\end{vmatrix},$$

col suo annullarsi esprime che la congruenza $\xi_x=0$, $\eta_x=0$ è comune a tutti i complessi le cui sfere ortogonali sono fra loro tangenti; siccome tale proprietà resta se si assoggetta il sistema alle trasformazioni considerate nel n. 6, così l'espressione [21]

(*) Le due vie indicate conducono a risultati identici per la sostanza, ma di forme differenti; si può dimostrare facilmente la loro identità.

si dirà *invariante della congruenza lineare* $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$ (*). In modo analogo a quello tenuto dianzi si prova ch'essa è l'unica a cui spetti questo nome.

L'invariante della congruenza s'annulla quando si ha separatamente

$$\left(R\,{\xi \atop \xi}\right) = 0\,, \quad \left(R\,{\xi \atop \eta}\right) = 0\,, \quad \left(R\,{\eta \atop \eta}\right) = 0\,;$$

i due complessi dati sono in questo caso speciali e determinano un fascio di complessi lineari speciali; il fascio di sfere ortogonali è tutto costituito di punti-sfere, posti su una secante dell'assoluto. È questa la massima specializzazione che possa presentare una congruenza lineare di sfere e il gruppo binomio che essa sostiene.

34. Siano $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$, $\zeta_x = 0$ tre complessi lineari qualunque; nel gruppo trinomio da essi determinato vi sono ∞^1 complessi lineari speciali corrispondenti ai valori dei rapporti $\lambda : \mu : \nu$ che soddisfano l'equazione

$$\left(R\,{\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta \atop \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta}\right) \equiv \lambda^2\left(R\,{\xi \atop \xi}\right) + \mu^2\left(R\,{\eta \atop \eta}\right) + \nu^2\left(R\,{\zeta \atop \zeta}\right) + 2\mu\nu\left(R\,{\eta \atop \zeta}\right)$$
$$+ 2\nu\lambda\left(R\,{\zeta \atop \xi}\right) + 2\lambda\mu\left(R\,{\xi \atop \eta}\right) = 0\,,$$

ed essi possano rappresentarsi univocamente sui punti della conica di cui questa è l'equazione in coordinate λ, μ, ν; se questa conica si scinde il gruppo trinomio sarà specializzato, quindi il determinante (discriminante di quella conica)

$$(22) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \left(R\,{\xi \atop \xi}\right) & \left(R\,{\xi \atop \eta}\right) & \left(R\,{\xi \atop \zeta}\right) \\ \left(R\,{\eta \atop \xi}\right) & \left(R\,{\eta \atop \eta}\right) & \left(R\,{\eta \atop \zeta}\right) \\ \left(R\,{\zeta \atop \xi}\right) & \left(R\,{\zeta \atop \eta}\right) & \left(R\,{\zeta \atop \zeta}\right) \end{vmatrix}$$

gode di proprietà invariantive (per le trasformazioni lineari del n. 6) rispetto al gruppo (ed è l'unica che ne goda); l'annullarsi del determinante (22) è la condizione necessaria e sufficiente affinchè nel gruppo trinomio vi sia un complesso la cui sfera ortogonale si riduce a uno dei punti-sfere del fascio di sfere che è sostegno del gruppo trinomio, cioè affinchè tutte le sfere ortogonali dei complessi del gruppo trinomio abbiano comune un punto e la tangente in esso. Il gruppo si particolarizza maggiormente se s'annullano tutti i determinanti di 2° ordine del determinante (22); allora tutte le dette sfere ortogonali hanno una generatrice comune, e si ha così la massima specializzazione che può presentare un gruppo trinomio.

(*) Se le cinque sfere fondamentali sono due a due ortogonali, l'invariante di $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$ è $\sum_{i,k} \frac{(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2}{R_i^2 R_k^2} = 0$.

35. Infine il gruppo tetranomio definito dai quattro complessi lineari $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$, $\zeta_x = 0$, $\omega_x = 0$ contiene ∞^2 complessi speciali corrispondenti ai valori di $\lambda : \mu : \nu : \rho$ che verificano l'equazione:

$$\left(R \begin{matrix} \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \rho\omega \\ \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \rho\omega \end{matrix} \right) = 0 ,$$

cioè l'equazione:

$$\lambda^2 \left(R \begin{matrix} \xi \\ \xi \end{matrix} \right) + \mu^2 \left(R \begin{matrix} \eta \\ \eta \end{matrix} \right) + \nu^2 \left(R \begin{matrix} \zeta \\ \zeta \end{matrix} \right) + \rho^2 \left(R \begin{matrix} \omega \\ \omega \end{matrix} \right) + 2\lambda\mu \left(R \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right) + 2\nu\rho \left(R \begin{matrix} \zeta \\ \omega \end{matrix} \right)$$

$$+ 2\lambda\nu \left(R \begin{matrix} \xi \\ \zeta \end{matrix} \right) + 2\rho\mu \left(R \begin{matrix} \omega \\ \eta \end{matrix} \right) + 2\lambda\rho \left(R \begin{matrix} \xi \\ \omega \end{matrix} \right) + 2\mu\nu \left(R \begin{matrix} \eta \\ \zeta \end{matrix} \right) = 0 ,$$

epperò possono rappresentarsi univocamente sui punti della quadrica di cui questa è l'equazione in coordinate λ, μ, ν, ρ; se questa è specializzata, lo sarà anche il gruppo tetranomio e la sfera che ne è sostegno, quindi il determinante (discriminante di quella quadrica);

$$(23) \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{vmatrix} \left(R \begin{matrix} \xi \\ \xi \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \xi \\ \zeta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \xi \\ \omega \end{matrix} \right) \\ \left(R \begin{matrix} \eta \\ \xi \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \eta \\ \eta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \eta \\ \zeta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \eta \\ \omega \end{matrix} \right) \\ \left(R \begin{matrix} \zeta \\ \xi \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \zeta \\ \eta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \zeta \\ \zeta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \zeta \\ \omega \end{matrix} \right) \\ \left(R \begin{matrix} \omega \\ \xi \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \omega \\ \eta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \omega \\ \zeta \end{matrix} \right) & \left(R \begin{matrix} \omega \\ \omega \end{matrix} \right) \end{vmatrix}$$

ha proprietà invariantive (rispetto alle trasformazioni lineari del n. 6); il suo annullarsi è necessario e sufficiente affinchè la sfera sostegno del gruppo tetranomio appartenga al complesso dei punti sfere o affinchè le sfere ortogonali dei complessi del gruppo passino per uno stesso punto; diremo la funzione (23) *invariante del gruppo tetranomio* definito dai complessi $\xi_x = 0$, $\eta_x = 0$, $\zeta_x = 0$, $\omega_x = 0$.

Osservazione. — Non sarà inutile l'avvertire espressamente che quelli che noi denominammo invarianti non sono effettivamente invarianti del corrispondente gruppo, ma invarianti simultanei di questi gruppi e della quadrica dei punti, come risulta dalla restrizione che sempre facemmo sulla natura delle trasformazioni lineari da considerare (*).

(*) Se si volesse studiare lo spazio di sfere in connessione collo spazio di piani, invece di queste comparirebbero altre funzioni che meriterebbero il nome di invarianti, le quali però avrebbero carattere

36. Il complesso quadratico di sfere possiede una funzione avente proprietà invariantive per qualunque trasformazione lineare dello spazio di sfere; esso è il determinante della forma quadratica a_{xx} che ne forma il primo membro.

Quando esso s'annulla, il complesso diviene *speciale;* in questo caso è possibile determinare una sfera X tale che siano verificate le cinque equazioni:

$$a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+a_{i3}X_3+a_{i4}X_4+a_{i5}X_5=0 \qquad (i=1.2.3.4.5).$$

La sfera X è coniugata rispetto al complesso di qualunque sfera y: infatti moltiplicando l'i^{ma} di queste equazioni per y_i e addizionando le cinque equazioni analoghe, si trova:

$$a_{Xy}=0\ ,$$

e questa dimostra la proprietà enunciata (n. 26); segue poi:

Il complesso polare di una sfera qualunque rispetto ad $a_{xx}=0$ passa per X; tutte le sfere poste in uno stesso fascio contenente X hanno lo stesso complesso polare.

Sia x una sfera del complesso speciale: sarà

$$a_{xx}=0\ ;$$

inoltre si ha:

$$a_{xX}=a_{XX}=0\ ;$$

quindi, qualunque sia $\lambda:\Lambda$,

$$\lambda^2 a_{xx}+2\lambda\Lambda a_{xX}+\Lambda^2 a_{XX}=a_{\lambda x+\Lambda X}=0\ ,$$

e questa ci prova che *il complesso speciale contiene tutti i fasci di sfere che una sua sfera arbitraria determina colla sfera X.* Quindi il complesso speciale può generarsi mediante ∞^2 fasci aventi una sfera comune, in modo analogo a quello in cui un cono vien generato da una retta passante per un punto fisso.

Se y, è una sfera qualunque dello spazio per determinare le sfere del fascio $\Lambda X+\mu y$, che fanno parte del complesso serve l'equazione

$$\Lambda^2 a_{XX}+2\Lambda\mu a_{Xy}+\mu^2 a_{yy}=0\ ,$$

la quale, in virtù di ciò che precede ha per radice doppia $\mu=0$. Dunque *tutti i fasci che congiungono X alle sfere dello spazio hanno comune la sfera X contata due volte;* perciò diremo che X è la *sfera doppia del complesso speciale.*

---

invariantivo solo rispetto alle trasformazioni lineari dello spazio di sfere che mutano i piani in piani. P. e.: in un tale studio si darebbe il nome di invariante dal complesso lineare alla funzione

$$\begin{vmatrix} R_{11} & \cdot & R_{15} & \xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{51} & \cdot & R_{55} & \xi_5 \\ 1 & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

che col suo annullarsi dice che la sfera ortogonale del complesso $\xi_x=0$ è un piano-sfera.

Il complesso contiene due serie semplicemente infinite di reti. Per dimostrarlo si può osservare che si può sempre stabilire una corrispondenza proiettiva fra due complessi quadratici semplicemente speciali (cfr. n. 25), che pel complesso quadratico (semplicemente speciale) formato dalle sfere che hanno i centri in una data quadrica e sono ortogonali a una sfera fissa la proposizione sussiste, e concluderne quindi la verità generale.

Da ciò che si disse ora risulta che il primo dei complessi quadratici particolari, di cui abbiamo tenuto parola al n. 28, è *speciale:* del resto si può anche verificarlo calcolandone il discriminante.

37. I subdeterminanti di quarto ordine del determinante di a_{xx} non godono di proprietà invariantive rispetto al complesso $a_{xx}=0$; ma l'annullarsi di tutti questi subdeterminanti dà una specializzazione del complesso che si mantiene per trasformazioni lineari dello spazio di sfere. Diremo *doppiamente speciale* un complesso quadratico che goda di questa proprietà.

Un complesso doppiamente speciale ha un fascio di sfere doppie (v. n. prec.) *pel quale passano i complessi polari di tutte le sfere dello spazio. Tutte le sfere di una rete passante pel fascio di sfere doppie hanno lo stesso complesso polare. Le sfere del complesso sono distribuite in una schiera di ∞^1 reti passanti pel fascio di sfere doppie.*

Il secondo dei complessi quadratici particolari, di cui parlammo al n. 28, è doppiamente speciale: lo si può anche verificare dimostrando che i subdeterminanti di quarto ordine del suo determinante sono tutti nulli.

Quando finalmente si annullano tutti i subdeterminanti di terzo ordine del determinante di a_{xx}, il complesso quadratico $a_{xx}=0$ contiene una congruenza lineare di sfere doppie; tutte le sfere del complesso lineare che si ottiene congiungendo una sfera qualunque di $a_{xx}=0$ colla congruenza di sfere doppie, appartengono al dato complesso quadratico; per conseguenza questo si scinde in due complessi lineari passanti per la congruenza di sfere doppie.

38. Dati due complessi quadratici di sfere:

$$a_{xx}=0 \quad , \qquad b_{xx}=0 \quad ,$$

tutti i complessi quadratici passanti per la congruenza ad essi comune hanno equazioni della forma:

$$\lambda . a_{xx} + \mu . b_{xx} = 0 \quad ,$$

e costituiscono un gruppo binomio ovvero un *fascio di complessi quadratici.* I complessi polari di una sfera rispetto ai complessi del fascio costituiscono un gruppo binomio il cui sostegno si dirà *congruenza coniugata* della sfera considerata rispetto al fascio; i complessi polari delle sfere di un fascio rispetto a un fascio di complessi quadratici costituiscono un gruppo tetranomio il cui sostegno si dirà *sfera coniugata del fascio di sfere rispetto al fascio di complessi quadratici.*

Queste proposizioni possono servire di base a una teoria delle polarità rispetto a un fascio di complessi quadratici.

39. Il discriminante del complesso quadratico

$$\lambda a_{xx} + \mu b_{xx} = 0 \ ,$$

può scriversi per disteso così:

$$(24) \ldots\ldots \quad \Delta_{\lambda a+\mu b} = \Delta_a \lambda^5 + \Theta_a \lambda^4 \mu + \Phi_a \lambda^3 \mu^2 + \Phi_b \lambda^2 \mu^3 + \Theta_b \lambda \mu^4 + \Delta_b \mu^5$$

ove Δ_a e Δ_b sono i determinanti dei due complessi $a_{xx}=0$, $b_{xx}=0$ ed è

$$\Theta_a = \Sigma \pm b_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} + \ldots + \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} b_{55} \ ,$$

$$\Phi_a = \Sigma \pm b_{11} b_{22} a_{33} a_{44} a_{55} + \ldots + \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} b_{44} b_{55} \ ,$$

mentre Θ_b e Φ_b si ottengono da questi scambiando fra loro le lettere a, b.

I coefficienti delle potenze di λ e μ nella (24) sono invarianti simultanei dei due complessi $a_{xx}=0$, $b_{xx}=0$. Per determinare il significato geometrico del loro annullarsi premettiamo i due lemmi seguenti (*):

I. *Dati due complessi quadratici di sfere* A *e* B *è in generale possibile determinare un sistema di cinque sfere costituenti un sistema autoconiugato rispetto a uno dei complessi dati e di cui quattro sfere appartengano all'altro complesso.*

Prendiamo, infatti, in A una sfera arbitraria S_1 e cerchiamone il complesso polare C_1 rispetto a B; C_1 seca A in una congruenza quadratica composta di sfere coniugate ad S_1 rispetto a B. Prendiamo in essa ad arbitrio una sfera S_2 e cerchiamone il complesso polare C_2 rispetto a B; A_1, C_1, C_2 si secano in una serie quadratica tutta costituita di sfere coniugate ad S_1, S_2. Prendiamo infine in questa ad arbitrio una sfera S_3 e cerchiamone il complesso polare C_3 rispetto a B. A, C_1, C_2, C_3 hanno comune due sfere una delle quali diremo S_4. Le quattro sfere $S_1\, S_2\, S_3\, S_4$ appartengono al complesso A e sono due a due coniugate rispetto a B; se ad esse associamo la sfera S_5 coniugata rispetto a B del complesso da esse determinato otterremo un sistema di cinque sfere autoconiugato rispetto a B e di cui quattro sfere appartengono ad A. Il teorema enunciato resta così dimostrato.

Se si prende per sistema di riferimento l'insieme di cinque sfere che a due coniugate rispetto a un complesso di 2° grado l'equazione di questo conterrà evidentemente i soli quadrati delle variabili; se invece un complesso di 2° grado contiene l'i^{ma} sfera fondamentale nella sua equazione mancherà il termine in x_i^2. Per conseguenza la proposizione dimostrata può anche enunciarsi così:

(*) Per le ricerche analoghe nello spazio ordinario, vedi la memoria del Lüroth avente per titolo: *Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Fläche zweiter Ordnung* (Zeitschrift für Matematik und Physik, Bd. XIII, 1868, pag. 404).

Le equazioni di due complessi quadratici si possono in generale ridurre alla forma :

$$(25)\ldots\left\{\begin{array}{l}\sum_i a_{ii}x_i^2=0\\ b_{55}x_5^2+2\sum_{ik} b_{ik}x_i x_k=0\quad (ik \text{ combinazione binaria di } 1.2.3.4.5).\end{array}\right.$$

Analogamente si dimostra (cfr. l'oss. fatta al n. 31):

Dati due complessi quadratici di sfere A *e* B *è in generale possibile determinare un sistema di cinque sfere costituenti un sistema autoconiugato rispetto all'uno dei complessi dati e tali che quattro dei cinque complessi lineari determinati da quattro di esse tocchino l'altro.*

II. *Dati due complessi quadratici* A *e* B *si possono in generale trovare cinque sfere due a due coniugate rispetto a uno dei complessi dati e tali che nove dei dieci fasci che le congiungono due a due siano tangenti all'altro complesso.*

Per dimostrare questo teorema prendiamo ad arbitrio una sfera S e troviamone il complesso polare C rispetto ad A e costruiamo quel complesso quadratico speciale Γ che è costituito da tutti i fasci passanti per S e tangenti a B (n. 26). È chiaro che quattro sfere formanti con S un sistema della specie di cui parla il teorema dovranno giacere nella congruenza d'intersezione di C e Γ, dovranno essere due a due coniugate rispetto al complesso A e infine dovranno esser tali che cinque dei fasci che le congiungono due a due tocchino il complesso B. Siccome il complesso lineare di sfere C è uno *spazio lineare a tre dimensioni* i cui *punti* sono rappresentati dalle sfere e le tre congruenze quadratiche in esso contenute CA, CB, $C\Gamma$ sono tre *quadriche* generali di questo spazio, così la ricerca delle quattro sfere ultime nominate equivale alla seguente:

In uno spazio lineare a tre dimensioni sono date tre quadriche; determinare, se è possibile, un sistema di quattro punti posti su una delle quadriche, due a due coniugati rispetto a una seconda, e tali che cinque delle loro sei congiungenti tocchino la terza quadrica.

Potremo, senza nuocere alla generalità, supporre che lo spazio lineare sia precisamente lo spazio ordinario di punti: allora si vede che affinchè il problema proposto si possa risolvere, debbono essere verificate tre condizioni.

Infatti, prima di tutto, bisogna che le due prime quadriche siano in involuzione, e in questo caso vi sono ∞^3 tetraedri inscritti nella prima quadrica e autoconiugati rispetto alla seconda; affinchè uno di questi tetraedri abbia cinque spigoli tangenti alla terza quadrica, bisogna che siano soddisfatte cinque condizioni, dunque la posizione della terza quadrica rispetto alle prime due deve essere doppiamente speciale. Onde in totale le tre quadriche date debbono soddisfare a tre condizioni, come già si disse.

Ritornando ora allo spazio di sfere, vedremo che se si prende ad arbitraria la sfera S non si potranno in generale trovare le quattro sfere formanti con S un sistema della specie voluta; ma siccome ∞^4 sono i modi con cui può scegliersi S mentre

soltanto tre sono le condizioni a cui si deve soddisfare, così vi sarà un numero semplicemente infinito di sistemi di sfere per cui sono soddisfatte tutte le condizioni enumerate nel teorema: questo resta per conseguenza dimostrato.

Analogamente si dimostra che: *Dati due complessi quadratici si può determinare un sistema di cinque sfere due a due coniugate rispetto ad uno di essi e determinante tre a tre dieci reti di cui nove siano tangenti all'altro dei complessi dati.*

Ciò posto, supponendo ridotte le equazioni di due complessi quadratici alla forma (25), avremo:

$$\Theta_a = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, b_{55} \;;$$

ora se $\Theta_a = 0$ e Δ_a non è nullo, si deve avere

$$b_{55} = 0 \;:$$

epperò anche la quinta sfera fondamentale appartiene al complesso B. Dunque *l'invariante simultaneo* Θ_a *col suo annullarsi dice esservi un sistema di cinque sfere appartenenti al complesso* B *e due a due coniugate rispetto ad* A.

Analogamente si dimostrerebbe che *quando* Θ_a *è nullo vi è un sistema di cinque complessi lineari tangenti al complesso* A *e due a due coniugati rispetto a* B.

L'invariante simultaneo Θ_b è suscettibile d'un'interpretazione analoga.

Supponendo ora che le equazioni dei due complessi quadratici siano:

$$\sum_i a_{ii}\, x_i^2 = 0 \;; \qquad \sum_{ik} b_{ik}\, x_i x_k = 0 \;,$$

avremo:

$$\Phi_a = \Sigma\,(b_{ii}\, b_{kk} - b_{ik}^2)\, a_{ll}\, a_{mm}\, a_{nn} \;.$$

Osservando ora che la condizione necessaria e sufficiente affinchè il fascio determinato dalle sfere i^{ma} e k^{ma} tocchi il complesso B è che sia $b_{ii}\, b_{kk} - b_{ik}^2 = 0$ e tenendo presente il secondo dei lemmi dimostrati, vedremo che è sempre lecito supporre nulli nove dei dieci determinanti analoghi a $b_{ii}\, b_{kk} - b_{ik}^2$. Supposte soddisfatte queste relazioni, e supponendo Δ_a diverso da zero e $\Phi_a = 0$, dedurremo che dev'esser nullo anche il rimanente di quei dieci determinanti, cioè il complesso B toccherà tutti dieci i fasci determinati dalle cinque sfere due a due coniugate rispetto ad A. Dunque: *L'invariante simultaneo* Φ_a *col suo annullarsi indica esservi un sistema autoconiugato rispetto ad* A *e tale che i dieci fasci determinati dalle sfere che lo costituiscono toccano il complesso* B.

In modo analogo si dimostra che *quando* Φ_a *è nullo, vi è un sistema di complessi lineari due a due coniugati rispetto a* B *e le cui dieci congruenze di intersezione toccano* A.

Analogamente s'interpreta l'invariante Φ_b.

40. Nel caso particolare in cui uno dei due complessi quadratici coincida col complesso dei punti-sfere, gl'invarianti simultanei di cui ora parlammo diventano funzioni che godono di proprietà invariantive, rispetto all'altro complesso, per tutte le trasformazioni lineari del n. 6.

Così Θ_a e Θ_b col loro annullarsi annunciano l'esistenza di cinque punti-sfere due a due coniugati rispetto al complesso di cinque sfere del complesso due a due ortogonali; invece Φ_a e Φ_b s'annullano se vi è un sistema di cinque sfere a due a due ortogonali e congiunte da fasci tangenti al dato complesso o se vi è un sistema di cinque sfere a due a due tangenti e coniugate rispetto al complesso.

41. Se si determina (n. 29) l'equazione di condizione a cui deve soddisfare un complesso lineare $\xi_x = 0$ per essere tangente al complesso $\lambda a_{xx} + \mu b_{xx} = 0$ si trova l'equazione:

$$\left(\lambda a + \mu b \begin{matrix} \xi \\ \xi \end{matrix}\right) = 0 \ ;$$

siccome questa è di quarto grado in $\lambda : \mu$ così *vi sono quattro complessi quadratici di un fascio, tangenti a un complesso lineare arbitrario.* Se si ordina quest'equazione secondo le potenze di λ e μ si trova che i coefficienti di λ^4 e μ^4 sono i primi membri delle equazioni dei complessi $a_{xx} = 0$, $b_{xx} = 0$ in coordinate di complessi lineari, e queste funzioni sono *contravarianti* di questi complessi quadratici; i coefficienti delle altre potenze di λ e μ saranno *contravarianti simultanei* dei due dati complessi, i quali diverranno *contravarianti di uno dei due complessi* se l'altro coincide con quello de' punti-sfere.

Dalle altre equazioni date nel n. 30 si deduce *esservi in un fascio di complessi quadratici tre complessi tangenti a una congruenza lineare e due tangenti a un fascio di sfere;* si potranno poi dedurre coll'aiuto delle stesse equazioni del numero 28, e col metodo indicato or ora altre funzioni che meritano il nome di contravarianti.

42. *In un fascio di complessi quadratici vi sono in generale cinque complessi speciali* (n. 36); essi corrispondono ai valori di $\lambda : \mu$ che soddisfano l'equazione di 5° grado:

$$(26) \ldots \quad 0 = \Sigma \pm (\lambda a_{11} + \mu b_{11})(\lambda a_{22} + \mu b_{22})(\lambda a_{33} + \mu b_{33})(\lambda a_{44} + \mu b_{44})(\lambda a_{55} + \mu b_{55}) \ ,$$

essendo al solito $a_{xx} = 0$ e $b_{xx} = 0$ le equazioni dei due complessi che determinano il fascio.

Le sfere doppie dei cinque complessi speciali sono determinate, per ognuna delle radici $\lambda : \mu$ dell'equazione (26), dal seguente sistema di equazioni:

$$\sum_k (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) X_k = 0 \ , \qquad (i = 1.2.3.4.5) \ .$$

Ora alle stesse equazioni si giunge risolvendo la questione:

Determinare, se è possibile, una sfera avente lo stesso complesso polare rispetto a tutti i complessi del fascio:

$$l\, a_{xx} + m\, b_{xx} = 0 \ .$$

Infatti, affinchè una sfera X soddisfi alle condizioni imposte, basterà che abbia lo stesso complesso polare rispetto a due qualunque dei complessi del fascio, per esempio rispetto ai due complessi $a_{xx}=0$, $b_{xx}=0$. Ora le coordinate dei complessi polari di X rispetto a questi complessi quadratici sono rispettivamente [v. eq. (11)]:

$$\sum_k a_{ik} X_k \ , \qquad \sum_k b_{ik} X_k \qquad (i=1.2.3.4.5) \ ,$$

e affinchè coincidano si deve avere:

$$\sum_k (\lambda\, a_{ik}+\mu\, b_{ik})\, X_k=0 \qquad (i=1.2.3.4.5) \ .$$

Eliminando le X fra queste cinque equazioni lineari omogenee, si ricade nella equazione (26); ai cinque valori di $\lambda:\mu$ che soddisfano la (26) corrispondono cinque sfere che coincidono, come si era enunciato, colle sfere doppie dei cinque complessi speciali del fascio, e che hanno lo stesso complesso polare rispetto a tutte le quadriche del fascio.

Chiamiamo $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5$ le cinque sfere così ottenute; il complesso C_1 polare di S_1 rispetto al fascio, dovendo essere anche complesso polare di S_1 rispetto al complesso speciale di cui S_2 è la sfera doppia, dovrà (n. 36) passare per S_2; per le stesse ragioni dovrà passare per S_3, S_4, S_5. Dunque potremo dire:

Se in un fascio di complessi quadratici vi sono cinque complessi quadratici speciali, quattro qualunque delle sfere doppie di questi determinano un complesso lineare che è polare della quinta sfera doppia rispetto a tutti i complessi quadratici del fascio.

Questo sistema di cinque sfere è dunque (n. 26) autoconiugato rispetto ad ognuno dei complessi del fascio, epperò si dirà *autoconiugato* rispetto al fascio.

Se, in particolare, uno dei complessi quadratici del fascio è quello dei punti-sfere, queste cinque sfere sono a due a due ortogonali; esse sono le uniche sfere che siano ortogonali ai loro complessi polari rispetto a uno qualunque dei complessi quadratici del fascio.

L'ultimo teorema dimostrato suppone però che l'equazione (26) abbia tutte le sue radici distinte; ciò non accade sempre, perchè anzi vi sono casi in cui i cinque complessi quadratici speciali del dato fascio vengono a coincidere in tutto o in parte, e così vi sono altri casi in cui nel fascio esistono complessi doppiamente speciali o degenerati in due complessi lineari; a queste diverse particolarità dei complessi speciali del fascio, ne corrispondono altrettante della congruenza di quarto grado ad essi comune; lo studio delle varie specie di queste è intimamente legato allo studio di quelli, come risulterà ancor meglio da quanto esporremo nel seguente capitolo.

§ 4. *La ciclide considerata come luogo de' punti-sfere di un complesso quadratico di sfere.*

43. *Il luogo dei punti-sfere di un complesso quadratico di sfere è una superficie di quarto ordine avente per linea doppia il cerchio imaginario all'infinito.*

Consideriamo infatti una rete speciale di sfere costituita da tutte le sfere aventi i centri su una data retta r; r è il luogo dei punti-sfere della rete. Ora una rete ha comuni quattro elementi colla congruenza d'intersezione di due complessi quadratici (n. 17), dunque su r vi saranno quattro punti-sfere di un qualunque complesso di 2° grado; dunque il luogo dei punti-sfere d'un complesso di 2° grado è una superficie di 4° ordine.

Se invece consideriamo una rete qualunque, il luogo dei suoi punti-sfere è un circolo, e lo stesso ragionamento fatto or ora ci prova che il luogo dei punti-sfere di un complesso quadratico è secato da un cerchio qualunque in quattro punti.

Ora, affinchè una superficie di quarto ordine abbia comune con qualunque circolo quattro soli punti a distanza finita è necessario e sufficiente che essa abbia per linea doppia il cerchio imaginario all'infinito; dunque la proposizione è dimostrata (*).

Le superficie di questa specie furono considerate per la prima volta da Darboux (**) et Moutard (***), che le indicarono, il primo col nome di *ciclidi*, il secondo col nome di *superficie anallagmatiche di 4° ordine.* Noi le daremo la denominazione proposta dal Darboux e che è generalmente adottata (****).

(*) Collo stesso metodo si dimostrano i teoremi più generali. *Il luogo dei punti-sfere di un complesso di ordine* m *è una superficie d' ordine* 2m *avente il cerchio imaginario all' infinito per linea* m-pla. — *Il luogo dei punti-sfere d'una congruenza dell'ordine* m *è una curva di ordine* 2 m.

(**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.*, t. LXVIII, pag. 1311. Cf. t. LIX, pag. 241.

(***) *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Nouv. Annales, II série, t. V, p. 306). *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* (Ibid., pag. 536).
Cf. *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.* T. LIX, pag. 243.

(****) Dello stesso teorema (fondamentale per le ricerche seguenti) si può dare una dimostrazione analitica che ora esporrò quantunque non sia come quella data nel testo di pura geometria della sfera.

Avendo precedentemente dimostrato (n. 11) che le coordinate x_i d'un punto sono proporzionali alle sue potenze rispetto a cinque sfere, il teorema che si tratta di provare può enunciarsi così: *Se* x_i *sono i primi membri delle equazioni di cinque sfere ed* f *una funzione quadratica, l'equazione* $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5) = 0$ *rappresenta una ciclide.* — Invece di dimostrare questa proposizione noi dimostreremo l'altra che la comprende:

Se x_i sono i primi membri delle equazioni di cinque quadriche qualunque passanti per la conica in cui il piano $\xi_y = 0$ seca la quadrica $Q = 0$ l'equazione $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5) = 0$, quadratica nelle x_i, rappresenta una superficie di quarto ordine avente per linea doppia quella conica.

Infatti se $\alpha_{y^{(i)}}$ è una funzione lineare delle coordinate y di un punto, per le ipotesi fatte si potrà porre:

$$x_i = Q + \alpha_{y(i)}\, \xi_y$$

e trasformare l'equazione della superficie nella seguente:

$$f(Q + \alpha_{y^{(i)}}\, \xi_y) = 0.$$

Ora quest'equazione sviluppata secondo le potenze di Q, può scriversi

$$k_0\, Q^2 + k_1\, Q\, \xi_y + k_2\, \xi_y^2 = 0,$$

44. Collo stesso ragionamento con cui si dimostrò il teorema del n. prec., si dimostra la proposizione seguente:

L'inviluppo dei piani-sfere di un complesso quadratico è u quadrica (*).

L'equazione di questa quadrica si può ottenere sotto cinque forme diverse in coordinate tetraedriche di piani; infatti se

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad ,$$

è l'equazione del complesso quadratico dato, l'inviluppo dei suoi piani-sfere è rappresentato dalle due equazioni:

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad ; \qquad \sum_k x_k = 0 \quad .$$

Eliminando fra queste equazioni successivamente una delle x e rammentando quanto si disse alla fine del n. 12, vedremo che i risultati ottenuti rappresentano quella stessa quadrica rispetto ai cinque tetraedri determinati dai centri delle cinque sfere $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5$ presi quattro a quattro.

45. Ciò posto consideriamo uno dei complessi semplicemente speciali, che (n. 40) contengono la ciclide; sia S la sfera doppia di questo complesso e Q la quadrica inviluppata dai suoi piani (n. prec.). Sia τ un piano tangente qualunque di Q; il complesso considerato contiene la sfera S e il piano τ e quindi (n. 34) contiene tutte le sfere del fascio $S\tau$. In particolare essa conterrà i due punti-sfere di questo fascio, i quali appartengono alla ciclide. Gli ∞^2 piani tangenti di Q dànno in questo modo gli ∞^2 punti della superficie. Questa può dunque generarsi in questo modo, mediante la sfera S e la quadrica Q; epperò potremo concludere l'importante teorema:

La ciclide può definirsi come l'insieme degli ∞^2 punti-sfere dei fasci che una sfera fissa (sfera direttrice) determina coi piani tangenti di una quadrica data (quadrica deferente) (**).

---

ove k_i è una funzione di grado i nelle y; la forma di quest'equazione mostra subito che la linea

$$\xi_y = 0 \ , \qquad Q = 0$$

è doppia per la superficie rappresentata, dunque ecc. Ogni quadrica passante per la conica doppia

$$Q - \xi_y\, \alpha_y = 0$$

seca la superficie ancora nella quartica gobba di 1ª specie

$$Q - \xi_y\, \alpha_y = 0 \ ; \quad k_0\, \alpha_y^2 + k_1\, \alpha_y + k_2 = 0 \ .$$

(*) In generale: *L'inviluppo dei piani-sfere di un complesso di sfere d'ordine* m *è una superficie di classe* m.

La sviluppabile dei piani-sfere d'una congruenza dell'ordine m *è di classe* m.

(**) Adottiamo le denominazioni introdotte dal De La Gournerie nel suo *Mémoire sur les lignes sphériques* (Journal de Mathématiques de M. Liouville, 2e série, t. XIV, 1869).

Dal teorema ora dimostrato nel testo si deduce, che la ciclide corrispondente alla sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ ,$$

46. Una conseguenza del teorema ora dimostrato è il seguente:

Ogni ciclide si muta in se stessa se assoggettata ad una trasformazione per raggi reciproci il cui centro e la cui potenza siano rispettivamente il centro e il quadrato del raggio della sfera doppia di uno dei complessi speciali contenente la ciclide stessa.

Per dimostrarlo rammentiamo che date due sfere di centri O, O' e raggi r, r', i punti-sfere del loro fascio sono (n. 6, nota) i punti doppi dell'involuzione determinata dalle sfere del fascio sulla linea dei centri, epperò chiamandoli M, N avremo:

$$OM \, . \, ON = r^2 .$$

Segue da questa relazione che una trasformazione pei raggi reciproci di centro O e potenza r^2 muta in se stesse tutte le coppie di punti sfere dei fasci di cui fa parte la sfera direttrice; donde e dal teorema del n. prec. risulta la proposizione enunciata.

47. Consideriamo tre punti infinitamente vicini $P_1\ P_2\ P_3$ della quadrica deferente individuanti un piano π (tangente alla quadrica). Le sfere $S_1\ S_2\ S_3$ di centri $P_1\ P_2\ P_3$ e ortogonali alla sfera direttrice S, determinano una rete di sfere, composta di sfere ortogonali a π e ad S cioè passanti pei punti-sfere del fascio $S\pi$. Quindi le sfere $S_1\ S_2\ S_3$ passano pei punti-sfere A_1 e A_2 del fascio $S\pi$. Ma se consideriamo l'inviluppo d'una sfera il cui centro percorre la quadrica deferente ed è ortogonale alla sfera S, S_1, S_2, S_3, ne sono tre posizioni consecutive ed A_1, A_2 sono due punti dell'inviluppo. Siccome il luogo dei punti analoghi ad $A_1\ A_2$ è la ciclide definita dalla sfera S e dalla quadrica data, così possiamo concludere:

Una ciclide può considerarsi come l'inviluppo delle ∞^2 sfere i cui centri stanno su una quadrica (quadrica deferente) e che sono ortogonali a una sfera fissa (sfera direttrice). La quadrica è l'inviluppo dei piani di uno dei complessi quadratici speciali che contengono la ciclide; la sfera è la sfera doppia di questo.

Nel caso più generale la ciclide può generarsi in cinque modi colle leggi espresse nei teoremi di questo numero e del n° 45; in casi speciali particolari queste generazioni si modificano, come vedremo nel n. 49. Ma intanto cerchiamo le relazioni esistenti fra i varii modi descrivere una ciclide. Tali relazioni sono espresse dal teorema:

Le sfere direttrici dei varii modi di generare una ciclide come inviluppo di una sfera, sono fra loro ortogonali, le quadriche deferenti sono omofocali.

---

e alla quadrica rappresentata in coordinate di piani dall'equazione

$$0 = A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{31}\zeta\xi + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{14}\xi + 2A_{24}\eta + 2A_{34}\zeta + A_{44} ,$$

ha per equazione in coordinate cartesiane:

$$A_{44}(x^2+y^2+z^2+r^2)^2 - 4(x^2+y^2+z^2+r^2)(A_{14}x + A_{24}y + A_{34}z) +$$
$$+ A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 4A_{23}yz + 2A_{31}zx + 2A_{12}xy = 0 .$$

La prima parte di questa proposizione fu già dimostrata (n. 40 al fine); per provare la seconda rammentiamo che le quadriche deferenti sono gl'inviluppi dei piani dei complessi speciali contenenti la ciclide e che questa è il luogo dei punti-sfere di ciascuno dei complessi speciali stessi. Per conseguenza tutte quelle quadriche avranno per piani tangenti comuni, tutti quelli che debbono eziandio annoverarsi fra i punti, cioè i piani tangenti all'assoluto; tali quadriche hanno dunque comune la sviluppabile circoscritta a una di esse e all'assoluto, epperò sono omofocali.

Sia M un punto d'una quadrica deferente, a cui corrisponda un punto P della ciclide posto sull'assoluto; sia μ il piano tangente in M alla deferente, O il centro della corrispondente sfera direttrice. In generale il piano μ e la retta OP sono ortogonali (cioè coniugati rispetto all'assoluto); nel caso nostro siccome P sta sull'assoluto, μ sarà ad esso tangente; d'altronde MP è in generale normale in P alla ciclide, quindi nel caso in discorso μ sarà (perpendicolare in P alla normale in P cioè) tangente alla ciclide in P. Si vede quindi che ognuno dei piani tangente alla ciclide in punti all'infinito, tocca anche ognuna delle quadriche deferenti, e che, per conseguenza la sviluppabile formata da quelli coincide colla sviluppabile in cui sono inscritte queste. Ciò permette di concludere:

La sviluppabile formata dai piani tangenti alla ciclide nei suoi punti all'infinito è di quarta classe.

48. Consideriamo la ciclide come generata nel modo indicato al n. prec. Tutte le sfere generatrici sono bitangenti alla superficie (cioè la secano in due cerchii) hanno i loro centri sulla quadrica deferente Q e sono ortogonali alla sfera fissa S. Prendiamo in particolare un punto all'infinito I di Q e il corrispondente piano tangente α; la sfera generatrice di centro I riducesi (al piano all'infinito e) al piano λ condotto dal centro di S alla retta che segna la direzione in cui I è andato all'infinito. Tutti i piani analoghi a λ inviluppano un cono quadrico supplementare del cono assintoto di Q e sono piani bitangenti della ciclide. Nel caso più generale vi sono cinque coni analoghi a questo; essi si sogliono chiamare (da uno de' suoi scopritori (*)) *coni di Kummer* e costituiscono la completa sviluppabile bitangente della superficie.

Le curve d'intersezione di ogni sfera direttrice colla corrispondente quadrica deferente sono quartiche sferiche di prima specie, le quali chiameremo (con Darboux) *cicliche*, e sono ciascuna il luogo di punti-sfere bitangenti alla superficie, cioè sono curve focali della superficie.

Per dimostrare che non vi sono altre curve focali si può far uso della generazione della ciclide esposta al n. prec. Da essa infatti risulta che affinchè un cerchio di raggio nullo sia bitangente alla ciclide è necessario e sufficiente che il suo centro cada in una sfera direttrice e nella corrispondente quadrica deferente; ora, per ciò che precede, le sfere direttrici sono le sfere doppie dei complessi quadratici speciali

(*) Zeuthen fece notare nella prefazione alla sua memoria *Om Flader of fjerde orden med Dobbelkeglesnit* (Kopenhaghen, 1879) che tali coni furono scoperti contemporaneamente da Kummer e da Moutard, perchè la memoria di questo pubblicata nelle *Nouvelles Annales* del 1864 è indipendente dalla comunicazione fatta da quello all'Accademia delle scienze di Berlino il 16 Luglio dello stesso anno.

contenuti nel fascio di cui è sostegno la data ciclide e le quadriche deferenti sono gl'inviluppi dei piani-sfere dei detti complessi speciali, dunque in generale le cicliche già determinate sono le uniche curve focali.

Concludiamo pertanto *la ciclide più generale ha cinque cicliche focali.*

Siccome i coni di Kummer sono supplementari dei coni assintoti delle quadriche deferenti i quali sono (come le quadriche stesse) omofocali, così essi sono omociclici, cioè hanno comuni quattro punti sull'assoluto. Questi sono punti cuspidali della superficie; dunque:

La ciclide ha in generale quattro punti cuspidali sulla sua curva doppia (*).

49. Facciamo ora un cenno delle modificazioni che subiscono i teoremi precedenti in alcuni casi particolari.

a) Quando due delle sfere direttrici vengono a coincidere in un punto-sfera P, tutti i fasci di sfere che P determina coi piani tangenti della quadrica deferente, hanno per punti-sfere P e i suoi simmetrici rispetto ai piani tangenti di questa; epperò la ciclide è in questo caso omotetica rispetto a P della podaria di questo punto rispetto alla quadrica deferente, ed ha P per punto singolare.

Le altre tre sfere direttrici passano per P e sono a due a due ortogonali; le corrispondenti quadriche deferenti passano per P; ognuna tocca in P la sfera direttrice, che le è compagna. Donde segue che tre delle cicliche focali hanno in P un punto singolare.

In questo caso si hanno tre coni di Kummer generali e uno di specie particolare avente il suo centro in P. Per riconoscere quale particolarità presenta quest'ultimo consideriamo un suo piano tangente qualunque τ; esso tocca la ciclide in due punti, onde la ciclica piana (quartica piana avente per punti doppii i punti ciclici) si scinde in due cerchii; ma di più, siccome ogni piano per P seca la ciclide in una curva che ha un punto doppio in P, o uno di questi cerchii si scinde in due rette incrociate in P, il che trarrebbe seco l'esistenza sulla superficie di infinite rette uscenti da P, ciò che non accade, perchè in generale la superficie non degenera; ovvero ogni piano τ dovrà secare la superficie in due cerchi aventi in P un punto comune. Il cono considerato ha dunque per piani tangenti, piani che toccano effettivamente una sola volta la superficie, epperò il cono speciale considerato non è effettivamente inviluppato da piani bitangenti; lo diremo *cono straordinario.*

b) *Quando la ciclide è contenuta in un complesso di sfere doppiamente speciale* (n. 37), *l'inviluppo dei piani-sfere di questo è una conica.* Infatti un complesso quadratico doppiamente speciale contiene una schiera di ∞ reti, ognuna delle quali contiene un fascio di piani-sfere; gli ∞^2 piani del complesso di 2° grado sono dunque distribuiti una sola volta in ∞ fasci, donde segue che il loro inviluppo si riduce a una conica.

(*) Darboux, l. c., pag. 111.

In questo caso si ottiene una generazione assai semplice della superficie, colla considerazione seguente. La superficie è, nel caso in discorso, il luogo dei punti-sfere di ∞ reti di sfere aventi un fascio comune (il fascio di sfere doppie del complesso doppiamente speciale) cioè il luogo di ∞ cerchii. Tutti questi cerchii hanno comuni due punti (i punti-sfere del fascio di sfere doppie) che saranno doppii per la superficie; i loro piani faranno fascio attorno alla congiungente di questi. Ma d'altronde i loro piani devono essere perpendicolari al piano della *conica* (fissa che per analogia diremo) *deferente* e i loro centri stare su questo, dunque quei due punti-sfere devono essere simmetrici rispetto al piano della conica deferente. Donde la seguente generazione:

Data una conica Γ *in un piano* π *e due punti* A_1, A_2 *simmetrici rispetto a* π, *si trovi la podaria* Π *di* Γ *relativa al punto* P *in cui la retta* $A_1 A_2$ *seca* π; *il luogo dei cerchii aventi i centri in* Π *e passanti per* A_1 *e* A_2 *è una ciclide avente* A_1 *e* A_2 *per punti doppii.*

È evidente che in questo caso la ciclide può riguardarsi anche come generata da una sfera il cui centro percorre la conica deferente e che è ortogonale a una sfera qualunque del fascio determinato dai suoi due punti doppii.

Le altre tre sfere direttrici passano per A_1 e A_2 e sono a due a due ortogonali; le tre quadriche deferenti hanno per conica focale la conica deferente e toccano in A_1 e A_2 le corrispondenti sfere direttrici, epperò tre delle cicliche focali sono ridotte a coppie di cerchii. I punti in cui la conica deferente seca il cerchio-base del fascio di cui A_1 e A_2 sono punti-sfere (cerchio che sta sul piano della conica perchè A_1. A_2 sono simmetrici rispetto a questo) sono *fuochi della ciclide* nel senso che da essi partono coni che toccano la ciclide lungo tutta una conica e sono circoscritti all'assoluto.

Alle tre sfere direttrici di cui ora si è parlato corrispondono tre coni di Kummer; quanto agli altri due essi vengono sostituiti da due piani tangenti singolari, da due piani, cioè, ognuno dei quali che tocca la superficie secondo un cerchio; essi sono i piani condotti dalla retta $A_1 A_2$ perpendicolarmente agli assintoti della conica deferente: ciò risulta dal modo con cui la generazione della ciclide si modifica nel caso particolare di cui trattiamo (*).

(*) Si può confermare questo risultato direttamente nel seguente modo:

Sia
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
la conica deferente, e
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$$
l'equazione del cerchio base del fascio al quale sono ortogonali le sfere generatrici della superficie. Le coordinate del centro d'una qualunque sfera generatrice sono:
$$a \cos \varphi, \quad b \operatorname{sen} \varphi$$
epperò l'equazione d'una sfera generatrice qualunque è:
$$\text{(I)} \; \ldots\ldots \qquad (\alpha - x)\, a \cos \varphi + (\beta - y)\, b \operatorname{sen} \varphi = \frac{\lambda^2 - r^2}{2}$$
avendo posto per brevità
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ; \qquad \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = \lambda^2 .$$

c) Se due coppie di sfere vengono a coincidere in punti-sfere come in *a)* le particolarità esposte si ripetono per ciascuna coppia; così se la ciclide è contenuta in due complessi di sfere doppiamente speciali, per ognuno di questi si verifica quanto si disse in *b)*; notiamo finalmente che per ciò che concerne i piani tangenti singolari, ciò che si disse in *b)* è sempre vero anche se i punti doppii A_1 e A_2 coincidono in un punto (che è biplanare per la superficie).

50. Un'altra proprietà importante della superficie che studiamo è espressa dal teorema:

Una ciclide generale contiene sedici rette.

Per dimostrarlo consideriamo due sezioni piane qualunque S_1 S_2 della superficie e chiamiamo C il cerchio imaginario all'infinito. La rigata costituita dalle rette appoggiate a S_1, S_2, C è di grado $2.\ 2.\ 4.\ 4 = 4^3$; volendo considerare solo le rette appoggiate in punti distinti alle tre curve bisognerà escludere:

a) I quattro coni quadrici che proiettano C dai punti comuni a S_1 e S_2;

b) I quattro coni quartici che proiettano S_1, S_2 risp. dai punti all'infinito di S_2, S_1 contati due volte ciascuno, e rimarrà una rigata R di 24° grado, per la quale C, S_1, S_2 saranno multiple risp. secondo 12, 4, 4.

Una terza sezione piana S_3 della ciclide seca R in $4 . 24$ punti; di questi $2 . 12$ sono assorbiti dai punti all'infinito di S_3, $4 . 4$ dalle intersezioni di S_3 e S_1, e $4 . 4$ dalle intersezioni di S_3 e S_2. Per ognuno dei rimanenti 16 punti d'intersezione di R con S_3 passa una retta appoggiata a C, S_1, S_2, S_3; ciascuna di queste ha comuni cinque punti colla ciclide quindi giace su di essa. Ora siccome ogni retta della ciclide deve incontrare ogni sua sezione piana, così è evidente che il metodo indicato deve porgere tutte le rette esistenti sulla superficie, epperò il teorema enunciato resta dimostrato.

L'equazione della ciclide si avrà eliminando φ fra la (I) e la sua derivata rispetto a φ:

$$\text{(II)} \ldots\ldots \qquad (\beta - y)\, b \cos\varphi - (\alpha - x)\, a \operatorname{sen}\varphi = 0 \,.$$

Dalle (I) (II) segue:

$$\cos\varphi = \frac{a}{2}\frac{\lambda^2 - r^2}{a^2(\alpha - x)^2 + b^2(\beta - y)^2}(\alpha - x)\,; \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{2}\frac{\lambda^2 - r^2}{a^2(\alpha - x)^2 + b^2(\beta - y)^2}(\beta - y)\,,$$

donde si ha finalmente l'equazione della superficie sotto la forma:

$$\text{(III)} \ldots\ldots \qquad 4\left\{ a^2(\alpha - x)^2 + b^2(\beta - y)^2 \right\} = \left\{ \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 - (x^2 + y^2 + z^2 \right\})^2$$

Quest'equazione ci prova che i due piani

$$a(\alpha - x) \pm i\, b\, (\beta - y) = 0$$

toccano la superficie lungo i cerchii in cui essi secano la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2$$

Dunque *la ciclide con due punti doppii ha due piani tangenti singolari; essi sono i piani condotti per la congiungente i punti doppii perpendicolarmente agli asintoti della conica deferente. Le coniche di contatto sono le intersezioni di questi piani colla sfera concentrica alla conica deferente e ortogonale alle sfere del fascio dato.*

Tutto ciò sussiste anche quando sia $\rho = 0$.

In modo analogo, notando che la rigata costituita dalle rette appoggiate in punti distinti a una retta r della superficie, a una sua sezione piana S e all'assoluto C è di 6° grado e ha r, S, C per linee multiple, secondo 3, 1, 3, si conclude che:

Ogni retta della ciclide è incontrata da altre cinque che a due a due non si secano.

Avendo presente la configurazione formata dalle rette di una superficie cubica, è facile dedurre da ciò:

La disposizione delle rette d'una ciclide è identica a quella delle rette d'una superficie di 3° ordine che incontrano una sua conica. Vedremo più innanzi (n. 67) come la teoria delle trasformazioni razionali nello spazio possa servire a chiarire questo fatto.

Finalmente, siccome la rigata costituita dalle rette appoggiate in punti distinti a C, a una conica Γ della ciclide e a una sua sezione piana S è di 12° grado e ha C, Γ, S per linee multiple degli ordini 6, 4, 2, così si conclude:

Ogni conica della ciclide è incontrata da otto rette della superficie.

Osserviamo ancora che se la superficie ha un punto conico D, i coni che proiettano da D il cerchio imaginario all'infinito e una sua sezione piana, hanno otto generatrici comuni; quattro di esse sono assorbite dalle congiungenti D coi punti all'infinito della sezione piana, le altre quattro hanno comuni colla superficie più di quattro punti; ne segue che:

Se una ciclide ha un punto doppio, per esso passano quattro rette della superficie.

E con ragionamenti analoghi ai precedenti si prova che:

Se la ciclide ha un punto conico, essa ha solo otto rette non passanti pel punto singolare; ognuna delle rette uscenti dal punto doppio incontra due delle altre; ognuna di queste ultime è secata (oltrechè da una retta uscente dal punto doppio) da tre altre rette. Risulta così manifesto che ogni retta uscente da un punto conico equivale a due delle rette che avevansi nel caso generale.

In modo analogo si studiano i casi in cui si presentano singolarità maggiori (*).

§ 5. *Sistema di ciclidi omofocali.*

51. Siano dati due complessi quadratici di sfere A, B aventi per equazioni:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 \ , \quad \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \ ,$$

(*) Il metodo usato per dimostrare questi teoremi si raccomanda per la sua semplicità; se non erriamo, gli è ad esso che alludeva lo STURM, a p. 250 del vol. IV dei *Mathematische Annalen* colle parole: *Mit Hilfe geradliniger Flächen.*

Prendiamo ad arbitrio una sfera y nel primo, sicchè si abbia:

$$(a) \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_{ik} a_{ik} y_i y_k = 0 \ ,$$

e troviamo il complesso lineare tangente in y ad A. Le sue coordinate ξ saranno date da

$$\xi_k \equiv \sum_i a_{ki} y_i \qquad (i, k = 1.2.3.4.5) \ .$$

Poi di questo troviamo la sfera x polare rispetto a B; essa sarà determinata dalle equazioni:

$$(b) \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_i a_{ki} y_i = \sum_i b_{ki} x_i \qquad (i, k = 1.2.3.4.5) \ ,$$

eliminando le y fra le (a) (b) otterremo l'equazione a cui soddisfano tutte le sfere x. Ora, moltiplicando la k^{ma} delle (b) per y_k, e addizionando le cinque equazioni analoghe otterremo, tenendo presente la (a):

$$(c) \ldots\ldots\ldots \qquad \sum_k y_k \sum_i b_{ki} x_i = 0 \ ,$$

e l'eliminazione delle y si potrà fare fra le (b) e la (c). Il risultato si ottiene immediatamente sotto la forma:

$$(26) \ldots\ldots \qquad 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{15} & \sum_i b_{1i} x_i \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{25} & \sum_i b_{2i} x_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} & \cdot & \cdot & a_{55} & \sum_i b_{5i} x_i \\ \sum_i b_{i1} x_i & \sum_i b_{i2} x_i & \cdot & \cdot & \sum_i b_{i5} x_i & 0 \end{vmatrix} \ .$$

Questa equazione rappresenta l'insieme delle sfere x polari rispetto a B dei complessi tangenti ad A; questo insieme è dunque un complesso quadratico che diremo *polare* di A rispetto a B, e indicheremo col simbolo C_{AB}. Si potrebbe dimostrare che C_{AB} è anche l'inviluppo dei complessi polari rispetto a B delle sfere di A e che quindi la sua equazione in coordinate di complessi lineari è:

$$(27) \ldots\ldots \qquad 0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{15} & \sum_i \beta_{1i} \xi_i \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{25} & \sum_i \beta_{2i} \xi_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \cdot & \cdot & \alpha_{55} & \sum_i \beta_{5i} \xi_i \\ \sum_i \beta_{i1} \xi_i & \sum_i \beta_{i2} \xi_i & \cdot & \cdot & \sum_i \beta_{i5} \xi_i & 0 \end{vmatrix} \ ,$$

essendo al solito:

$$\sum_{ik} \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \ , \qquad \sum_{ik} \beta_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \ ,$$

le equazioni dei complessi quadratici dati, pure in coordinate di complessi lineari.

Scambiando fra loro i due complessi dati si otterrebbe un quarto complesso quadratico C_{BA} luogo delle sfere polari, rispetto ad A, dei complessi lineari tangenti a B o inviluppo dei complessi polari, rispetto ad A, delle sfere di B.

52. Consideriamo il sistema autoconiugato comune ad A e B; ne siano S_1, S_2 due sfere qualunque e C_1, C_2 i corrispondenti complessi polari. Nel fascio di sfere S_1 S_2 vi sono due sfere A_1, A_2 appartenenti al complesso A e formanti con S_1, S_2 un fascio armonico; ad essi corrispondono due complessi lineari polari rispetto a B che chiameremo K_1, K_2. Siccome S_1, S_2, A_1, A_2 formano un gruppo armonico, così lo stesso accadrà di C_1, C_2, K_1, K_2; K_1 e K_2 sono dunque coniugati armonici rispetto a C_1, C_2, onde C_1, C_2 sono coniugati rispetto a C_{AB}. Ciò significa che due complessi qualunque del sistema autoconiugato comune ad A e B sono pure coniugati rispetto a C_{AB}; dunque:

Il sistema autoconiugato comune rispetto a due complessi quadratici, gode della stessa proprietà rispetto a ciascuno dei due complessi polari di uno dei dati complessi rispetto all'altro.

Questa proprietà si verifica assai facilmente in altro modo quando i due complessi dati ammettano un sistema autoconiugato comune composto di cinque sfere; allora le loro equazioni possono porsi sotto la forma:

$$\sum_i a_i x_i^2 = 0 \ , \qquad \sum_i b_i x_i^2 = 0 \ ,$$

e i due complessi C_{AB} e C_{BA} avranno in conseguenza per equazioni:

$$\sum_i \frac{b_i^2}{a_i} x_i^2 = 0 \ , \qquad \sum \frac{a_i^2}{b_i} x_i^2 = 0 \ ,$$

epperò avranno per sistema autoconiugato comune quello che è comune ad A, B.

Quando il complesso B coincida col complesso $R_{xx} = 0$ dei punti-sfere, le equazioni (26), (27), si trasformano in altre che rappresenteranno in due modi il luogo delle sfere ortogonali dei complessi tangenti del complesso A o l'inviluppo dei complessi lineari aventi per sfere ortogonali quelle del complesso A. Chiameremo questo nuovo complesso il *complesso ortogonale* di A.

53. Sia un fascio di complessi quadratici rappresentato dall'equazione:

$$\sum_{ik} (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) x_i x_k = 0 \ ;$$

i complessi polari di questi rispetto al complesso

$$\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \ ,$$

costituiranno una serie semplicemente infinita la cui equazione è:

$$(28) \ldots\ldots \begin{vmatrix} \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} & \cdot & \cdot & \lambda a_{15}+\mu b_{15} & \sum_i b_{1i}x_i \\ \lambda a_{21}+\mu b_{21} & \lambda a_{22}+\mu b_{22} & \cdot & \cdot & \lambda a_{25}+\mu b_{25} & \sum_i b_{2i}x_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{51}+\mu b_{51} & \lambda a_{52}+\mu b_{52} & \cdot & \cdot & \lambda a_{55}+\mu b_{55} & \sum_i b_{5i}x_i \\ \sum_i b_{i1}x_i & \sum_i b_{i2}x_i & \cdot & \cdot & \sum_i b_{i5}x_i & 0 \end{vmatrix} .$$

Quanti complessi di questa serie passano per una sfera arbitraria x? A ciò si risponde facilmente notando, che quando son date le x la (28) si trasforma in un'equazione che può servire a determinare i parametri $\lambda : \mu$ che spettano ai complessi cercati; e siccome quest'equazione è di 4° grado, così:

Per qualunque sfera dello spazio passano in generale quattro complessi della serie (28).

Questo numero quattro diminuisce in certi casi che è facile determinare colle seguenti osservazioni. Se noi sviluppiamo la (28) secondo i prodotti degli elementi dell'ultima orizzontale e dell'ultima verticale, otterremo una funzione quadratica omogenea di questi elementi i cui coefficienti sono i subdeterminanti di quarto ordine del determinante della forma quadratica $\lambda a_{xx}+\mu b_{xx}$. Se vi è un valore di $\lambda : \mu$ che annulla tutti questi subdeterminanti, la (23) sarà soddisfatta da questo valore qualunque sia la sfera x, e quindi per questa non passeranno ancora più di tre complessi della schiera; così se vi è un valore di $\lambda : \mu$ che sia radice doppia di tutti i subdeterminanti di primo ordine del determinante di $\lambda a_{xx}+\mu b_{xx}$, per una sfera arbitraria dello spazio passeranno due complessi della schiera. Lo stesso ragionamento può applicarsi in ogni altro caso e serve ad assegnare esattamente il grado della serie (28).

Tutti i complessi della schiera hanno comuni ∞^2 *complessi tangenti;* quelli, cioè, che sono polari rispetto a

$$\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \ ,$$

delle sfere appartenenti alla congruenza:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 \ , \qquad \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \ ;$$

in altre parole tutti i complessi della schiera (23) sono toccati dai piani tangenti a B nelle sfere della congruenza di sua intersezione con A. Ciò prova anche che il complesso B fa parte sia del fascio, sia della schiera. Lo stesso fatto risulta da ciò che se si fa nella (28) $\lambda=0$ si ottiene:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{15} & \sum_{i} b_{1i} x_i \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{25} & \sum_{i} b_{2i} x_i \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{51} & b_{52} & . & . & b_{55} & \sum_{i} b_{5i} x_i \\ \sum_{i} b_{i1} x_i & \sum_{i} b_{i2} x_i & . & . & \sum_{i} b_{i5} x_i & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

ora, sottraendo dall'ultima orizzontale le precedenti moltiplicate ordinatamente per x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e facendo la stessa operazione sulle verticali si ottiene:

$$\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{15} \\ . & . & . & . \\ b_{51} & . & . & b_{55} \end{vmatrix} = 0 \; ,$$

che è l'equazione del complesso B.

Il coefficiente di $(\lambda : \mu)^4$ si ottiene facendo nella (28) $\lambda = 0$, $\mu = 1$ onde è espresso dal primo membro dell'ultima equazione scritta; esso quindi s'annulla sempre soltanto quando la sfera x appartiene al complesso B; allora per quella sfera passano, nel caso più generale, ancora tre complessi della serie; e in ogni caso si può dire:

Per una sfera qualunque del complesso B *passano tanti complessi della serie quante unità vi sono nel grado di questa meno uno.*

54. Il complesso polare di

$$\sum_{ik} (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) x_i x_k = 0 \; ,$$

rispetto a

$$\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \; ,$$

e il complesso B hanno per sistema autoconiugato comune (n. 52) quello che è comune ai due complessi:

$$\sum_{ik} (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) x_i x_k = 0 \; ,$$

$$\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \; ,$$

cioè quello comune ai due complessi:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 \; , \qquad \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0 \; .$$

Dunque: *Tutti i complessi della serie* (28) *hanno per sistema autoconiugato quello che è comune ai due complessi dati.*

55. Nel fascio di complessi quadratici

$$\lambda a_{xx} + \mu b_{xx} = 0 \; ,$$

vi sono quattro complessi tangenti a un complesso lineare arbitrario:

$$\xi x = 0 \ ,$$

(n. 39). Siano $\lambda' : \mu'$, $\lambda'' : \mu''$ i valori di $\lambda : \mu$ che corrispondono a due di essi e cerchiamo le corrispondenti sfere di contatto. Esse saranno date dalle equazioni:

$$(\alpha) \dots\dots \quad \sum_i (\lambda' a_{ji} + \mu' b_{ji}) x_i' = \xi_j \ ; \qquad \sum_i (\lambda'' a_{ji} + \mu'' b_{ji}) x_i'' = \xi_j \quad \dots\dots (\beta).$$

Di più siccome x' sta sui due complessi $\xi_x = 0$, $\lambda' a_{xx} + \mu' b_{xx} = 0$, e x'' sta sui complessi $\xi_x = 0$, $\lambda'' a_{xx} + \mu'' b_{xx} = 0$ avremo le equazioni:

$$(\gamma) \dots\dots \quad \xi_{x'} = 0 \ ; \qquad \xi_{x''} = 0 \quad \dots\dots (\delta).$$

$$(\varepsilon) \dots\dots \quad \lambda' a_{x'x'} + \mu' b_{x'x'} = 0 \ ; \qquad \lambda'' a_{x''x''} + \mu'' b_{x''x''} = 0 \quad \dots\dots (\varphi).$$

Moltiplicando la (α) per x_j'' e sommando le cinque equazioni analoghe che si ottengono per $j = 1.2.3.4.5$, e tenendo conto della (δ) avremo:

$$\lambda' a_{x'x''} + \mu' b_{x'x''} = 0 \ .$$

Analogamente dalle (β) (γ) risulta:

$$\lambda'' a_{x'x''} + \mu'' b_{x'x''} = 0 \ .$$

Queste ci dicono che le sfere x', x'' sono coniugate rispetto a due dei complessi del fascio, esse lo saranno per conseguenza rispetto a tutti, epperò potremo concludere:

Le sfere di contatto di un complesso lineare qualunque coi quattro complessi quadratici di un fascio, sono a due a due coniugate rispetto a tutti i complessi del fascio stesso. Se quindi cerchiamo la sfera coniugata del dato complesso lineare rispetto a uno assegnato dei complessi del fascio, otterremo una sfera che con quelle quattro forma un sistema autoconiugato rispetto al complesso quadratico scelto.

Nello stesso modo si dimostra la seguente proposizione (correlativa alla precedente):

I complessi lineari tangenti in una sfera qualunque S *ai quattro complessi quadratici della schiera* (28) *passanti per essa sono a due a due coniugati rispetto a tutti i complessi quadratici della schiera; il complesso polare di* S *rispetto a uno qualunque dei complessi della schiera, forma con quelli un sistema autoconiugato rispetto a questo complesso scelto.*

56. Il caso particolare più interessante di questa ricerca si ha quando il complesso B coincide col complesso (R) dei punti-sfere.

In questo caso la schiera (28) si muta nell'insieme degli infiniti complessi ortogonali (n. 52) dei complessi che determinano con R una medesima ciclide; essa è inviluppata dagli ∞^2 complessi lineari (speciali) le cui sfere ortogonali si riducono ai punti della ciclide. Per una sfera qualunque passano quattro complessi della schiera, ma per un punto sfera ne passano soltanto tre. Le sfere ortogonali dei quattro complessi

lineari tangenti in una data sfera ai quattro complessi quadratici della schiera passanti per essa, costituiscono con questa un sistema di cinque sfere a due a due ortogonali; *se la sfera scelta è un punto-sfera, le sfere ortogonali dei tre complessi lineari tangenti in esso ai tre complessi quadratici della schiera passano per esso e sono a due a due ortogonali.* Tutti i complessi quadratici della schiera hanno per sistema autoconiugato comune quello del complesso $a_{xx}=0$ e del complesso dei punti sfere.

Questa schiera di complessi quadratici determina col complesso dei punti un importante sistema di ciclidi, che si chiama sistema di *ciclidi omofocali.* Da una proprietà enunciata or ora (che abbiamo sottosegnato per la sua importanza) e dal teorema: « La sfera ortogonale del complesso polare di un punto-sfera rispetto a un complesso quadratico, tocca in esso punto la corrispondente ciclide (*) », risulta che:

Per ogni punto dello spazio passano tre ciclidi di un sistema di ciclidi omofocali, le quali si secano ad angolo retto.

Le ciclidi omofocali costituiscono per conseguenza un sistema triplo di superficie ortogonali (**) onde, in virtù del celebre teorema di Dupin (***), esse si secano nelle loro linee di curvatura.

57. Siccome per ogni sfera dello spazio passano in generale quattro complessi di 2° grado della schiera, così lo stesso accadrà per un piano; ma se si prende il piano all'infinito, siccome esso deve eziandio annoverarsi fra i punti (n. 19), così il numero dei complessi della schiera passanti per esso è minore di un'unità del numero che si avrebbe se il piano fosse qualunque. Ognuno dei complessi che così si ottengono determina col complesso dei punti-sfere, ciclidi contenenti il piano all'infinito, le quali, cioè, si sciudono nel piano all'infinito e in una superficie di 3° ordine passante per l'assoluto. Dunque:

In una schiera di ciclidi omofocali sono contenute tante ciclidi di 3° ordine quante sono le ciclidi del sistema stesso che passano per un punto arbitrario.

Per determinare i valori del parametro $\lambda:\mu$ che ad esse corrispondono, serve l'equazione (28) in cui si supponga essere le x le coordinate del piano all'infinito. Dunque, per l'equazione (4) del n. 19, l'equazione che serve a trovare le superficie di terz'ordine della schiera, è la seguente:

$$(29)\ldots\quad 0=\begin{vmatrix} \lambda a_{11}+\mu R_{11} & \lambda a_{12}+\mu R_{12} & . & . & \lambda a_{15}+\mu R_{15} & 1 \\ \lambda a_{21}+\mu R_{21} & \lambda a_{22}+\mu R_{22} & . & . & \lambda a_{25}+\mu R_{25} & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda a_{51}+\mu R_{51} & \lambda a_{52}+\mu R_{52} & . & . & \lambda a_{55}+\mu R_{55} & 1 \\ 1 & 1 & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(*) V. la sua dimostrazione nella Memoria del Reye, che fa parte della *Collectanea mathematica*, p. 254.

(**) Lo si potrebbe dimostrare altrimenti, ricorrendo alla regola esposta alla fine del n. 16 per riconoscere l'ortogonalità di due superficie.

(***) Dupin, *Développements de Géométrie.* Paris, 1813, pag. 364.

58. Nel fascio di complessi quadratici contenenti la ciclide vi sono dei complessi semplicemente speciali; che cosa corrisponde nella schiera a uno di essi?

Per rispondervi, rammentiamo che un complesso semplicemente speciale contenente la ciclide è generato dagli ∞^2 fasci che congiungono una sfera fissa S (sfera direttrice) ai piani tangenti π di una quadrica fissa (quadrica deferente). Per conseguenza ad esso corrisponde nella schiera l'inviluppo delle congruenze lineari in cui il complesso lineare C di cui S è sfera ortogonale è secato dai complessi lineari le cui sfere ortogonali degenerarono nei piani π. Dunque si può anche dire che a quel complesso corrisponde la congruenza d'intersezione di C coll'inviluppo I dei complessi lineari di cui i piani π rappresentano le sfere ortogonali; quindi per rispondere alla questione di cui si tratta bisogna trovare quest'ultimo inviluppo.

Consideriamo tre piani tangenti consecutivi di Q; i tre complessi lineari di cui essi sono sostegni s'intersecano in un sistema lineare costituito da tutte le sfere aventi i loro centri nel punto d'intersezione di quei tre piani. Ma tre piani tangenti consecutivi d'una superficie si secano in un punto della stessa, dunque potremo concludere:

L'inviluppo è formato di tutte le sfere che hanno i loro centri sulla quadrica Q.

Le sfere comuni a I e C sono dunque quelle i cui centri stanno in Q e che sono ortogonali ad S, cioè costituiscono una delle schiere di sfere bitangenti alla ciclide (n. 47); ricaviamo dunque il teorema:

Ai complessi semplicemente speciali del fascio

$$(30) \quad \lambda a_{xx} + \mu R_{xx} = 0 ,$$

corrispondono nella schiera:

$$(31) \quad 0 = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu R_{11} , & \lambda a_{12} + \mu R_{12} , & \ldots , & \lambda a_{15} + \mu R_{15} & \sum_i R_{1i} x_i \\ \lambda a_{21} + \mu R_{21} , & \lambda a_{22} + \mu R_{22} , & \ldots , & \lambda a_{25} + \mu R_{25} & \sum_i R_{2i} x_i \\ \cdot & \cdot & \ldots , & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{51} + \mu R_{51} , & \lambda a_{52} + \mu R_{52} , & \ldots , & \lambda a_{55} + \mu R_{55} & \sum_i R_{5i} x_i \\ \sum_i R_{i1} x_i & \sum_i R_{i2} x_i & \ldots , & \sum_i R_{i5} x_i & 0 \end{vmatrix}$$

le congruenze formate dalle sfere bitangenti alla ciclide:

$$a_{xx} = 0 , \quad R_{xx} = 0 ;$$

i punti-sfere d'una di esse costituiscono una ciclica focale.

Le ciclidi corrispondenti della schiera di ciclidi omofocali, si riducono alle corrispondenti sfere direttrici contate due volte.

59. Analogamente si dimostra:

Se nel fascio (30) *vi è un complesso doppiamente speciale, ad esso corrisponde nella schiera una serie quadratica di sfere ortogonali a una sfera e i cui centri stanno su una conica;* i suoi punti-sfere sono fuochi della ciclide (nel senso dichiarato al n. 49, *b*)). La ciclide corrispondente della schiera di ciclidi omofocali è indeterminata.

CAPITOLO TERZO.

Classificazione delle Ciclidi.

§ 1. *Metodo di classificazione.*

60. Noi abbiamo definito (n. 43) la ciclide come luogo dei punti-sfere di un complesso quadratico di sfere, onde essa appare come l'intersezione di due quadriche a tre dimensioni in uno spazio lineare a quattro. Per ottenere e caratterizzare le varietà della ciclide il primo metodo che si presenta è il ridurre le sue equazioni alla loro forma più semplice e studiare su queste la superficie.

Ora è noto che non sempre è possibile ridurre due forme quadratiche ciascuna a una somma di quadrati, ma che in ogni caso si possono ottenere delle forme semplici caratteristiche pei varii casi e che possono dirsi *canoniche.* Qualunque sia il numero delle variabili per assegnare i varii casi che si debbono considerare e le corrispondenti forme canoniche si ha un metodo semplice dovuto a Weierstrass (*) e che noi esporremo nel numero seguente pel caso di cinque variabili, che è quello che ci interessa.

Ma intanto notiamo che le varie specie di superficie che si otterranno con questo metodo saranno fra loro distinte *nello spazio di sfere*, cioè non potranno dedursi l'una dall'altra mediante trasformazioni dello spazio di sfere che lasciano immutata la quadrica dei punti. In altri termini, il metodo indicato dà tutte le ciclidi, che non possono mutarsi l'una nell'altra colle trasformazioni indicate alla fine del n. 6, cioè mediante le trasformazioni dell'ordinaria geometria metrica e la trasformazione per raggi reciproci (**).

Di più un teorema di Weierstrass, che enunceremo fra poco, ci assicura che in questo modo non s'incontrerà mai due volte la stessa superficie.

(*) *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1868, Mai 18).

(**) In particolare si possono ottenere, mediante convenienti trasformazioni per raggi reciproci, le varie superficie di quarto ordine aventi per linea cuspidale l'assoluto.

Del resto queste si possono anche dedurre da quelle che noi incontreremo, facendo delle convenienti ipotesi particolari sulle costanti delle loro equazioni.

Osserviamo ancora che l'applicazione del metodo di Weierstrass al caso nostro si riduce in sostanza alla ricerca del sistema autoconiugato comune al complesso quadratico di sfere determinante la ciclide e al complesso dei punti-sfere. Siccome noi dimostrammo (n. 54) che il sistema autoconiugato comune a un complesso quadratico qualunque e a quello dei punti-sfere, è comune anche a questo ultimo e a tutti i complessi quadratici determinanti con esso il sistema di ciclidi omofocali, così le equazioni delle ciclidi del sistema di ciclidi omofocali ad una data, sono riducibili alla stessa forma, epperò hanno le stesse singolarità. Se in particolare consideriamo in questo sistema le ciclidi di terzo ordine otterremo una classificazione completa delle superficie di terzo ordine passanti per l'assoluto, donde si potrà poi facilmente ottenere la classificazione completa delle superficie di questo ordine.

61. Il metodo di Weierstrass per assegnare le forme canoniche sotto cui può porsi una data coppia di forme canoniche, può riassumersi, nel caso di cinque variabili, nel modo seguente.

Siano in generale:

$$A = \sum_{ik} A_{ik} x_i x_k \ ,$$

$$B = \sum_{ik} B_{ik} x_i x_k \ ,$$

le due date forme a cinque variabili; formiamo il determinante:

$$[A, B] = \begin{vmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11}, & \lambda A_{12} + \mu B_{12}, & \dots, & \lambda A_{15} + \mu B_{15} \\ \lambda A_{21} + \mu B_{21}, & \lambda A_{22} + \mu B_{22}, & \dots, & \lambda A_{25} + \mu B_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \lambda A_{51} + \mu B_{51}, & \lambda A_{52} + \mu B_{52}, & \dots, & \lambda A_{55} + \mu B_{55} \end{vmatrix} .$$

Indicando con $\lambda_i : \mu_i$ una qualunque delle radici di $[A, B] = 0$ ed l_i il suo grado di moltiplicità, potremo scrivere:

$$[A, B] = K \Pi_i (\lambda \mu_i - \mu \lambda_i)^{l_i}$$

essendo

$$\sum_i l_i = 5$$

e K una costante.

Se $l_i^{(k)}$ è l'esponente della più alta potenza di $\lambda \mu_i - \mu \lambda_i$ che divide tutti i subdeterminanti d'ordine $5 - k$ del determinante $[A, B]$ si avrà la relazione (Weierstrass, l. c.):

$$l_i^{(k)} > l_i^{(k+1)} \ ,$$

onde posto:

$$l_i^{(k)} - l_i^{(k+1)} = e_i^{(k)} \ ,$$

il numero $e_i^{(k)}$ sarà positivo e di più si avrà:

$$\sum_{i,k} e_i^{(k)} = 5 \ .$$

L'espressione

$$(\lambda \mu_i - \mu \lambda_i)^{e_i^{(k)}} ,$$

si chiama *divisore elementare* (Elementar-Theiler) del determinante $[AB]$.

Ciò posto si può con una stessa trasformazione lineare ridurre A e B alle due seguenti *forme canoniche*:

$$A = \sum_\lambda [a_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} - h (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}] ,$$

$$B = \sum_\lambda [b_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + g (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}] ,$$

avendo posto in generale:

$$(X_\lambda X_\lambda)_e = \sum_{(\mu + \nu = e - 1)} X_{\lambda\mu} X_{\lambda\nu} ,$$

e intendendo che sia:

$$(X_\lambda X_\lambda)_0 = 0 ;$$

le costanti a_λ, b_λ, ... soddisfano le equazioni:

$$g a_\lambda + h b_\lambda = 1 ,$$

mentre g, h sono numeri interi qualunque.

Il significato dei divisori elementari è dato dal seguente importantissimo *Teorema di Weierstrass:* Affinchè si possa con una medesima trasformazione lineare mutare una data coppia di forme quadratiche in un' altra coppia di forme quadratiche, pure data, è necessario e sufficiente che i determinanti formati, nel modo indicato, coi coefficienti delle due coppie di forme coincidano nei loro divisori elementari (*).

62. Segue da quanto ora si disse che ad ogni distribuzione dei divisori elementari del determinante $[A, B]$ corrisponde una specie di coppia di forme quadratiche, e viceversa. Per ottenerle tutte, bisognerà prima di tutto determinare le soluzioni intere dell'equazione indeterminata

$$\sum_{i,k} e_i^{(k)} = 5 ;$$

si trova facilmente che questa ammette le sette soluzioni seguenti:

1	1	1	1	1
2	1	1	1	
2	2	1		
3	1	1		
3	2			
4	1			
5.				

(*) Un teorema analogo ha luogo per le forme bilineari.

Poi bisogna considerare i casi in cui vengono a coincidere dei divisori elementari appartenenti a radici diverse del determinante dato $[A, B]$; seguendo la notazione proposta dal Weiler nel suo studio sulla classificazione dei complessi quadratici di rette (*) porremo fra parentesi ( ) i numeri indicanti l'ordine di molteplicità dei divisori elementari appartenenti alla stessa radice. Allora dalle soluzioni ora trovate dedurremo il seguente prospetto dei casi da considerare:

[11111], [(11) 111], [(11) (11) 1], [(111) 11], [(111) (11), [(1111) 1]
[2111], [(21) 11], [21 (11)], [(21) (11)], [(2111) 1], [2 (111)], [(2111)]
[221], [2 (21)], [(22 (1)], [(221)]
[311], [(31) 1], [3 (11)], [(311)]
[32], [(32)]
[41], [(41)]
[5].

Abbiamo così ventisei specie diverse delle superficie che studiamo; vedremo che in otto dei casi da considerare, la superficie degenera in due sfere (distinte o coincidenti proprie o degenerate). Escludendo queste superficie degeneri e applicando il teorema di Weierstrass enunciato al numero precedente potremo dire:

Vi sono dieciotto specie di ciclidi; ogni superficie dell'una specie non si può trasformare per raggi reciproci in altra di specie diversa.

63. Le particolarità distintive delle varie specie esigono lo studio particolare delle forme canoniche sotto le quali si possono porre le equazioni delle diverse specie di ciclidi; gli è a questa ricerca che è dedicato il presente capitolo, ma prima d'intraprenderla sarà utile il dire come si trovino i punti doppi della superficie di cui sono date le equazioni in coordinate x_i e l'enumerare le varie specie di curve piane che si possono ottenere secando la ciclide con un piano.

Per determinare i punti doppi della superficie si combinino linearmente le equazioni della superficie per modo da ottenerne una terza equazione contenente solo più quattro delle variabili x_i (od un numero minore, se è possibile); questa sarà sufficiente a determinare la superficie; si cerchi allora se è possibile trovare un punto (x, y, z), le cui coordinate soddisfino all'equazione della superficie (**) e annullino le derivate del suo primo membro rispetto ad x, y, z. Ora si vede facilmente che un tal punto deve verificare le quattro equazioni ottenute annullando le derivate rispetto alle x_i, di una, almeno, fra le equazioni fra quattro di queste coordinate, ottenute come si disse; in particolare se vi è un punto pel quale si annullano tutte quattro quelle coordinate x_i, esso sarà certo un punto doppio della ciclide.

(*) *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades* (Math. Annalen, Bd. VII, pag. 150 e seg.).

(**) Si rammenti che, a cagione del significato delle x_i (n. 11), si può nell'equazione ottenuta della superficie, sostituire alle x_i i primi membri di quattro sfere, la cui posizione reciproca è determinata dalla equazione, supposta data, del complesso dei punti-sfere (n. 7).

§ 2. *Classificazione delle cicliche piane.*

64. Qualunque sezione fatta con un piano in una ciclide, è una curva di quarto ordine avente per punti doppii i punti ciclici del piano secante; laonde, per lo studio di tali sezioni bisogna conoscere le varie specie di curve che possono ottenersi. Ora, lo stesso metodo indicato per classificare le ciclidi serve ad ottenere le varie specie (distinte in quanto non si possono ottenere l'una dall'altre mediante una trasformazione piana per raggi reciproci) di queste curve (che si dicono cicliche), e dà risultati che si possono riassumere nel seguente modo (usando delle notazioni, già rammentate, del Weiler):

[1111]. Ciclica generale, non avente altri punti singolari che i punti ciclici del piano, che sono doppii per la curva.

[(11) 11]. Ciclica avente due nuovi punti doppii, non posti su una retta uscente da un punto ciclico, epperò scissa in due cerchii.

[(11)(11)]. Ciclica avente quattro nuovi punti doppii, epperò degenerata in due coppie dirette passanti pei punti ciclici.

[(111) 1]. Cerchio contato due volte.

[211]. Ciclica avente un punto doppio a distanza finita.

[2 (11)]. Ciclica con tre punti doppii a distanza finita epperò scisso in un circolo e una coppia di rette passanti pei punti ciclici.

[(21) 1]. Ciclica degenerata in due cerchii fra loro tangenti.

[(211)]. Ciclica ridotta a una coppia di rette passanti pei punti doppii contata due volte.

[31]. Ciclica con una cuspide a distanza finita.

[(31)]. Ciclica degenerata in cerchio e una coppia di rette passanti pei punti ciclici e secantisi su questo.

[22]. Ciclica degenerata in una retta passante per un punto ciclico e in una cubica razionale passante per esso e avente per punto doppio l'altro punto ciclico.

[(22)]. Ciclica degenerata in tre rette di cui una è diretta a un punto ciclico e deve contarsi come doppia, le altre due sono dirette all'altro punto ciclico.

[4]. Ciclica degenerata in una cubica piana razionale avente un punto doppio in uno dei punti ciclici, un punto ordinario nell'altro, e in una tangente condotta da questo alla curva.

65. Non è privo d'interesse l'osservare che le varie specie di cicliche piane (o, più in generale, di quartiche piane aventi due punti doppii) si ottengono dalle diverse specie di quartiche gobbe di prima specie (le quali hanno in generale due punti

doppii apparenti) proiettando queste da un punto arbitrario dello spazio (*). Si corrispondono cicliche e quartiche gobbe dello stesso simbolo, come risulta rammentando che per le curve d'intersezione di due quadriche la classificazione completa può compendiarsi nel seguente prospetto (**):

[1111]. Quartica di prima specie generale.
[(11)11]. Quartica degenerata in due coniche.
[(11)(11)]. Quartica degenerata in un quadrilatero gobbo.
[(111)1]. Conica contata due volte.
[211]. Quartica con un punto doppio.
[2(11)]. Quartica degenerata in una conica e due sue secanti non incontrantisi su essa, ma poste nello stesso piano.
[(21)1]. Quartica degenerata in due coniche fra di loro tangenti.
[(211)]. Quartica scissa in una coppia di rette contata due volte.
[31]. Quartica con una cuspide.
[(31)]. Quartica scissa in una conica e due rette aventi un punto comune sulla conica e poste in un piano ad essa tangente.
[22]. Quartica degenerata in una cubica gobba e una sua bisecante.
[(22)]. Quartica degenerata in una coppia di sette sghembe e una loro secante comune contata due volte.
[4]. Quartica ridotta ad una cubica gobba e una sua tangente.

§ 3. *Prima forma canonica.*

66. Ed ora veniamo finalmente allo studio particolare delle coppie di equazioni che si possono scegliere per rappresentare la ciclide.

Nel caso [11111] è lecito prendere per equazioni della superficie le due seguenti:

$$(1) \quad \ldots \quad A_{xx} \equiv \sum_i a_i x_i^2 = 0 \; ; \qquad R_{xx} \equiv \sum_i R_i^2 x_i^2 = 0 \quad (***).$$

Dalla forma dell'equazione che lega le coordinate x_i d'un punto si deduce (n. 7) che il sistema delle cinque sfere $s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_5$ consta di cinque sfere a due a due ortogonali e che quindi (n. 11) le sfere $S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5$ coincidono con queste; le coordinate x_i sono dunque proporzionali alle potenze di un punto rispetto a cinque sfere a due a due ortogonali.

(*) Prendendo il centro di proiezione in posizioni particolari si potrebbero ottenere cicliche più speciali, deducibili da quelle enumerate con trasformazioni quadratiche.

(**) Vedi le Note di *Gundelfinger* alle *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes* di *Hesse* (Dritte Auflage, 1876) pag. 518-525.

(***) È sottinteso che in questo caso e nei seguenti i coefficienti dell'equazione che rappresenta lo spazio di punti debbono soddisfare alla condizione che già esponemmo (n. 8).

Ora, combinando linearmente le due equazioni (1), si ottiene un'equazione della forma:

$$(2) \ldots \quad l_p x_p^2 + l_q x_q^2 + l_r x_r^2 + l_s x_s^2 = 0 \ ,$$

essendo $l_p\, l_q\, l_r\, l_s$ costanti che si determinano facilmente e p, q, r, s una combinazione quaternaria dei numeri $1 . 2 . 3 . 4 . 5$.

I punti doppii della superficie dovranno (cfr. n. 64) verificare le quattro equazioni:

$$x_p = 0 \ , \quad x_q = 0 \ , \quad x_r = 0 \ , \quad x_s = 0 \ ;$$

ora, in causa del significato delle coordinate x_i d'un punto, queste rappresentano in coordinate cartesiane quattro sfere a due a due ortogonali, che quindi non hanno alcun punto comune fuori dell'assoluto; donde segue che la superficie non ha punti doppii oltre a quelli del cerchio imaginario all'infinito.

La superficie che consideriamo è dunque la ciclide più generale; è ad essa che fu finora rivolta principalmente l'attenzione dei geometri. Le sue proprietà principali si deducono da ciò che si disse nel § 3 del Capitolo secondo e sono le seguenti:

La ciclide [1 1 1 1 1] *può considerarsi in cinque modi diversi come l'inviluppo di una sfera il cui centro percorre una quadrica (deferente) e che si mantiene ortogonale a una sfera fissa (direttrice); le sfere direttrici sono le* $S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5$ *a due a due ortogonali; le quadriche deferenti sono omofocali e le loro equazioni tangenziali si possono porre sotto la forma* (v. n. 44)

$$(3) \ldots \quad (l_p - l_t)\, x_p^2 + (l_q - l_t)\, x_q^2 + (l_r - l_t)\, x_r^2 + (l_s - l_t)\, x_s^2 = 0 \ ,$$

essendo p, q, r, s, t *i numeri* 1, 2, 3, 4, 5 *presi in un certo ordine. Ogni sfera direttrice seca la corrispondente quadrica deferente in una curva focale che è una ciclica sferica generale. La ciclide si muta in se stessa mediante una trasformazione per raggi reciproci il cui centro e la cui potenza siano il centro e il quadrato del raggio d'una sfera direttrice.*

I piani bitangenti della superficie inviluppano cinque coni quadrici (coni di Kummer) *concentrici alle sfere direttrici e supplementari dei coni asintoti delle corrispondenti quadriche deferenti.*

Infine la ciclide contiene 16 *rette.*

67. Siccome *con una conveniente trasformazione per raggi vettori reciproci si può dedurre da una superficie generale di terzo ordine contenente l'assoluto la ciclide più generale* (*), e siccome le sedici rette della superficie cubica che incon-

(*) Darboux, *Sur une classe de courbes et de surfaces algébriques*, etc., pag. 165.

Cremona, *Sulla superficie di quarto ordine dotata di una conica doppia* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. IV, pag. 140).

Il teorema enunciato risulta p. e. facendo uso delle formole che servono alla trasformazione per raggi vettori reciproci, e notando che una superficie cubica di detta specie ha sempre un'equazione della forma:

$$0 = (lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2) + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{44} + 2 a_{23}\, yz + 2 a_{14}\, x +$$
$$+ 2 a_{31}\, zx + 2 a_{24}\, y + 2 a_{12}\, xy + 2 a_{34}\, z \ .$$

trano il cerchio immaginario all'infinito, si mutano nelle sedici rette della seconda, così: *la disposizione di queste è identica a quelle delle prime:* ci serviremo di questa osservazione per ottenere delle indicazioni espressive per le rette della ciclide.

Chiamiamo a_6 la retta della superficie cubica posta nel piano all'infinito π, Γ l'assoluto; la retta a_6 è incontrata da 10 rette della superficie, le altre 16 incontreranno π in punti di Γ. Seguendo le notazioni introdotte da Schläfli indicheremo con

$$a_i \, , \quad b_i \, , \quad c_{ij} \, (= c_{ji}) \quad (i, j = 1.2.3.4.5.6) \, ,$$

le 27 rette della superficie; allora a_6 è incontrata dalle dieci rette:

$$b_1 \, b_2 \, b_3 \, b_4 \, b_5 \, c_{16} \, c_{26} \, c_{36} \, c_{46} \, c_{56} \, ,$$

epperò, mediante una trasformazione per raggi reciproci, queste rette si muteranno in coniche e lo stesso accadrà per la a_6, mentre le altre 16 rette si muteranno in rette della superficie di quarto ordine. Indicando colle stesse notazioni una retta della superficie di terzo ordine e la retta in cui si trasforma, otterremo che le 16 rette della ciclide sono disposte a due a due in 40 piani nel seguente modo:

$$\begin{array}{llllllllll}
a_1 & c_{12} \, , & a_2 & c_{21} \, , & a_3 & c_{31} \, , & a_4 & c_{41} \, , & a_5 & c_{51} \, , \\
a_1 & c_{13} \, , & a_2 & c_{23} \, , & a_3 & c_{32} \, , & a_4 & c_{42} \, , & a_5 & c_{52} \, , \\
a_1 & c_{14} \, , & a_2 & c_{24} \, , & a_3 & c_{34} \, , & a_4 & c_{43} \, , & a_5 & c_{53} \, , \\
a_1 & c_{15} \, , & a_2 & c_{25} \, , & a_3 & c_{35} \, , & a_4 & c_{45} \, , & a_5 & c_{54} \, , \\
a_1 & b_6 \, , & a_2 & b_6 \, , & a_3 & b_6 \, , & a_4 & b_6 \, , & a_5 & b_6 \, . \\
 & & & & & & & & & \\
c_{12} & c_{34} \, , & c_{13} & c_{42} \, , & c_{14} & c_{23} \, , & c_{15} & c_{23} \, , & c_{23} & c_{45} \, , \\
c_{12} & c_{45} \, , & c_{13} & c_{25} \, , & c_{14} & c_{35} \, , & c_{15} & c_{34} \, , & c_{24} & c_{53} \, , \\
c_{12} & c_{53} \, , & c_{15} & c_{54} \, , & c_{14} & c_{52} \, , & c_{15} & c_{42} \, , & c_{25} & c_{34} \, .
\end{array}$$

Le proprietà espresse da questo prospetto si possono riassumere così, che:

1° La retta b_6 è incontrata dalle cinque rette $a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4 \, a_5$.

2° La retta c_{ik} è incontrata da a_i, a_k, c_{mn}, c_{nl}, c_{lm} essendo i, k, l, m, n gli indici 1, 2, 3, 4, 5 presi in un certo ordine.

3° Infine la retta a_i è incontrata da b_6, c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in}; ove k, i, l, m, n ha lo stesso significato di prima.

Dunque: *Ogni retta della ciclide è incontrata da altre cinque rette e determina con queste cinque piani tritangenti della superficie.*

Le sedici rette della ciclide si possono distribuire in venti *quaterne doppie* analoghe alle *bi-sestuple* (Doppelsechs) di Schläfli (*) delle superficie di 3° ordine. Una *quaterna doppia* è l'insieme di otto rette, distinte in due gruppi di quattro, e accoppiate a due a due; ogni retta di un gruppo seca tutte quelle dell altro tranne la sua omologa. Le venti quaterne doppie che si possono formare sono le seguenti:

(*) Cfr. Cremona, *Grundzüge eineir allgemeinen Theorie der Obergflächen*, 1870, pag. 180. — Reye, *Die Geometrie der Lage*, II, Th. 1880, pag. 220.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ a_2 & c_{13} & c_{14} & c_{15} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_1 & c_{34} & c_{32} & c_{35} \\ a_3 & c_{14} & c_{12} & c_{15} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_1 & c_{42} & c_{43} & c_{45} \\ a_4 & c_{12} & c_{13} & c_{15} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_1 & c_{52} & c_{53} & c_{54} \\ a_5 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_2 & c_{31} & c_{34} & c_{35} \\ a_3 & c_{21} & c_{24} & c_{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} a_2 & c_{41} & c_{43} & c_{45} \\ a_4 & c_{21} & c_{23} & c_{25} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_2 & c_{51} & c_{53} & c_{54} \\ a_5 & c_{21} & c_{23} & c_{24} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_3 & c_{41} & c_{42} & c_{45} \\ a_4 & c_{31} & c_{32} & c_{35} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_3 & c_{51} & c_{52} & c_{54} \\ a_5 & c_{31} & c_{32} & c_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_4 & c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ a_5 & c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} c_{12} & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_6 & c_{45} & c_{53} & c_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{13} & a_4 & a_5 & a_2 \\ b_6 & c_{52} & c_{24} & c_{45} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{14} & a_5 & a_2 & a_3 \\ b_6 & c_{23} & c_{35} & c_{52} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{15} & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_6 & c_{34} & c_{42} & c_{23} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{23} & a_4 & a_5 & a_1 \\ b_6 & c_{51} & c_{14} & c_{45} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} c_{24} & a_5 & a_1 & a_3 \\ b_6 & c_{13} & c_{35} & c_{51} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{25} & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_6 & c_{34} & c_{41} & c_{13} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{34} & a_5 & a_1 & a_2 \\ b_6 & c_{12} & c_{25} & c_{51} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{35} & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_6 & c_{24} & c_{41} & c_{12} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_{45} & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_6 & c_{23} & c_{31} & c_{12} \end{array} .$$

Esse possono rappresentarsi in generale con uno dei due simboli:

$$\begin{array}{cccc} a_i & c_{kl} & c_{km} & c_{kn} \\ a_k & c_{il} & c_{im} & c_{in} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} c_{mm} & a_i & a_k & a_l \\ b_6 & c_{kl} & c_{li} & c_{ik} \end{array} ,$$

essendo al solito $iklmn$ una permutazione di $1.2.3.4.5$.

Infine le sedici rette della superficie determinano quaranta quadrilateri gobbi; dieci possono rappresentarsi col simbolo:

$$a_i \quad a_k \quad c_{ik} \quad b_6 \; ,$$

(essendo ik una combinazione binaria $1.2.3.4.5$) e trenta col simbolo:

$$a_i \quad c_{ik} \quad c_{il} \quad c_{mn} \; ,$$

(ove $iklmn$ ha l'ordinario significato).

68. L'equazione della schiera di complessi quadratici che determina colla quadrica dei punti, il sistema di ciclidi omofocali è, in questo caso (cfr. n. 52),

$$(4) \ldots\ldots \qquad \sum_i \frac{a_i^2 x_i^2}{\lambda a_i^2 + \mu R_i^2} = 0 \; .$$

Essa coincide in sostanza con quella data da Darboux a pag. 134 della sua opera.

Ponendo in luogo delle x_i i primi membri delle equazioni di cinque sfere, a due a due ortogonali, si ricade in un'equazione solo di forma diversa da una pure data da Darboux (*).

Nella serie (4) vi sono tre complessi a cui corrispondono superficie di terzo ordine; i corrispondenti valori di $\lambda : \mu$ sono le radici dell'equazione:

$$\sum_i \frac{1}{\lambda a_i^2 + \mu R_i^2} = 0 \; ,$$

e le superficie che si ottengono sono superficie generali di terzo ordine passanti per l'assoluto, cioè della *prima specie* nella classificazione di Schläfli (**).

(*) *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales* (Comptes rendus, 1864, v. LIX, pag. 241).

(**) V. la memoria: *On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species*, etc. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1863, pag. 193).

69. Passiamo ora alle superficie le cui equazioni si ottengono dalle (1) facendo coincidere due o più radici del determinante $[A, R]$.

Il primo caso che si presenta è quello avente per simbolo $[(11)111]$. Combinando convenientemente le due equazioni della superficie, si può ottenere per rappresentarla l'unica equazione:

$$l_1 x_1^2 + l_2 x_2^2 + l_3 x_3^2 = 0 \ ,$$

ove le $l_1\ l_2\ l_3$ sono costanti di facile determinazione e le

$$x_1 = 0 \ , \qquad x_2 = 0 \ , \qquad x_3 = 0 \ ,$$

sono tre sfere a due a due ortogonali; questa equazione è unica e caratteristica per la superficie che consideriamo.

La superficie ha per punti doppii quelli comuni alle tre sfere ora considerate; per riconoscere di quale specie siano questi punti doppii, prendiamo, come è lecito:

$$x_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\,a\,x \ , \qquad x_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\,b\,y \ , \qquad x_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\,c\,z \ ,$$

e allora l'equazione della superficie in coordinate cartesiane è:

$$(5) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} (l_1 + l_2 + l_3)\,(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4\,(x^2 + y^2 + z^2)\,(a\,l_1\,x + b\,l_2\,y + c\,l_3\,z) \\ + 4\,(a^2\,l_1\,x^2 + b^2\,l_2\,y^2 + c^2\,l_3\,z^2) = 0 \ . \end{array} \right.$$

Questa ci prova che l'origine è un punto doppio conico della superficie: siccome l'origine è uno dei punti comuni alle sfere $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e ciò che si disse per l'uno può ripetersi per l'altro, così potremo concludere che *nel caso* $[(11)\,111]$ *la ciclide ha due punti doppii conici.*

Pel punto doppio considerato (e ciò che si dice per l'uno vale anche per l'altro) passano sei rette notevoli (raggi nodali (*)); esse sono le intersezioni del cono nodale:

$$a^2\,l_1\,x^2 + b^2\,l_2\,y^2 + c^2\,l_3\,z^2 = 0$$

col piano
$$a\ l_1 x\ + b\ \ l_2 y\ \ + c\ \ l_3 z\ = 0$$

e col cono
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \ .$$

Queste ultime quattro hanno più di quattro punti comuni colla superficie, epperò stanno su essa; dunque *per ogni punto doppio passano quattro rette della superficie* (cfr. n. 50). Sulla superficie non vi sono altre rette; in ognuna delle otto ora considerate vennero a coincidere due di quelle che si avevano nel caso generale (cfr. n. 50). La congiungente i punti doppii non appartiene alla superficie, ogni piano condotto per essa (non è un piano bitangente ma) seca la superficie in due cerchii: se in par-

---

(*) Mi permetto di usare, per amore di brevità nel linguaggio, di alcune denominazioni di cui si serve Schläfli nella Memoria citata, ma che non credo in generale adottate; cioè dirò: *cono nodale* il cono quadrico delle tangenti in un punto conico della superficie, *raggi nodali* le sei tangenti quadripunte che escono da esso, *piani nodali* quelli in cui si scinde il cono nodale quando il punto doppio è biplanare e *spigolo nodale* la loro intersezione.

ticolare questo piano passa per una retta della superficie, uno dei due circoli deve scindersi in due rette, epperò il piano stesso deve contenere un'altra retta della superficie; questa seconda retta passa per l'altro punto doppio perchè, da quanto si disse al n. 50 segue, che ogni retta uscente da uno de' punti doppii è incontrata da una retta passante per l'altro.

70. Da ciò che si disse precedentemente (n. 49, *b*) segue che si hanno tre soli coni di Kummer; gli altri due vengono sostituiti da due piani tangenti singolari passanti per la congiungente dei punti doppii. Vi sono tre curve focali aventi ciascuna due punti doppii nei punti doppii della superficie, epperò degenerate ciascuna in due cerchii; le altre due curve focali vengono sostituite da una *quaterna di fuochi* posti su un circolo.

La ciclide [(11) 111] può generarsi in tre modi diversi come inviluppo di una sfera il cui centro percorre una quadrica e che è ortogonale a una sfera fissa (*); in un modo unico come inviluppo di una sfera il cui centro descrive una conica e che si mantiene ortogonale a una sfera fissa. La conica di quest' ultimo modo di generazione è una delle coniche focali delle tre quadriche omofocali corrispondenti alle tre prime generazioni; la corrispondente sfera determina col piano della conica un fascio di sfere i cui punti-sfere sono i punti doppii della superficie e coincidono coi punti comuni alle sfere direttrici dei tre primi modi di generazione.

La ciclide considerata determina un sistema di ciclidi omofocali tale che (n. 53) passano per un punto arbitrario dello spazio due sole superficie del sistema; in particolare vi sono nella serie (n. 57) due superficie di terzo ordine con due punti doppii conici, appartenenti, cioè, alla IV specie di Schläfli.

71. Il caso che ora si presenta ha per simbolo [(11)(11)1]. Combinando linearmente le due equazioni della superficie si può ottenere per rappresentarla un'equazione unica, e precisamente o

$$l\,(x_1^2+x_2^2)+l_5\,x_5^2=0\ ,$$

oppure

$$m\,(x_3^2+x_4^2)+m_5\,x_5^2=0\ .$$

Queste due equazioni, caratteristiche ed uniche per la superficie, mettono in evidenza quattro suoi punti doppii; i primi, che diremo I', I'', sono comuni alle tre sfere:

$$x_1=0\ ,\qquad x_2=0\ ,\qquad x_5=0\ ;$$

gli altri due che diremo II', II'', sono comuni alle tre sfere:

$$x_3=0\ ,\qquad x_4=0\ ,\qquad x_5=0\ .$$

Si può dimostrare, seguendo lo stesso metodo tenuto nel caso [(11)111], che ognuno dei quattro punti doppii così trovati è conico, ma che per ciascuno passano

(*) Tangente alla quadrica nei due punti doppii della superficie.

due sole rette della superficie contenenti ciascheduna un altro punto doppio. Precisamente si trova che stanno sulla superficie le rette:

$$I' II' \; ; \qquad I' II'' \; ; \qquad I'' II' \; ; \qquad I'' II'' .$$

Ognuna di queste passando per due punti doppii della superficie prende il posto (cfr. n[i]. 50 e 69) di quattro delle rette della superficie generale, epperò su questa non vi sono altre rette.

Vi è un solo cono di Kummer (avente il suo centro nel centro della sfera determinata dai quattro punti doppii). La superficie può essere generata in due modi come inviluppo di una sfera il cui centro percorre una conica che è ortogonale a una sfera fissa: le due coniche deferenti sono focali l'una dell'altra. La superficie stessa si può generare in un sol modo come inviluppo di una sfera il cui centro percorre una quadrica e che si mantiene ortogonale a una sfera fissa che la tocca in quattro punti.

Vi è una quartica focale avente quattro punti doppii nei punti doppii della superficie e che quindi si scinde in quattro rette e precisamente nelle $I' II'$, $I' II''$, $I'' II'$, $I'' II''$; inoltre vi sono due quaterne di fuochi, ridotte ciascuna a una coppia di fuochi contati due volte.

La superficie ha quattro piani tangenti singolari due passanti per la retta $I' I''$, e due passanti per la retta II', II''.

Riassumendo si vede che la ciclide $[(11)(11)1]$ ha quattro punti doppii e quattro piani doppii, ha una conica doppia e un cono quadrico inviluppato da piani bitangenti, è di quarto ordine e di classe quarta; insomma la ciclide $[(11)(11)1]$ è correlativa a se stessa.

72. Questa specie di ciclide fu scoperta da Dupin (*) cercando il tipo generale della superficie che hanno tutte le loro linee di curvatura circolari; egli la generava come inviluppo di una delle serie di posizioni che può assumere una sfera che si muove toccando costantemente tre sfere fisse, e riconobbe anzi che vi sono due tali modi di generazione; in ogni modo di generazione la sfera generatrice percorre una conica, e le due coniche a cui per tal modo si giunge sono focali l'una dell'altra e sono i luoghi dei centri di curvatura della superficie. A queste proprietà trovate da Dupin per la sua ciclide, altre ne furono aggiunte in seguito dai geometri che si occuparono di questa superficie: anche recentemente essa formò oggetto di interessanti studii analitici di Cayley (**) e Lemonnier (***).

Prima di abbandonare la considerazione della ciclide di Dupin, vogliamo fare un'osservazione sulla realtà dei suoi punti doppii. Questi sono determinati come intersezione della sfera S_5 coi cerchi $S_1\, S_2$ e $S_3\, S_4$: ora siccome di cinque sfere a due a due ortogonali una almeno ha raggio imaginario (n. 9) così tutti i punti doppii non

---

(*) *Applications de Géometrie et de Mécanique,* Paris, 1822, pag. 200-210.
(**) *On the Cyclide* (Quarterly Journal of Mathematics, t. XII, pag. 148).
(***) *Étude analytique sur la Cyclide* (Nouvelles Annales de Mathématiques. II série, t. IX, p. 514).

possono essere reali; saranno tutti imaginarii se S_5 ha raggio imaginario, due soli di essi saranno reali se una sola delle altre quattro sfere ha raggio imaginario, ecc.: ad ogni modo la *ciclide di Dupin non può avere più di due punti doppii reali.* — Alla stessa conclusione si giunge rammentando che i punti doppii della ciclide di Dupin sono i vertici d'un quadrilatero gobbo, di cui quattro lati incontrano l'assoluto.

La ciclide di Dupin determina un sistema di ciclidi omofocali tale che per ogni punto passa un'unica superficie del sistema (n. 53); in particolare nel sistema è contenuta una superficie di terzo ordine. Questa ha quattro punti doppii conici epperò è la reciproca della superficie romana di Steiner; essa porta il numero XVI nella classificazione di Schläfli. Klein si servì di questa notevole superficie per dedurre, mediante opportune deformazioni, le varie forme che possono presentare le superficie di terzo ordine (*).

73. I casi che ci restano da considerare in questa prima forma canonica non dànno che superficie degenerate.

Nel caso [(111) 11] combinando le due equazioni della superficie si ottiene per rappresentare l'equazione unica

$$l_4 x_4^2 + l_5 x_5^2 = 0 \quad ,$$

epperò la superficie stessa si scinde nelle due sfere:

$$\sqrt{l_4}\, x_4 \pm i \sqrt{l_5}\, x_5 = 0 \quad ,$$

le quali non sono in alcuna posizione notevole; uno dei complessi quadratici determinanti, colla quadrica dei punti, la superficie si scinde in questo caso in due complessi lineari; le due sfere ottenute sono i luoghi dei punti sfere di questi ultimi, ma possono però ancora considerarsi in due modi diversi come luogo dei punti-sfere d'un complesso quadratico semplicemente speciale.

Nel caso [(111)(11)] l'equazione della superficie è riducibile alla forma:

$$x_4^2 + x_5^2 = 0 \quad ,$$

onde essa si scinde in

$$x_4 \pm i x_5 = 0 \quad ;$$

rammentando che $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ rappresentano due sfere ortogonali, si vedrà che queste due equazioni rappresentano due punti-sfere.

Infine nel caso [(1111)1] l'equazione della superficie può ridursi alla forma:

$$x_5^2 = 0 \quad ,$$

epperò la ciclide degenera in una sfera contata due volte.

(*) V. la bellissima Memoria: *Ueber Flächen dritter Ordnung* (Mathematische Annalen, Bd. VI, pag. 551).

§ 4. *Seconda forma canonica.*

74. Le equazioni della superficie siano:

$$(1) \ldots\ldots \quad \begin{cases} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + 2\ a\ x_1 x_5 = 0 \\ R_1^2 x_1^2 + R_2^2 x_2^2 + R_3^2 x_3^2 + R_4^2 x_4^2 + 2\ R_{15} x_1 x_5 = 0\ . \end{cases}$$

Dalla seconda di queste risulta (n. 7), che il sistema di riferimento è composto di quattro sfere $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ a due a due ortogonali e di uno dei punti d'intersezione di tre di esse, $s_2\ s_3\ s_4$, considerato come un punto-sfera s_5. Le coordinate x_i di un punto sono (n. 11) proporzionali alle sue potenze rispetto a cinque sfere S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 di cui ecco la disposizione. S_1 è ortogonale ad s_2, s_3, s_4 e passa pel punto-sfera s_5 (che è uno dei punti ad esse comune) epperò si riduce al punto-sfera s_5; S_2, S_3, S_4, passano pel punto s_5 e sono ortogonali rispettivamente alle terne di sfere s_3, s_4, s_1; s_4, s_1, s_2; s_1, s_2, s_3: infine S_5 forma con s_1, s_2, s_3, s_4 un sistema di cinque sfere a due a due ortogonali.

Dunque le sfere:

$$x_2 = 0\ , \qquad x_3 = 0\ , \qquad x_4 = 0$$

hanno comune il punto-sfera:

$$x_1 = 0\ ,$$

cioè il punto-sfera s_5.

Ora combinando fra loro le equazioni (1) si può ottenere per rappresentare la superficie l'equazione unica:

$$l_1 x_1^2 + l_2 x_2^2 + l_3 x_3^2 + l_4 x_4^2 = 0\ ;$$

quest'equazione, caratteristica ed unica per la superficie, ci prova che per questa è doppio il punto soddisfacente alle quattro equazioni:

$$x_1 = 0\ ; \qquad x_2 = 0\ ; \qquad x_3 = 0\ ; \qquad x_4 = 0\ ;$$

cioè il punto-sfera s_5: è poi facile dimostrare che esso è un punto conico non presentante alcuna particolarità. Dei sei raggi nodali che escono da esso, quattro appartengono alla superficie e contano due volte ciascuna fra le rette della superficie stessa; su questa vi sono poi ancora otto rette semplici (cfr. n. 50).

Per determinare il numero e riconoscere la disposizione delle rette si può (oltre al metodo esposto al n. 50) anche ricorrere ad una superficie di terzo ordine avente un punto doppio per dedurne (cfr. n. 67) la superficie di quarto ordine di cui trattiamo con una trasformazione per raggi reciproci. Ritenendo le notazioni usate prima (n. 67) noi supporremo che delle dieci rette che incontrano la a_6 vengono a coincidere b_4 e c_{56}, b_5 e c_{46}. Si dimostra allora facilmente (*) che verranno a coincidere anche

(*) Per questa, ed altre proprietà delle superficie di terzo ordine con punti doppii, si veda l'ultimo capitolo dell'opera di Sturm: *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, 1867.

a_1 e c_{23} in una retta che diremo A_1, a_2 e c_{31} in una che diremo A_2, a_3 e c_{12} in una che chiameremo A_3, e infine b_6 e c_{45} in una che chiameremo A_4.

Inoltre dalla nota configurazione formata dalle rette di una superficie di terzo ordine risulta che le quattro rette A_i s'incontrano a due a due senza stare tutte nello stesso piano, epperò esse passano tutte pel medesimo punto, il quale sarà doppio per la superficie. — Facendo ora l'indicata trasformazione quadratica della superficie di terzo ordine, si otterrà una superficie di quarto ordine su cui staranno le rette in cui si trasformano:

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & a_4 \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & a_5 \end{matrix} .$$

Indicando collo stesso simbolo una retta della superficie di terzo ordine e la sua trasformata, avremo che sulla superficie di quarto ordine si hanno quattro rette $A_1 A_2 A_3 A_4$ passanti per lo stesso punto, doppio per la superficie e di più otto rette la cui disposizione si ottiene da quella esposta (n. 67) nel caso generale facendo:

$$a_1 = c_{23} = A_1 , \quad a_2 = c_{31} = A_2 , \quad a_3 = c_{12} = A_3 , \quad b_6 = c_{45} = A_4 .$$

Si ottiene così che:

A_1	è incontrata da			c_{14}	c_{15}
A_2	»			c_{24}	c_{25}
A_3	»			c_{34}	c_{35}
A_4	»			a_4	a_5
c_{14}	»	A_1	c_{25}	c_{35}	a_4
c_{15}	»	A_1	c_{24}	c_{34}	a_5
c_{24}	»	A_2	c_{15}	c_{35}	a_4
c_{25}	»	A_2	c_{14}	c_{34}	a_5
c_{34}	»	A_3	c_{15}	c_{25}	a_4
c_{35}	»	A_3	c_{14}	c_{24}	a_5
a_4	»	A_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}
a_5	»	A_4	c_{51}	c_{52}	c_{53} :

Chiamando binarie le rette A_i (perchè vengono a sostituire due rette della superficie più generale) semplici le altre otto, potremo riassumere questo quadro nella proposizione (v. n. 50): *Ogni retta binaria d'una ciclide avente un punto doppio è incontrata da altre due rette semplici, ogni retta semplice da una retta binaria e da tre rette semplici.* Vi è una sola quaterna doppia, quella costituita dalle otto rette semplici:

$$\begin{matrix} a_4 & c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ a_5 & c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{matrix} ;$$

si possono poi formare ancora sei sistemi di otto rette, le quali pure possono chiamarsi quaterne doppie quantunque in ogni quaterna vi siano due rette che si secano, sono i seguenti:

$$\begin{matrix} A_1 & c_{42} & c_{43} & A_4 \\ a_4 & A_3 & A_2 & c_{15} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_1 & c_{52} & c_{53} & A_4 \\ a_5 & A_3 & A_2 & c_{14} \end{matrix} \;;$$

$$\begin{matrix} A_2 & c_{41} & c_{43} & A_4 \\ a_4 & A_3 & A_1 & c_{25} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_2 & c_{51} & c_{53} & A_4 \\ a_5 & A_3 & A_1 & c_{24} \end{matrix} \;;$$

$$\begin{matrix} A_3 & c_{41} & c_{42} & A_4 \\ a_4 & A_2 & A_1 & c_{35} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_3 & c_{51} & c_{52} & A_4 \\ a_5 & A_2 & A_1 & c_{34} \end{matrix} \;.$$

75. Due dei coni di Kummer sono sostituiti da uno straordinario (n. 49 a)) avente il vertice nel punto doppio. La superficie può generarsi in quattro modi come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere; uno di questi modi è notevole perchè in esso la sfera generatrice percorre col suo centro una quadrica e passa costantemente per un punto fisso.

Vi sono quattro cicliche focali; una sta sulla sfera di raggio nullo avente il suo centro nel punto doppio; le altre tre hanno in questo un punto doppio, perchè le sfere direttrici dei tre modi di generazione che ammettono sfere non degeneri, toccano le corrispondenti quadriche nel punto doppio.

La superficie in discorso determina un sistema di ciclidi omofocali tale che per ogni punto dello spazio passano tre superficie che appartengono ad esso. Tale sistema contiene tre superficie di terzo ordine; ciascuna ha un punto doppio, conico, generale, epperò appartiene cioè alla II specie di Schläfli.

76. Viste così le proprietà principali della ciclide [2111] passiamo a quella di simbolo [(21)11]. Combinando linearmente le due equazioni della superficie, si può ottenere per rappresentarla l'equazione unica:

$$l_1 x_1^2 + l_2 x_2^2 + l_3 x_3^2 = 0 \;.$$

Questa ci prova che sono doppii per la superficie i punti che soddisfano alle equazioni:

$$x_1 = 0 \;, \qquad x_2 = 0 \;, \qquad x_3 = 0 \;;$$

donde, rammentando ciò che si dimostrò in principio nel n. 74, si conclude che il punto-sfera s_5 è singolare per la superficie. Prendendo, come è lecito:

$$x_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2$$

$$x_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

$$x_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(a_3 x + b_3 y + c_3 z) \;,$$

avremo per equazione della superficie in coordinate cartesiane la seguente:

$$(l_1+l_2+l_3)(x^2+y^2+z^2)^2+4(x^2+y^2+z^2)(\overline{a_2 l_2+a_3 l_3}.x+\overline{b_2 l_2+b_3 l_3}.y+\overline{c_2 l_2+c_3 l_3}.z)+$$
$$+4\{l_2(a_2 x+b_2 y+c_2 z)^2+l_3(a_3 x+b_3 y+c_3 z)^2\}=0\ ;$$

da essa segue che il cono nodale del punto singolare considerato si riduce alla coppia di piani:

$$\sqrt{l_2}(a_2 x+b_2 y+c_2 z)\pm i\sqrt{l_3}(a_3 x+b_3 y+c_3 z)=0\ .$$

I sei raggi nodali uscenti da questo punto biplanare sono le intersezioni dei due piani di cui ora si scrissero le equazioni, col cono:

$$x^2+y^2+z^2=0\ ,$$

e col piano:

$$l_2(a_2 x+b_2 y+c_2 z)+l_3(a_3 x+b_3 y+c_3 z)=0\ ;$$

i primi quattro hanno comuni colla superficie più di quattro punti, epperò sono rette della medesima; gli altri due coincidono nella retta:

$$a_2 x+b_2 y+c_2 z=0\ ;\qquad a_3 x+b_3 y+c_3 z=0\ .$$

Dunque in questo caso la superficie ha un punto doppio biplanare speciale in quanto due dei raggi nodali coincidono nello spigolo nodale; per esso passano quattro rette della superficie. Queste sono le uniche rette che esistano sulla superficie: infatti questo caso si ottiene dal caso [(11)111] facendo coincidere (*) i due punti doppii che allora si avevano; così facendo le otto rette della superficie che si avevano vengono a coppie a coincidere nelle quattro che ora trovammo. La stessa considerazione ci prova che si hanno due cicliche focali scisse in due cerchii fra loro tangenti e una quaterna focale composta di due coppie di punti poste su due secanti dell'assoluto.

Si hanno due soli coni di Kummer; gli altri due sono sostituiti da due piani tangenti singolari della superficie. La ciclide può generarsi in due modi come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere, ma in un modo unico come inviluppo di una serie semplicemente infinita.

Una ciclide [(21)11] determina un sistema di secondo grado di ciclidi omofocali, nel quale sono contenute due superficie di terzo ordine; siccome ognuna di queste ha un punto doppio biplanare da cui escono cinque rette della superficie, una delle quali coincide collo spigolo nodale, così esse appartengono alla specie V di Schläfli.

77. Nel caso [21(11)] la superficie ha tre punti doppii conici. Ciò risulta sia da una ricerca diretta, sia dal confronto dei risultati ottenuti nei due casi [2111]

(*) Il dedurre le singolarità di una specie di ciclide da quelle di un'altra facendo coincidere punti singolari che in quest'ultima erano distinti, è conseguenza del servirsi nella classificazione del metodo di Weierstrass; come i varii sistemi di divisori elementari e le varie forme canoniche, date da questo, si possono distribuire in categorie tali che i varii sistemi o risp. le varie forme d'una stessa si possono ottenere con successivi passaggi al limite, così si potrà fare per dedurre l'una dall'altra le varie specie di figure geometriche rappresentate da queste. Il Weiler fece già uso varie volte di questo metodo nella sua classificazione dei complessi quadratici di rette.

(n. 74) e [111(11)] (n. 70). I tre punti doppii sono di due specie; per uno di essi, che diremo A, passano due sole rette della superficie, ognuna delle quali deve contarsi quattro volte fra le rette della superficie perchè contiene uno degli altri due punti doppii A_1 e A_2. Per A_i passano invece, oltre alla $A_i A$, due rette della superficie. Ogni retta uscente da A_1 è incontrata da una uscente da A_2.

Il confronto coi casi citati ci dimostra l'esistenza di due cicliche focali: una sta sul punto-sfera A ed ha per punti doppii A_1 e A_2 epperò si scinde in due cerchii che si secano in questi due punti: l'altra ha tre punti doppii in AA_1A_2 onde si scinde in una conica passante per A_1 e A_2 e in due sue secanti aventi comune il punto A.

78. Vi è un cono di Kummer ordinario, e un cono straordinario; gli altri sono sostituiti da una coppia di piani tangenti singolari passanti per la retta A_1A_2.

Infine vi è una quaterna di fuochi, in cui vi sono due fuochi coincidenti.

Osserviamo che le quattro superficie di simboli:

[11111], [2111], [111(11)] [21(11)] [(11)(11)1]

sono ciascuna più generale della seguente, perchè hanno ordinatamente 0, 1, 2, 3, 4 punti doppii le ultime quattro corrispondono alle specie *a)*, *b)*, *d)*, *e)* di Sturm (*); la loro rappresentazione piana fu indicata da Korndörfer (**).

Il sistema di ciclidi omofocali alla ciclide data di specie [21(11)] è tale che per ogni punto dello spazio passano due sue superficie; in particolare esso contiene due superficie di terzo ordine, aventi ciascuna tre punti doppii generali e appartenenti alla specie VIII di Schläfli.

79. Passando ora al caso [(21)(11)] e confrontandolo coi due casi [(21)11] e [21(11)] vedremo che la superficie ha due punti doppii conici generali e un punto doppio biplanare specializzato come nel caso [(21)11] per quanto riguarda i raggi nodali che non sono rette della superficie. Ma siccome [(21)(11)] si ottiene da [(11)(11)1] facendo coincidere due dei punti doppii che si avevano, in questo caso non posti su una stessa retta della superficie, così in questo caso vi sono solo due rette della superficie, quelle cioè che congiungono il punto biplanare ai due punti doppii. La stessa considerazione ci prova che non vi sono curve focali, ma solo due quaterne di fuochi, una delle quali è ridotta a una coppia di fuochi l'altra a un fuoco unico. Non vi sono coni di Kummer, chè questi sono sostituiti da due coppie di piani tangenti singolari.

La superficie non è generabile come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere, ma lo è in due modi come inviluppo di una serie semplicemente infinita.

Il sistema di ciclidi omofocali alla ciclide [(21)(11)] è di primo grado, ond'è che nella serie stessa vi è un'unica superficie di terzo ordine; questa appartiene alla XVIII specie di Schläfli.

(*) V. la citata Memoria: *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden* u. s. w. (Mathematische Annalen, Bd. IV, pag. 268-270).

(**) *Mathem. Annalen* Bd. I, p. 592, 611 e Bd. II, p. 50, 58.

80. Negli altri due casi che restano da considerare in questa forma canonica la ciclide degenera.

Nel caso [(211)1] si può prendere per equazione della superficie la seguente:

$$l_1 x_1^2 + l_4 x_4^2 = 0 \ ,$$

donde segue che la ciclide si scinde in due sfere fra di loro tangenti; nel caso [2(111)] è lecito assumere come equazione della superficie la

$$l_1 x_1^2 + 2 l x_1 x_5 = 0 \ ,$$

la quale si scinde in

$$x_1 = 0$$

rappresentante un punto-sfera e

$$l_1 x_1 + 2 l x_5 = 0 \ ,$$

rappresentante una sfera non passante per quel punto.

Infine nel caso [(2111)] si ha una sfera contata due volte e ridotta a un punto.

§ 5. *Terza forma canonica.*

81. Nel caso [221] le equazioni della superficie siano:

$$(1) \ldots\ldots \quad \begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2) + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{14} x_1 x_4 + 2\, a_{25} x_2 x_5 = 0 \\ R^2 (x_1^2 + x_2^2) + R_3^2 x_3^2 + 2 R_{14} x_1 x_4 + 2 R_{25} x_2 x_5 = 0 \ . \end{cases}$$

L'esame della forma di quest'ultima equazione ci prova che il sistema di riferimento consta di tre sfere $s_1\ s_2\ s_3$ a due a due ortogonali, di un punto-sfera s_4 posto sul cerchio $s_2 s_3$ e di un punto-sfera s_5 posto con s_4 su una secante dell'assoluto. Donde segue poi che le sfere dell'altro sistema sono disposte nel seguente modo: S_1, S_2, S_3 passano pei punti sfere $s_4 s_5$ (epperò hanno per generatrice comune la congiungente questi due punti) e sono ortogonali rispett. alle coppie di sfere s_2, s_3; s_3, s_1; s_1, s_2; infine S_4 passa pel punto-sfera s_5, S_5 per s_4 ed entrambe sono ortogonali alle tre sfere $s_1 s_2 s_3$.

Da tutto ciò segue che le quattro sfere:

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 0 \ , \quad x_4 = 0 \ ,$$

hanno comune il punto-sfera s_5, mentre

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 0 \ , \quad x_5 = 0 \ ,$$

hanno comune il punto-sfera s_4.

Combinando linearmente le due equazioni (1) si possono ottenere due equazioni della forma:

$$l(x_1^2 + x_2^2) + l_3 x_3^2 + 2\ l' x_1 x_4 = 0 \ ,$$

$$m(x_1^2 + x_2^2) + m_3 x_3^2 + 2\, m' x_2 x_5 = 0 \ ,$$

ognuna delle quali è sufficiente a rappresentare completamente la superficie che studiamo. La prima ci prova esser doppio per la superficie il punto:

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 0 \ , \quad x_4 = 0 \ ,$$

cioè il punto-sfera s_5, la seconda invece ci dimostra che è doppio per la superficie il punto:

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 0 \ , \quad x_5 = 0 \ ,$$

cioè il punto-sfera s_4. Dunque *la ciclide* [221] *ha due punti doppii posti su una secante dell'assoluto* (*).

82. Per ogni punto doppio passano tre rette della superficie fra cui è sempre compresa la congiungente dei due punti doppii. Per vedere se sulla superficie vi siano altre rette e, nel caso affermativo, riconoscerne la disposizione ricorriamo, come già facemmo in casi precedenti, alla trasformazione di una superficie di terzo ordine.

Ritenendo sempre le notazioni del n. 67, supponiamo che nella superficie cubica le rette b_2, b_3, b_4, b_5 vengano a coincidere rispettivamente con c_{36}, c_{26}, c_{56}, c_{46} risulta, allora che le rette a_1, a_2, a_3, b_6 coincideranno rispettivamente colle rette c_{23}, c_{31}, c_{12}, c_{45}, e le rette a_1, a_4, a_5, b_6 rispettivamente colle c_{45}, c_{15}, c_{14}, c_{23}; di più le quattro rette a cui si ridussero a_1, a_2, a_3, b_6, c_{23}, c_{31}, c_{12}, c_{45} passano per un punto doppio B delle superficie, le altre quattro passano per un punto doppio C; siccome poi, per ciò ora si disse, a_1 e b_6 coincidono tanto con c_{23} come con c_{45}, così la congiungente i due punti doppii conta per quattro delle rette delle superficie di cui ora parlammo. Concludendo, la superficie di terzo ordine ha: 1° per retta quaternaria la congiungente A dei due punti doppi (la quale prende il posto delle a_1, c_{23}, c_{45}, b_6), 2° quattro rette binarie: due, B', B'' passanti pel punto doppio B (di cui la prima sostituisce le rette a_3, c_{12}, la seconda le rette a_2, c_{13}), due C', C'' passanti pel punto doppio C, di cui la prima fa le veci di a_{42}, c_{51}, l'altra fa le veci di a_5, a_{14}. La conica che corrisponde a una sezione della superficie fatta con un piano passante per la retta a_6 è incontrata ancora dalle rette semplici c_{24}, c_{34}, c_{25}, c_{35}. Ciò che ora si disse per la superficie di terzo ordine, si trasporta alla ciclide che studiamo, mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci; dunque potremo dire: *La ciclide* [221] *ha per una sua retta la congiungente* A *dei due punti doppii (retta quaternaria); per ognuno di questi passano due rette (binarie) della superficie* B', B''; C', C''; *sulla superficie vi sono ancora quattro rette (semplici).* Da ciò che si dimostrò prima (n. 67) sulla disposizione delle rette della ciclide generale deduciamo che:

(*) Questa corrisponde alla specie *c)* di STURM (l. c., pag. 268); per la sua rappresentazione piana vedi *Math. Annalen*, Bd. II, p. 40.

la retta	B'	incontra le rette	A	B''	c_{34}	c_{35}
»	B''	»	A	B'	c_{24}	c_{25}
»	C'	»	A	C''	c_{24}	c_{34}
»	C''	»	A	C'	c_{25}	c_{35}
»	c_{34}	»	B'	C'	c_{35}	
»	c_{24}	»	B''	C'	c_{25}	
»	c_{25}	»	B''	C''	c_{34}	
»	c_{35}	»	B'	C''	c_{24}	;

il che può riassumersi dicendo: *Ogni retta della superficie uscente da un punto doppio incontra, oltre alla sua compagna e alla retta quaternaria, due rette semplici delle superficie; ogni retta semplice incontra due rette binarie uscenti da punti doppii diversi e un'altra retta semplice; infine la retta quaternaria non incontra che le rette binarie.*

Le rette della superficie costituiscono quattro quadrilateri gobbi:

$$AB'C'c_{34}\ ;\quad AB'C''c_{35}\ ;\quad AB''C'c_{24}\ ;\quad AB''C''c_{25}\ .$$

83. La ciclide [221] ammette un cono di Kummer ordinario e due coni straordinarii. Essa ha tre cicliche focali: due son poste sui punti-sfere che coincidono coi punti doppii e hanno ciascuna un punto doppio in uno di questi: la terza ha due punti doppii nei punti doppii della superficie, epperò si scinde in una cubica gobba ed una sua secante. La superficie può generarsi in tre modi come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere.

Il sistema di ciclidi omofocali alla data è di terzo grado; in particolare in esso sono contenute tre superficie di terzo ordine appartenenti alla specie IV di Schläfli.

84. Il caso che ora dobbiamo trattare ha per simbolo [2(21)]; combinando linearmente le due corrispondenti equazioni canoniche della superficie, si può ottenere una equazione rappresentatrice unica che può porsi sotto una delle due seguenti forme:

$$l(x_1^2+x_2^2)+2\,l'x_1x_4=0\ .$$
$$m(x_1^2+x_2^2)+m_3x_3^2+2\,m'x_2x_5=0\ ,$$

le quali mostrano che la superficie ha ancora due punti singolari posti su una secante dell'assoluto, ma che uno di essi è biplanare speciale perciò che due dei suoi raggi nodali coincidono collo spigolo nodale.

Il caso che ora studiamo si deduce dal caso già trattato (n. 77) [21(11)] facendo coincidere in un punto biplanare i due punti doppii che allora designavamo con A_1 e A_2. Da tale considerazione risulta che sulla superficie vi sono soltanto tre rette; una è la congiungente dei due punti singolari, le altre due escono dal punto biplanare.

Non vi sono coni di Kummer, si ha solo un cono straordinario, gli altri sono sostituiti da due piani tangenti singolari. Vi è una sola curva focale situata su un

punto-sfera e degenerata in due circoli fra di loro tangenti; poi vi è una quaterna di fuochi posti su un punto-sfera e in cui due fuochi coincidono. La superficie può generarsi in un sol modo come inviluppo di ∞^2 sfere e in un modo come inviluppo di ∞^1 sfere.

Il sistema di ciclidi omofocali alla superficie che stiamo studiando è di secondo grado, epperò esso contiene due superficie di terzo ordine; queste appartengono alla X specie di Schläfli.

85. Nel caso rappresentato simbolicamente con [(22)1], combinando fra loro le due equazioni della superficie si può ottenere per rappresentarla, l'equazione unica:

$$l(x_1^2+x_2^2)+l'x_3^2=0 .$$

Quest'equazione, caratteristica ed unica per la superficie, ci fa vedere che per questa sono doppii tutti i punti pei quali si ha:

$$x_1=0 , \quad x_2=0 , \quad x_3=0 ,$$

cioè tutti i punti della generatrice comune alle tre sfere S_1, S_2, S_3 (n. 81). Ora, quando una superficie di quarto ordine ha per linee doppie una conica ed una sua secante (più generalmente una cubica gobba), ogni retta condotta per un punto arbitrario della superficie a secarle entrambe ha comuni colla superficie stessa cinque punti epperò sta totalmente in essa; la superficie contiene allora infinite rette, epperò è una rigata. Dunque nel caso che trattiamo, [(22)1], la ciclide si riduce ad una rigata di 4° grado avente per linee doppie il cerchio imaginario all'infinito e una sua secante; si può dimostrare che essa è correlativa a se stessa, epperò essa occupa il secondo posto nella classificazione di Cremona (*), il settimo in quella di Cayley (**).

I coni di Kummer sono sostituiti dalla retta doppia (come luogo, la quale è anche doppia come inviluppo) e da un cono quadrico. Le cicliche focali si riducono ad una sola scissa in due rette sghembe ed una loro secante contata due volte, poi vi è una quaterna focale composta di due fuochi posti sulla retta doppia della superficie.

La rigata di quarto grado avente per linea doppia il cerchio imaginario con una sua secante può generarsi in un sol modo come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere.

Anche questa specie di ciclide determina un sistema di ciclidi omofocali composto di rigate; in esso è contenuta una rigata di terzo ordine, la XXII nella classificazione di Schläfli, la 1ª nella classificazione fatta da Cayley (***) delle rigate di terzo grado.

(*) *Sulle superficie gobbe di quarto grado* (Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1868, serie 2ª, t. VIII).

(**) *Second Memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1864, vol. 154).

(***) L. c., p. 568.

86. L'ultimo caso da considerare in questa forma è quella che ha per simbolo $[(221)]$; combinando opportunamente le corrispondenti equazioni si ottiene per rappresentare la superficie l'equazione unica:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \ ,$$

che si scinde nelle due:

$$x_1 \pm i x_2 = 0 \ ,$$

Siccome le sfere $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ hanno comune (n. 81) una generatrice, così lo stesso accade per le due sfere $x_1 \pm i x_2 = 0$; dunque nel caso $[(221)]$ la ciclide si scinde in due sfere aventi comune una generatrice.

§ 6. *Quarta forma canonica.*

87. Nel caso $[311]$ le equazioni della ciclide sono:

$$(1) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a(x_1^2 + 2x_4 x_5) + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 a_{14} x_1 x_4 = 0 \\ R^2(x_1^2 + 2x_4 x_5) + R_2^2 x_2^2 + R_3^2 x_3^2 + 2 R_{14} x_1 x_4 = 0 \end{array} \right\} .$$

Da queste equazioni risulta che le sfere fondamentali $s_1 s_2 s_3$ sono a due a due ortogonali, che s_4 è un punto-sfera del cerchio s_2, s_3; che infine s_5 è un punto-sfera comune alle sfere $s_1 s_2 s_3$. — Le altre cinque sfere S_i sono disposte nel seguente modo: S_1, S_2, S_3 passano pei punti-sfere s_4, s_5 e sono rispettivamente ortogonali alle coppie di sfere s_2, s_3; s_3, s_1; s_1, s_2; S_4 coincide col punto-sfera s_5; S_5 passa pel punto-sfera s_4 ed è ortogonale alle sfere s_1, s_2, s_3. Di più, la costruzione effettiva della seconda quintupla di sfere, prova che S_2 coincide con s_2 e S_3 con s_3.

Combinando convenientemente le equazioni (1), otterremo per rappresentare analiticamente la superficie, l'equazione:

$$l_2 x_2^2 + l_3 x_3^2 + 2 l x_1 x_4 = 0 \ ,$$

la quale è caratteristica ed unica per la superficie che studiamo. Essa ci prova che il punto-sfera s_5 comune alle sfere $S_1 S_2 S_3$ e coincidente col punto-sfera S_4 è singolare per la superficie; di più se assumiamo, com'è lecito,

$$\begin{array}{l} x_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax \\ x_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2by \\ x_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2cz \\ x_4 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \ , \end{array}$$

otterremo per equazione della superficie in coordinate cartesiane la seguente:

$$(2) \ldots \left\{ \begin{array}{c} (l_2 + l_3 + 2l)(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2)(alx + bl_2 y + cl_3 z) \\ + 4(b^2 l_2 y^2 + c^2 l_3 z^2) = 0 \end{array} \right\} .$$

Da questa risulta che il punto singolare della superficie, non è conico, ma biplanare generale, che quattro dei corrispondenti raggi nodali sono rette della superficie e che gli altri due sono distinti.

Ognuna delle quattro rette così trovate della superficie conta per tre; sulla superficie vi sono ancora quattro rette semplici, ciascuna delle quali seca una delle rette della superficie uscenti dal punto biplanare.

Vi sono due coni di Kummer ed un cono straordinario (che prende il posto di tre coni di Kummer). Rammentando ciò che si disse nel caso [2111], si vedrà che le tre cicliche focali sono di due specie; l'una sta sul cono circoscritto dal punto singolare all'assoluto ed ha in questo punto un punto doppio, le altre due stanno su sfere ed hanno ciascuna una cuspide nel punto biplanare della superficie.

La ciclide [311] può generarsi in tre modi come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere.

Il sistema di ciclidi omofocali è di terzo grado; le tre superficie di terzo ordine che gli appartengono e che passano per un punto qualunque sono della specie III di Schläfli.

88. Passando ora alla ciclide avente per simbolo [3(11)], vediamo che per rappresentarla può servire l'equazione unica:

$$m\,(x_1^2 + 2\,x_4 x_5) + 2\,m'x_1 x_4 = 0\ ,$$

la quale mostra che la superficie ha (oltre al punto biplanare del caso precedente) due punti conici, quelli cioè in cui le due sfere S_1, S_5 incontrano la sfera di raggio nullo S_4.

Inoltre l'equazione (2) del numero precedente può servire anche per questo caso purchè in essa si faccia:

$$b = c\,(=\alpha)\ ,\qquad l_2 = l_3\,(=l')\ ;$$

essa allora mutasi nella seguente:

$$(3)\ldots\quad (l+l')\,(x^2+y^2+z^2)^2 - 2\left[a\,l\,x - a\,l'\,(y+z)\right](x^2+y^2+z^2) + \alpha^2\,l'\,(y^2+z^2) = 0\ ;$$

questa ci prova che pel punto biplanare passano soltanto due rette della superficie ognuna delle quali contiene uno dei punti conici; per ciascuno di questi passa ancora una sola retta della superficie. Oltre a queste quattro non vi sono sulla superficie altre rette.

Le specialità della ciclide che stiamo studiando si possono confrontare con quelle della ciclide [21(11)] di cui essa è caso particolare.

Non vi sono coni di Kummer, ma solo un cono straordinario (che prende il posto di tre ordinarii); gli altri due sono sostituiti da due piani tangenti singolari passanti per la congiungente dei due punti conici. Vi è poi una ciclica focale posta su una sfera di raggio nullo e scissa in un cerchio e due rette secantisi su di esso, e una quaterna di fuochi in cui tre fuochi vennero a coincidere. La superficie può generarsi in un modo come inviluppo di ∞^2 e in un modo come inviluppo di ∞^1 sfere.

Il sistema di ciclidi omofocali alla ciclide [3(11)] è di secondo grado e comprende due superficie di terzo ordine appartenenti alla XIII specie di Schläfli.

89. Quando si verifica il caso [(31)1] l'equazione della superficie può in un solo modo porsi sotto la forma

$$l_3 x_3^2 + 2\, l\, x_1 x_4 = 0 \ .$$

Servendoci di questa, potremo dimostrare che il punto singolare che verifica le tre equazioni:

$$x_1 = 0 \ , \qquad x_3 = 0 \ , \qquad x_4 = 0$$

è uniplanare. Infatti, è lecito prendere:

$$x_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\, a\, x$$
$$x_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\, c\, z$$
$$x_4 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \ ,$$

e allora si ha per equazione della superficie, in coordinate cartesiane, la seguente:

$$(4) \ldots \quad (l_3 + 2\, l)(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4\,(x^2 + y^2 + z^2)(a\, l\, x + c\, l_3\, z) + 4\, c^2 l_3 z^2 = 0 \ ;$$

da questa segue appunto che tutte le tangenti tripunte della superficie nel punto singolare (origine) stanno nel piano:

$$z = 0 \ ,$$

cioè che il punto singolare è uniplanare. Pel punto uniplanare passano due sole rette della superficie (le rette $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$) e un raggio nodale (avente per equazioni $x = 0$, $z = 0$).

Sulla superficie non vi sono altre rette: ciò risulta considerando che il caso [1(31)], che trattiamo, è più particolare del caso [11(21)], già considerato al n. 76, e che quello può ricavarsi da questo.

Vi è una sola ciclica focale scissa in un cerchio e due rette che si secano in un suo punto e stanno in un suo piano tangente; vi ha una quaterna focale posta su un cerchio di raggio nullo, della quale due fuochi coincidono nel centro del cerchio stesso; così vi è un solo cono di Kummer, gli altri sono sostituiti da piani singolari. La superficie può generarsi in un modo sia come inviluppo di una serie doppiamente infinita, sia come inviluppo di una serie semplicemente infinita di sfere.

La serie di ciclidi omofocali alla ciclide [(31)1] è di secondo grado, epperò contiene due superficie di terzo ordine; queste appartengono alla XII specie di Schläfli.

90. Finalmente nel caso [(311)] per equazione della superficie si può prendere:

$$x_1 x_4 = 0 \ ,$$

onde la superficie si scinde in una sfera e in un punto-sfera posto su di essa.

§ 7. *Quinta forma canonica.*

91. Quando la ciclide ha per simbolo [32], può rappresentarsi colle due equazioni:

$$(1)\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1(x_1^2+2x_3x_4)+2\,a_2x_2x_5+a_3(x_2^2+2x_3x_1)=0 \\ R_1^2(x_1^2+2x_3x_4)+2R_{25}x_2x_5+R_2^2(x_2^2+2x_3x_1)=0 \end{array} \right\} .$$

Dall'esame della seconda di queste equazioni risulta (n. 7) che il sistema di riferimento è composto di due sfere $s_1 s_2$ fra di loro ortogonali e di tre punti-sfere $s_3 s_4 s_5$, dei quali s_3 sta su s_1 e con s_5 su una secante dell'assoluto, s_4 sta su s_1 e s_2 e con s_5 su una secante dell'assoluto, s_5 sta su s_2 e con s_3, s_4 su due secanti dell'assoluto.

Il sistema delle sfere fondamentali è formato come segue: La sfera S_1 è ortogonale a s_2 e passa pei punti-sfere s_3, s_4, s_5. S_2 è ortogonale a s_1 e passa per s_3, s_4, s_5 onde coincide con S_5; S_3 è ortogonale a s_1, s_2 e passa per s_4, s_5, onde coincide con S_4; infine S_4 e S_5 sono ortogonali a s_1, s_2 e passano, la prima pei punti s_3, s_5, la seconda pei punti s_3, s_4; tanto s_1 e S_3 come s_2 e S_4 hanno una generatrice comune.

92. Combinando fra loro le equazioni (1) si può ottenere, per rappresentare la superficie, una delle equazioni:

$$l(x_1^2+2x_3x_4)+l'(x_2^2+2x_3x_1)=0$$

$$m(x_2^2+2x_3x_1)+2m'x_2x_5 \qquad =0\ ,$$

la prima delle quali dimostra essere singolare per la superficie il punto che soddisfa alle quattro equazioni:

$$x_1=0\ ,\quad x_2=0\ ,\quad x_3=0\ ,\quad x_4=0\ ,$$

cioè il punto s_5; la seconda invece dimostra che per la superficie è singolare il punto che verifica le quattro equazioni:

$$x_1=0\ ,\quad x_2=0\ ,\quad x_3=0\ ,\quad x_5=0\ ,$$

cioè il punto s_4. Si può poi dimostrare che il secondo dei punti doppii è conico mentre il primo è biplanare e che la loro congiungente appartiene alla superficie.

La superficie in discorso è caso particolare di quella che ha per simbolo [221] e che già studiammo; da questa considerazione si trae con facilità che, oltre alla congiungente dei punti singolari esistono sulla superficie ancora cinque rette; due escono dal punto doppio, una contiene il punto biplanare, le altre non passano nè pel primo, nè pel secondo.

Non vi sono coni di Kummer, ma si hanno due coni straordinarii. Si hanno due cicliche focali poste ciascuna su uno dei coni circoscritti dai due punti doppii all'as-

soluto; quella posta sul cono che corrisponde al punto doppio ha una cuspide nel punto biplanare della ciclide; l'altra si scinde in una cubica gobba e la congiungente dei punti singolari della superficie.

La ciclide [32] può generarsi in due modi come inviluppo di ∞^3 sfere; il sistema di ciclidi ad essa omofocali è di terzo grado; le tre superficie di terzo ordine contenute in esso appartengono alla VI specie di Schläfli.

93. Combinando linearmente le due equazioni della superficie che si hanno pel caso [(32)] si ottiene per rappresentarla l'equazione unica:

$$x_2^2 + 2\, x_3 x_1 = 0 \ .$$

Questa ci prova esser doppii per la superficie i punti pei quali si ha contemporaneamente

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 0 \ ;$$

ora queste sono verificate da tutti i punti della retta che unisce i punti-sfere s_4, s_5, dunque la superficie ha in questo caso una retta doppia donde segue (cfr. n. 85) che la ciclide diviene in questo caso una rigata di 4° grado; per essa la retta doppia (come luogo) rappresenta anche l'inviluppo dei piani bitangenti perchè non vi è alcun cono di Kummer. La rigata di quarto grado ora ottenuta è diversa da quella a cui giungemmo nel caso [(22)1] (n. 85): quella era la II nella classificazione di Cremona, la 7ª in quella di Cayley; questa invece è la IV di Cremona, l'11ª nella nuova classificazione di Cayley (*).

Non vi sono cicliche focali, ma solo una quaterna focale ridotta a un punto della retta doppia.

La serie omofocale è di primo grado; la superficie cubica in essa contenuta è la 2ª delle rigate di terzo grado di Cayley.

§ 8. *Sesta forma canonica.*

94. Nel caso [41] la ciclide può rappresentarsi colle due equazioni:

$$(1) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1^2 + a\,(x_2^2 + 2\, x_3 x_4) + 2\, a'\,(x_2 x_4 + x_3 x_5) = 0 \\ R_1^2 x_1^2 + R^2 (x_2^2 + 2\, x_3 x_4) + 2\, R'^2 (x_2 x_4 + x_3 x_5) = 0 \end{array} \right\} .$$

Esaminando la seconda di queste equazioni dedurremo (n. 7) che le sfere s_1, s_2 sono fra di loro ortogonali e che le altre sfere di riferimento sono ridotte a punti-sfere; di più i punti-sfere s_3, s_5 stanno sul cerchio d'intersezione di s_1 e s_2 mentre il punto-sfera s_4 sta sulla sfera s_1 e col punto-sfera s_5 su una secante dell'assoluto.

(*) Cfr. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes* (Dritte Auflage, 1880, II Theil), p. 440.

Quanto al secondo sistema di sfere S_i, ecco come esso è costituito. S_1 è ortogonale a s_2 e passa pei punti-sfere $s_3\, s_4\, s_5$, onde (indicando, con C_i il centro di s_i) il suo piano tangente in C_5 è $C_2\, C_4\, C_5$ e il suo piano tangente in C_3 passa per $C_2\, C_3$. S_2 è ortogonale a s_1 e passa pei punti C_3, C_4, C_5 onde deve toccare tanto in C_4 come in C_5 il piano $C_1\, C_4\, C_5$ onde si riduce al punto (considerato come sfera) in cui il cono circoscritto da C_3 all'assoluto incontra la retta $C_4\, C_5$. S_3 passa pei punti-sfere s_4, s_5 ed è ortogonale alle sfere s_1 e s_2; il piano ad esso tangente in C_5 è $C_1\, C_2\, C_5$ e dovrebbe passare per la generatrice $C_4\, C_5$ della sfera in discorso: ora siccome in generale i punti $C_1\, C_2\, C_4\, C_5$ non stanno nel medesimo piano, così la sfera S_3 deve ridursi al punto-sfera s_5. S_4 passa pei punti-sfere $s_3 s_5$ ed è ortogonale alle sfere s_1 s_2, onde tocca in C_3 il piano $C_1\, C_2\, C_3$ e in C_5 il piano $C_1\, C_2\, C_5$. Infine la sfera S_5 passa pei punti-sfere s_3, s_4 ed è ortogonale alle sfere $s_1 s_2$, tocca in conseguenza in C_3 il piano $C_1\, C_2\, C_3$.

95. Combinando le equazioni (1) si può, in un modo unico, ottenere, per rappresentare la superficie, l'equazione:

$$(2) \ldots\ldots \qquad l\,(x_2^2 + 2\, x_3\, x_4) + 2\, l'\,(x_2\, x_4 + x_3\, x_5) = 0 \;.$$

Segue da questa equazione che il punto s_5 il quale soddisfa (v. n. prec.) le quattro equazioni:

$$x_2 = 0 \;, \quad x_3 = 0 \;, \quad x_4 = 0 \;, \quad x_5 = 0 \;,$$

è un punto singolare della ciclide [41]. Si verifica poi, usando lo stesso metodo di cui ci servimmo per le ricerche analoghe nei casi precedenti, che esso è biplanare e che di più due delle rette della superficie uscenti da esso coincidono nello spigolo nodale; i due raggi nodali uscenti dal punto biplanare sono distinti.

La superficie in discorso può riguardarsi come caso particolare della ciclide di simbolo [311] già studiata nel § 6; ciò permette di riconoscere con più facilità che in esse si trovano ancora altre due rette che si secano, ognuna delle quali incontra una delle rette uscenti dal punto singolare.

Vi è un solo cono di Kummer, ma di più vi è un cono straordinario. Vi sono due cicliche focali; una, posta su una sfera di raggio nullo, ha una cuspide nel centro di questa; l'altra è scissa in una cubica ed una sua tangente.

La ciclide [41] può considerarsi in due modi, come inviluppo di ∞^2 sfere; essa determina un sistema di terzo grado di ciclidi omofocali, nel quale sono quindi contenute tre superficie cubiche; queste appartengono alla V specie di Schläfli.

96. Per equazione della ciclide [(41)] si può prendere la seguente:

$$x_2^2 + 2\, x_3\, x_4 = 0 \;.$$

Si dimostra senza difficoltà, col solito metodo, che il punto s_5 soddisfacente le equazioni

$$x_2 = 0 \;, \quad x_3 = 0 \;, \quad x_4 = 0 \;,$$

è singolare per la superficie, e che precisamente esso è uniplanare; da esso esce una retta della superficie posta nel piano nodale e due raggi nodali coincidenti. Sulla superficie non v'ha altra retta che quella di cui or ora parlammo.

Non vi è nessun cono di Kummer, e così nessuna ciclica focale; non vi è che una quaterna di fuochi ridotta a due fuochi uno dei quali vale per tre.

La ciclide [(41)] non può che considerarsi in un sol modo come inviluppo di un numero semplicemente infinito di sfere; essa determina un sistema di secondo grado di ciclidi omofocali; le due superficie di terzo ordine che essa contiene appartengono alla XV specie di Schläfli.

§ 9. *Settima forma canonica.*

97. Nell'ultimo caso che dobbiamo considerare la superficie ha il simbolo [5] e può rappresentarsi colle due equazioni:

$$(1)\ldots\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} a(x_1^2+2x_2x_4+2x_3x_5)+2a'(x_2x_5+x_1x_3)=0 \\ R^2(x_1^2+2x_2x_4+2x_3x_5)+2R'(x_2x_5+x_1x_3)=0 \end{array}\right\}.$$

Dalla seconda di queste equazioni risulta (n. 7) che nel sistema di sfere fondamentali vi è una sola sfera propria s_1 e quattro punti-sfere $s_2 s_3 s_4 s_5$ dei quali $s_2 s_4 s_5$ stanno sulla sfera s_1 e son tali che le rette $s_2 s_3$, $s_3 s_4$, $s_4 s_5$ secano l'assoluto.

Da ciò segue poi la disposizione delle sfere S_i. La sfera S_1 è determinata dal dover passare pei punti $s_2 s_3 s_4 s_5$ (essa ha dunque per generatrice le rette $s_2 s_3$, $s_3 s_4$ e $s_4 s_5$ e per piano tangente in s_4 il piano $s_3 s_4 s_5$). La sfera S_2 passa pei punti $s_3 s_4 s_5$ ed è ortogonale ad S_1, per conseguenza essa deve coincidere col punto-sfera s_4. La sfera S_3 è toccata tanto in s_4 come in s_5 dal piano che unisce i punti s_4, s_5 al centro della sfera S_1 onde deve degenerare; siccome deve passare pel punto-sfera s_2, così se circoscriviamo da questo un cono all'assoluto e ne determiniamo il punto a distanza finita che sta sulla retta $s_4 s_5$, questo sarà il punto in cui degenera la sfera S_3. La sfera S_4 è determinata dalle condizioni di passare pei punti-sfere $s_2 s_3 s_5$ ed essere ortogonale ad s_1. La sfera S_5 finalmente passa pei punti $s_2 s_3 s_4$ ed è ortogonale ad s_1.

98. Ciò posto, combiniamo linearmente le equazioni (1) e ricaviamone l'equazione seguente:

$$x_1 x_3 + x_2 x_5 = 0 \quad .$$

Questa basta a rappresentare completamente la ciclide [5] ed è caratteristica per questo caso. Il punto che soddisfa le quattro equazioni:

$$x_1=0\ ,\qquad x_3=0\ ,\qquad x_2=0\ ,\qquad x_5=0\ ,$$

cioè il punto-sfera s_4, è singolare per la superficie. Si dimostra col solito metodo che il punto s_4 è biplanare; delle quattro rette della superficie che escono in generale da

un punto biplanare, tre in questo caso coincidono collo spigolo nodale: sulla superficie vi è un'altra retta (*); pel punto biplanare vanno due raggi nodali posti uno su ciascun piano nodale.

Vi è un solo cono di Kummer straordinario, in cui vennero a coincidere i cinque del caso più generale. Così vi è una sola ciclica focale posta su un punto-sfera e degenerata in una cubica gobba con una sua tangente.

La ciclide [5] può generarsi solo in un modo come inviluppo di una serie doppiamente infinita di sfere; essa determina un sistema di ciclidi omofocali di terzo grado, nel quale sono contenute tre superficie di terzo ordine: queste appartengono alla VII classe di Schläfli.

§ 10. *Riassunto.*

99. Come conclusione delle ricerche fatte per stabilire quali siano le specie, diverse nello spazio di sfere, di superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all'infinito, daremo ora un riassunto dei risultati ottenuti. Ordineremo le ciclidi, non come furono ottenute seguendo il metodo di Weierstrass, ma secondo il numero dei punti singolari in esse esistenti e le specialità che questi presentano; di più aggiungiamo il numero e la specie (nella classificazione di Schläfli) delle superficie di terzo ordine contenute nella serie omofocale.

(*) Si tenga presente che la superficie di cui ora trattiamo può riguardarsi come caso particolare della ciclide avente per simbolo [41].

SUPERFICIE DI QUARTO ORDINE

AVENTI PER LINEA DOPPIA IL CERCHIO IMMAGINARIO ALL' INFINITO

	Simbolo della superficie	NUMERO E SPECIE DEI PUNTI SINGOLARI	Numero delle rette della superficie	Numero delle superficie cubiche contenute nel sistema omofocale	Specie (secondo SCHLÄFLI) delle superficie cubiche contenute nel sistema omofocale
1	[11111]	Ciclide generale senza punti doppii	16	3	I
2	[2111]	Ciclide con un punto conico...............	12	3	II
3	[311]	Ciclide con un punto biplanare generale......	8	3	III
4	[(21)11]	Ciclide con un punto biplanare speciale in ciò che due dei corrispondenti raggi nodali coincidono nello spigolo nodale	4	2	V
5	[41]	Ciclide con un punto biplanare speciale perchè due delle rette della superficie uscenti da esso coincidono nello spigolo nodale...........	5	3	V
6	[5]	Ciclide con un punto biplanare speciale perchè tre rette della superficie uscenti da esso coincidono nello spigolo nodale	3	3	VII
7	[(31)1]	Ciclide con un punto uniplanare	2	2	XII
8	[(41)]	Ciclide con un punto uniplanare speciale perchè da esso esce una sola retta della superficie ...	1	2	XV
9	[(11)111]	Ciclide con due punti conici	8	2	IV
10	[221]	Ciclide con due punti conici posti su una secante del cerchio imaginario all'infinito..........	9	3	IV
11	[32]	Ciclide con un punto doppio conico e uno biplanare posti su una secante del cerchio imaginario all'infinito....................	6	3	VI
12	[2(21)]	Ciclide con un punto conico e uno biplanare speciale come nel caso 4° posti su una secante del cerchio imaginario all'infinito.....	3	2	X
13	[2(11)1]	Tre punti conici...........................	6	2	VIII
14	[3(11)]	Un punto biplanare e due conici............	4	2	XIII
15	[(21)(11)]	Ciclide con due punti conici ed uno biplanare speciale come nei casi 4 e 12	2	1	XVIII
16	[(11)(11)1]	Quattro punti conici (Ciclide di Dupin).......	4	1	XVI
17	[(22)1]	Rigata di 4° grado, 2ª di Cremona, 7ª di Cayley.		1	XXII Cayley 1ª
18	[(32)]	Rigata di 4° grado, 4ª di Cremona, 11ª di Cayley.		1	Cayley 2ª

100. Finalmente non sarà inutile il rammentare quali furono le superficie degeneri che incontrammo:

[(111)11] Due sfere qualunque.

[(211)1] Due sfere fra di loro tangenti.

[(221)] Due sfere aventi una generatrice comune.

[2(111)] Una sfera e un punto-sfera non posto su essa

[(311)] Una sfera e un punto-sfera posto su essa.

[(111)(11)] Due punti-sfere.

[(1111)1] Una sfera doppia.

[(2111)] Un punto-sfera doppio.

Torino, Maggio 1883.

CONTRIBUZIONE ALLA PATOLOGIA

DEL

TESSUTO EPITELIALE CILINDRICO

STUDIO SPERIMENTALE

DEL

Professore L. GRIFFINI

Appr. nell'adunanza del 10 Febbraio 1884

Se si considera anche presentemente la letteratura che riguarda l'epitelio cilindrico, si trova che mentre sono numerosi ed importanti gli studi fatti su questo tessuto allo *stato suo normale*, così che si può dire di conoscere perfettamente la sua struttura e funzione; pochissimo, o quasi nulla, si è studiato riguardo le alterazioni che tale tessuto deve pur subire nei frequenti e svariati processi morbosi delle mucose che esso riveste. Mancano poi, si può dire interamente, metodici studi sperimentali sui processi morbosi più facilmente producibili da uno sperimentatore, come il processo di riproduzione o rigenerazione, in seguito ad artificiali soluzioni di continuo, ed il processo inflammatorio. Tutto ciò parrebbe contrastare col fatto che, essendosi già da tempo istituite da molti sperimentatori ricerche analoghe sull'epitelio pavimentoso stratificato con buonissimi risultati, non si sia poi dagli stessi sperimentatori esteso il loro studio all'altra specie di epitelio cilindrico e vibratile, il quale prende, come dissi, frequente ed importantissima parte nella patologia, se non si pensasse che la poco facile accessibilità delle mucose rivestite da quest'ultima forma di epitelio, probabilmente ha molto contribuito a ritardare tal genere di ricerche. Ora, trovandomi io nel 1874 a lavorare presso il mio chiarissimo maestro il Professore Bizzozero, fui dal medesimo consigliato ad intraprendere metodiche ricerche sperimentali sulla patologia del tessuto epiteliale cilindrico, ed io accettava ben volentieri questo suo consiglio, considerando appunto con lui la mancanza di positive conoscenze in proposito e la necessità di riempiere, il meglio possibile, questa lacuna (1). I risultati ch'io ottenni in questo studio, per buona parte fatto nel 1874 e 1875,

(1) È merito del Prof. Bizzozero d'aver iniziato metodici studi sulla Patologia dei tessuti, indirizzando i suoi allievi in tale studio. Veggansi in proposito i lavori pubblicati nel suo Laboratorio dal 1869 al 1883.

furono tosto da me giudicati così importanti (specialmente riguardo il processo della riproduzione), ch'io ebbi cura di pubblicarli in due comunicazioni preventive (1), nelle quali, specialmente nella seconda comunicazione, diedi una descrizione di *tali risultati così precisa ed estesa*, che non doveva più dubitare d'essermene *con essa assicurata la priorità.* Questa naturale convinzione e sopratutto il vivo desiderio di poter in seguito completare questo mio studio, specialmente riguardo ad alcune particolari questioni, che richiedevano ricerche su un terreno più opportuno di quello, che potevano offrire i mammiferi, fin' allora esclusivamente impiegati nelle mie esperienze, e d'altro lato l'essermi trovato, per seguire un altro ordine di studi, impegnato in numerose ricerche, mi hanno costretto a ritardare così tanto la pubblicazione del lavoro in esteso e corredato di opportune figure. Riferendomi a quel tempo in cui intrapresi il mio studio sulla patologia dell' epitelio cilindrico, posso anche ora asserire d' aver iniziato le mie ricerche (ottenendone già allora i principali risultati) su un terreno quasi vergine, specialmente riguardo il processo di riproduzione di questo tessuto, per il che nulla avrei a riferire qui intorno a lavori sperimentali antecedentemente fatti da altri sullo stesso argomento da me preso a trattare. È però con dispiacere che attualmente io debbo constatare che in Austria furono pubblicati due lavori dal Dottore Otto Drasch, nel primo dei quali *Die physiologische Regeneration des Flimmerepithels der Trachea* (Wiener, Sitzungsb. Bd. 80, III, Abth.), pubblicato nell'Ottobre 1879, *non è fatta alcuna menzione dei risultati da me ottenuti* 3 *e* 4 *anni prima di lui sulla riproduzione o rigenerazione dell' epitelio vibratile tracheale*, sebbene questi risultati fossero stati segnalati tosto nei *Virch. Jahresbericht* (anno 1876), e, quasi contemporaneamente, fosse apparso un' altra relazione dei medesimi nel *Centralblatt für Chirurgie* (anno 1876, N° 4, pag. 53); ma quel ch' è peggio nel secondo lavoro *Zur Frage der Regeneration des Trachealepithels mit Rücksicht auf die Karyokinese und die Bedeutung der Becherzellen* (Wiener, Sitzungsb. Bd. 83, III, Abth.), pubblicato nel Maggio 1881, in una nota a pag. 12, fa una citazione, in cui, essendo trascritto con tutta precisione il titolo, la data della mia seconda ed estesa comunicazione preventiva, lascierebbe credere che egli possegga la medesima; mentre poi dimostrerebbe di non averne letto il secondo capitolo (II. *Riproduzione del tessuto epitelico cilindrico*, pag. 8, 9, 10 e 11), perocchè attribuisce a me, soltanto la *scoperta* (?) fatta nel 1874, che *nella laringe dell'uomo in casi patologici si trova abbondante epitelio pavimentoso tra l'epitelio vibratile.* Ecco quanto scrive: « Einer Unterredung mit Bizzozero verdanke ich die Mittheilung dass *Dr. L. Griffini* (*Contribuzione alla patologia del tessuto epitelico cilindrico.* Dal laboratorio del Prof. G. Bizzozero, Luglio 1875) schon im Jahre 1874 *die Entdeckung machte*, dass sich im menschlichen Kehlkopfe in pathologischen Fällen sehr reichlich Plattenepithel zwischen den Flimmerepithele vorfindet. Ich benütze diese Gelegenheit anzuführen, dass damit eine wichtige Stütze meiner eigenen Ansicht vorliegt ».

---

(1) *Contribuzione alla Patologia generale del tessuto epitelico cilindrico. L'Osservatore*, Gazzetta delle Cliniche di Torino. Luglio 1874.

Idem. *Seconda comunicazione preventiva.* Luglio 1875. *L'Osservatore*, Gazzetta delle Cliniche di Torino.

Ora, io non passerò ad esaminare i due lavori di Drasch, perchè non hanno collo studio mio d'allora un direttissimo rapporto, nè io ammetto le sue vedute sulla significazione delle Becherzellen (ciò che da altri fu già accolto sfavorevolmente); perchè infine dovrò meglio occuparmi di tali studi del Dott. Drasch nel mio lavoro, che deve far seguito a questo; quindi mi limito soltanto a constatare che il merito principale di questi suoi lavori è l'applicazione dei metodi dello studio della cariocinesi alla rigenerazione dell'epitelio vibratile tracheale. Del resto nelle parti in cui si hanno tra il mio ed i lavori di Drasch punti di contatto, io *non posso altro che ravvisare una conferma del mio primitivo studio* (fatto fin dal 1874) *sulla riproduzione in seguito alle depitelizzazioni praticate nella trachea ed utero.*

Nell'esposizione di questa mia memoria raggrupperò i principali fatti da me osservati in tre capitoli, relativi appunto ai tre generi di processi, i quali mi era proposto di studiare.

I.

Riproduzione del tessuto epiteliale cilindrico vibratile.

Lo studio della riproduzione dell' epitelio cilindrico fu specialmente fatto sulla mucosa tracheale e laringea siccome le più facilmente accessibili, ma fu pure tentato negli epitelii cilindrici semplici vibratili o no dell'utero, dell'intestino e della cistifellea, benchè in questi, per ragioni ch' io indicherò, con risultati poco felici. Gli animali impiegati primitivamente furono il cane ed il coniglio, in seguito il pollo, le rane, le anodonte o le *cocciole* di mare e l' anfioxus. Nei cani, conigli e polli, praticava una piccola fistola tracheale per la quale introduceva un raschiatoio a filo ottuso o tagliente e di grandezza varia a seconda dell'animale. La raschiatura si faceva tenendo applicato più o meno leggermente il filo del raschiatoio alla superficie della mucosa e stirandolo verticalmente in alto fino alla fistola. Ogni volta esaminava al microscopio ciò che col raschiatoio asportava per determinare nei singoli casi se la raschiatura era limitata al solo epitelio, o se con questo si fosse trasportato anche del tessuto proprio della mucosa. Cuciva poi la ferita, la quale quasi ogni volta guariva per prima intenzione, ed uccideva gli animali diverso tempo dopo praticata la soluzione di continuo nell'epitelio. In tal modo furono operati 35 animali, cioè 13 cani, 14 conigli ed 8 polli, procurandomi stadii del processo di riproduzione da 3, 6, 9, 14, 20 ore ad 1 giorno, 2, 3, 5 e in un caso a 27 giorni. Le trachee che andava raccogliendo furono tutte trattate col liquido di Müller, poi con alcool debole (70°) e quindi con alcool forte (90°), ed ebbi cura in ogni caso di fare un primo esame per dilacerazione a fresco servendomi come liquido d' aggiunta o dell' umor acqueo dell' animale stesso o d'una soluzione di cloruro sodico a 0,75. In seguito faceva un secondo esame per dilacerazione dopo che dei pezzetti di trachea in corrispondenza della raschiatura avevano soggiornato per 20 o 40 ore in liquido di Müller o in liquidi maceranti e ne conservava i migliori preparati. I pezzi poi trattati col liquido di Müller e con-

venientemente induriti nell'alcool venivano chiusi in gomma per essere tagliati, e le sezioni colorate con carmino neutro o pirocarmino od ematoxilina si chiudevano in glicerina o in soluzione di acetato di potassa o in vernice Damar.

Esaminando la mucosa tracheale degli animali operati che a diverso periodo venivano uccisi, si trovava talora ricoperta la sua superficie interna da uno straterello di muco trasparente ed in corrispondenza della raschiatura una larga striscia di color rosso vivo dovuta a forte iperemia ; talora lungo tutta la raschiatura si osservava un essudato bianco-grigiastro che aveva una larghezza press' a poco eguale a quella del raschiatoio usato ed uno spessore da mezzo ad un millimetro. L' esame microscopico di questo essudato bianco grigiastro, elastico e non filante, fatto per dilacerazione a fresco e poi in sezioni verticali, lasciava scorgere un elegante reticolo di fini fili biancosplendenti nelle cui maglie stavano delle cellule rotonde. L'acido acetico forte, nei preparati per dilacerazione a fresco, faceva scomparire il reticolo. Trattavasi quindi di un essudato fibrinoso. Riguardo alla produzione di questo essudato fibrinoso ho potuto notare che nei cani e nei polli, impiegando un raschiatoio a filo molto ottuso, si produce soltanto in seguito a forti raschiature, e manca se la raschiatura fu leggera pur asportando intieramente l'epitelio di rivestimento; mentre nei conigli, la cui mucosa tracheale si mostra più dilicata, di rado non si produce questa pseudomembrana fibrinosa, e si ha un essudato mucoso.

Quanto allo studio della riproduzione dell'epitelio io mi sono valso in ogni caso sia dei preparati per dilacerazione, allo scopo di rilevare meglio alcune particolarità di struttura delle cellule neoformate, sia delle sezioni verticali per controllare queste parlicolarità, e specialmente per conoscere i rapporti delle singole cellule dell'epitelio neoprodotto. I migliori preparati per dilacerazione gli ho ottenuti ponendo dei pezzetti di trachea, tolti in corrispondenza della raschiatura, in liquidi maceranti, e, dopo colorato il pezzetto con carmino neutro o picrocarmino, raschiando con un bistorì sulla superficie libera della mucosa, in modo da esportare l' epitelio dai bordi della soluzione fin verso la parte mediana di questa e scuotendo o battendo leggermente in una goccia di glicerina diluita, oppure di soluzione concentrata di acetato di potassa, ciò che aveva raccolto sulla lama del coltello. Cogliendo il momento opportuno della macerazione si isolano in tal modo facilmente le cellule epiteliche e tra queste trovansi, 8 a 14 ore dopo la raschiatura, molte cellule cilindriche vibratili assai ingrossate, a protoplasma torbido, carico di grossi granuli, con un nucleo grosso di forma rotondeggiante od ovale, e munito talora di 1 o 2 grossi nucleoli ben distinti ; talora, più di rado, il nucleo mancava di nucleolo, e conteneva un gomitolo di fili colorati, ed offriva una zona periferica trasparente ; ben poche di queste cellule contengono un nucleo in via di scissione, o due nuclei già scissi. Sono delle cellule vibratili in stato di tumefazione torbida, ed alcune di queste cellule isolate offrono nel loro protoplasma delle piccole nicchie che, vedute di profilo, appaiono come incavature per lo più emisferiche, e sferiche se vedute di fronte (fig. 2, tavola I), ed esaminando gruppi di tre, quattro o più cellule, si vedono queste nicchie occupate da una cellula semovente (tav. I, fig. 3). Oltre a queste si trovano delle cellule pure cigliate, ma più corte delle precedenti, ed anche molto larghe. Esse hanno una forma irregolare ; un grosso corpo cellulare, a base larga con un'incavatura a concavità rivolta in basso ;

da un' estremità della quale parte un prolungamento diretto obliquamente in basso. Se varie di queste cellule sono riunite i varii prolungamenti offrono una eguale direzione obliqua in basso, e più o meno tendente alla direzione orizzontale. Il corpo cellulare è fatto di protoplasma granuloso, fornito di un nucleo grosso, e di un orlo a ciglia lunghe e sottili (fig. 4). Alcune poi offrono due grandi incavature come nella fig. 5 della tavola I. Nello stesso preparato si incontrano inoltre molte altre cellule cogli stessi caratteri delle descritte, ma che hanno un corpo cellulare che diventa più corto, ed offre una incavatura emisferica più grande, un nucleo ovale col suo massimo diametro parallelo all' orlo cigliato, ed un' estremità diretta quasi orizzontalmente e spesse volte larga, sottile, lamelliforme (tav. I, fig. 6, 7, 8 e 9). Si incontrano anche lembetti di epitelio costituiti da una sottile lamella fornita di ciglia lunghe e rare, dalla cui faccia opposta a quella cigliata parte una espansione protoplasmatica cuneiforme, diretta verticalmente in basso, nella quale si osservano varii nuclei sprovveduti di nucleolo ed a sostanza cromatofila circondata da una zona periferica chiara, senza che si possano bene distinguere i limiti cellulari. La fig. 10 rappresenta uno di questi lembetti, in *b* veduto obliquamente dalla parte opposta alla lamella cigliata, in *a* veduto dalla parte cigliata. In altri lembetti, come nella fig. 11 della tav. I, si riesce meglio a vedere i limiti cellulari. Occorre di frequente di trovare anche dei lembi di epitelio, in cui sono riunite tutte queste cellule cigliate, che gradatamente diventano più corte; ed anche dei lembi in cui sonvi due ordini di cellule, uno superiore cigliato (a cellule già descritte e gradatamente più corte), ed uno inferiore a grosse cellule rotondeggianti, granulose, mono o polinucleate, le quali si insinuano più o meno profondamente nel protoplasma delle cellule cigliate sovrapposte producendo in queste le infossature descritte. Se questi lembi di cellule assai corte si presentano di fronte, a primo aspetto sembrano formati da cellule piatte, senza contorni ben distinti, *oscure* o *molto granulose*; ma, o sollevando il tubo del microscopio, o facendo rotolare il lembo di epitelio, si scorge tosto che l'aspetto oscuro-granuloso dipende dalle ciglia, le quali vedute di fronte si presentano come punti oscuri a contorni spiccati. Si osservano anche cellule quasi sferiche cigliate a nucleo ovale, diretto trasversalmente, le quali hanno perfetta somiglianza con quelle che si incontrano nei processi inflammatorii acuti degli epitelii vibratili. Infine si trovano dei lembetti di cellule *non cigliate pavimentose*, assai piatte, a grosso nucleo molto granuloso. Queste cellule, sia isolate, sia riunite in lembi di epitelio, se vedute di fronte, appaiono come cellule di forma alquanto variabile, ma sempre tendente a quella di una losanga allungata, con estremità sottili e lunghe che si insinuano tra le altre cellule; il loro protoplasma è finamente granuloso, a contorni ben netti, con un nucleo rotondo od ovale molto grosso, ed un discreto numero di esse mostra due nuclei, od un nucleo in via di scissione (tav. I, fig. 12, *b*, *c*, *d*). Di frequente si osserva in questi lembi le estremità di due cellule vicine fuse tra loro, ed esaminando il punto di unione con buoni obbiettivi ad immersione omogenea si vede nel protoplasma una regolare disposizione radiata dei granuli (tav. I, fig. 13, *d*) e nel nucleo un gomitolo di fili colorati, circondato da una zona periferica chiara; sembrano quindi delle cellule il cui protoplasma stia per scindersi.

In preparati per dilacerazione di epitelio tracheale a stadii più avanzati (1-2-3 giorni) della riproduzione, si osservano le stesse varietà di cellule; soltanto mentre nei

primi stadii sono scarsi i lembetti di cellule pavimentose a losanga, negli stadii avanzati si hanno numerosi e grandi lembi di queste cellule; abbondanti pure i lembi a due ordini di cellule; scarse cellule cilindriche vibratili in tumefazione torbida, o con cellule semoventi innicchiate nel protoplasma loro.

Le sezioni trasversali delle trachee di cane, coniglio e pollo, in corrispondenza della soluzione di continuo dimostrano che in generale già 3 a 4 ore dopo la depitelizzazione incomincia il processo di riparazione colla neoformazione di cellule epiteliali, che derivano dalle preesistenti, e che questo processo di riparazione è più rapido nei polli, meno nei conigli e meno ancora nei cani, però con differenze non molto forti tra questi animali. Coll'esame dei preparati, relativi ai diversi stadii procuratimi nelle numerose esperienze, ho potuto acquistare un concetto abbastanza chiaro sul processo di riproduzione di questo epitelio vibratile stratificato.

Il primo fatto che si osserva qualche ora dopo la depitelizzazione (fatta con un raschiatoio a filo molto ottuso ed in tal modo da asportare l'epitelio senza alterare fortemente il tessuto sottoposto della mucosa) si è una più o meno forte iperemia e fuoruscita di globuli bianchi, che si infiltrano nel connettivo della mucosa; questi, migrando nel connettivo, attraversano anche lo strato jalino, e si insinuano tra le cellule epiteliali dei bordi della soluzione per un tratto di estensione variabile nei singoli casi, o si rendono alla superficie in un essudato mucoso o fibrinoso, già antecedentemente notato, quelli che trapassano il connettivo della mucosa nei limiti della parte depitelizzata. Questa migrazione di globuli bianchi, e loro infiltrazione nel connettivo e nell'epitelio, che è abbondante a principio, diventa presto assai scarsa. Contemporaneamente le cellule vibratili dei bordi si tumefanno, il loro protoplasma si sovraccarica di grossi granuli albuminosi e diventa torbido. Questa alterazione delle cellule vibratili superficiali dei bordi si osserva per un tratto più o meno grande, a seconda che l'azione traumatica fu più o meno forte, e, sebbene io non l'abbia in modo sicuro potuto constatare, è probabile che anche varie di queste cellule vibratili si mortifichino e cadano. Da ciò si rileva che le cellule ottenute nei preparati per dilacerazione, e delle quali fu dato un esemplare colle figure 1, 2 e 3 della tav. I, non sono altro che cellule vibratili superficiali, che stanno ai limiti della soluzione di continuo subito dopo praticata. Le cellule epiteliali degli strati profondi verso i margini della soluzione di continuo sono pure ingrossate, granulose; hanno un nucleo grosso fortemente granuloso, ovvero un nucleo in via di scissione, o già due nuclei; tra queste si trovano delle cellule semoventi. A periodo più avanzato (5, 6 ore dopo la depitelizzazione) si osserva, nelle sezioni trasversali per un tratto più o meno esteso, che le cellule tondeggianti dello strato sottoposto alle cellule superficiali vibratili è formato non solo da cellule più grandi, ma da un numero di cellule di molto superiore al normale, cioè non si osserva un semplice strato profondo di cellule tondeggianti, che poggia sullo strato jalino, e sovrapposto a questo un altro di cellule più o meno allungate, che si insinuano tra le estremità inferiori delle cellule vibratili; bensì 3 e 4 strati di grosse cellule rotondeggianti, che si spingono contro le cellule vibratili superficiali, nel cui molle protoplasma producono delle incavature. È quindi avvenuta una abbondante moltiplicazione per scissione delle giovani cellule epiteliali dello strato profondo. Le sezioni trasversali della mucosa tracheale a questo stadio del processo

di riproduzione, dimostrano inoltre che questa proliferazione delle cellule epiteliali profonde ha in ogni caso una discreta estensione, e che, se dalle parti relativamente lontane dalla soluzione si va verso quelle che ne indicano i limiti attuali, si vede un graduale aumento di spessore di questo strato profondo per un aumento di numero delle sue cellule rotondeggianti. Le cellule superficiali vibratili, già in istato di più o meno forte tumefazione torbida, sono, per questa abbondante e rapida proliferazione delle cellule sottoposte, *spinte in alto e verso la soluzione di continuo e per la pressione si formano delle incavature nel protoplasma della base del loro corpo cellulare.* Così le cellule vibratili superficiali sono deformate, hanno cioè un corpo cellulare corto, con incavatura nella sua superficie inferiore e fornito di un prolungamento che va obliquamente in basso e in direzione opposta a quella rivolta alla soluzione di continuo. Quindi le cellule ottenute nei preparati per dilacerazione, indicate nelle fig. 4, 5, 6, 7, 8 e 9, tav. I, non sono altro che cellule dei bordi della soluzione primitivamente in istato di tumefazione torbida, le quali poi furono deformate dalle crescenti cellule dello strato profondo. — La moltiplicazione per scissione delle cellule epiteliali profonde continua, ed a periodo più avanzato (8, 10 ore) queste cellule, le quali naturalmente tendono a dirigersi verso la parte che loro presenta minor resistenza, si spingono sulla soluzione di continuo, di cui cominciano a tappezzare un piccolo tratto. Esaminando in sezioni trasversali l'epitelio tracheale a questo periodo del processo di riproduzione, si vedono le cellule vibratili superficiali, che, partendo dall'epitelio normale, vanno verso la soluzione di continuo, accorciarsi gradatamente fino a ridursi quasi ad una sottile lamella protoplasmatica fornita di ciglia; inoltre le cellule sottoposte a queste si trovano aumentate di numero, e, verso i bordi della soluzione, si osserva lo strato di cellule epiteliali più profondo (quelle che si adagiano sullo strato jalino) costituito non da cellule tondeggianti, ma ovali allungate con un massimo diametro parallelo alla superficie che tappezzano. Le cellule che, oltrepassati i limiti delle vibratili preesistenti e deformate, per un piccolo tratto cominciano a rivestire la mucosa depitelizzata, appaiono in un unico strato di cellule subrotonde, ovali, o veramente piriformi coricate, con scarse e fine ciglia impiantate su un piccolo tratto della loro superficie libera, il quale non appare con linee così spiccate come un vero orlo cigliato; perciò nelle sezioni si vedono dei ciuffetti di ciglia posti a brevi distanze tra loro. Queste cellule hanno un nucleo ovale, privo di nucleolo e assai granuloso, spinto verso l'estremità cellulare *alquanto arrotondata*, che è rivolta alla soluzione di continuo, e posto precisamente sotto la porzione libera che porta le rade e fine ciglia. L'altra estremità cellulare è piuttosto assottigliata e sottoposta alla estremità arrotondata della cellula posteriore (cioè più vicina all'epitelio preesistente). — Ad uno stadio un po' più avanzato si trova un maggior tratto della superficie depitelizzata ricoperto da epitelio di neoformazione, il quale appare verso i bordi della primitiva soluzione formato da due strati di cellule, di cui il superiore è costituito dalle cellule ora descritte, e l'inferiore da cellule ovali, più o meno allungate e prive di ciglia, le quali ultime si continuano in un unico strato di cellule ovali assai allungate (in sezione verticale), fornite di un nucleo quasi ellittico, e di estremità assottigliate che si dirigono sotto e sopra le corrispondenti estremità delle cellule vicine. Le cellule di questo secondo strato in seguito ingrossandosi, e tendendo a spingersi

in alto e verso la soluzione di continuo, comprimono e stirano le sovrapposte cigliate, e le deformano in modo analogo a quello descritto per le cellule epiteliali vibratili dei bordi della primitiva soluzione. Nel tratto compreso tra *c* ed *e* della fig. 15, tav. I, si ha l'epitelio di neoformazione di cui le ultime cellule (tra *d* ed *e*) sono sezioni verticali delle cellule a losanga indicate nella fig. 12 e 13. Nelle sezioni trasversali di trachea del coniglio, 14 a 18 ore dopo la praticata depitelizzazione parziale, si osserva già neoformato un buon tratto di epitelio (calcolato in media nelle sezioni trasversali della trachea da 1 a 1 $\frac{1}{2}$ millim.), e, se nell'osservazione si passa gradatamente dall'epitelio normale alle ultime cellule neoformate, si trovano tutti gli stadii descritti del processo di riproduzione. Infatti, come è indicato nella fig. 15, tra *a* e *b* abbiamo l'epitelio formato da cellule superficiali vibratili in tumefazione torbida, e tra esse una moderata infiltrazione di cellule connettive semoventi; le cellule degli strati profondi ingrossate ed a protoplasma granuloso; pochissime cellule semoventi tra queste. Tra *b* e *c* abbiamo cellule superficiali vibratili che vanno gradatamente facendosi più corte, e le cellule dello strato profondo che, aumentate di numero, si spingono contro le superiori. Tra *c* e *d* cellule di neoformazione vibratili subrotonde o piriformi, sotto le quali stanno delle cellule subrotonde od ovali, le quali infine si continuano nelle cellule ovali assai allungate (a losanga, se vedute di fronte) e prive di ciglia, ultime neoformate, comprese tra *d* ed *e*. In *f* si ha un lembetto di epitelio neoformato accidentalmente staccato dal connettivo della mucosa (*g*), nel quale ultimo si notano scarse cellule semoventi.

A 2-4 giorni dopo praticata la depitelizzazione, si hanno nelle sezioni trasversali della trachea le stesse immagini dell' epitelio riprodotto, come nel caso precedente, soltanto su tratti molto estesi, ed in molti casi, si trova anche la soluzione di continuo interamente ricoperta di epitelio, il quale nelle parti mediane risulta di un unico strato di cellule pavimentose, piatte, ed a forma di losanga se vedute di fronte, e nelle parti laterali di due strati di cellule, come in *c* e *d* della fig. 15. La presenza di una pseudomembrana fibrinosa, che aderisce alla mucosa depitelizzata, ritarda di molto il completo compenso della soluzione di continuo, poichè ostacola la crescita dell'epitelio. Occorre di frequente di trovare a stadii avanzati (2-5 giorni) l'epitelio neoprodotto spinto per certo tratto sotto la pseudomembrana, e, non potendo più progredire in direzione orizzontale, ripiegarsi in alto sulla pseudomembrana, di cui tappezza le parti laterali e buona parte della sua superficie libera superiore. Alcune volte l' epitelio che nella crescita si spinge contro la pseudomembrana, prima di ripiegarsi sulle faccie di questa, dà luogo alla produzione di molte cellule pavimentose, che, accumulandosi ivi, producono un considerevole ammasso di cellule disordinatamente disposte, da cui parte una propaggine formata da un unico strato di cellule appiattite, che tappezzano l'essudato fibrinoso (fig. 14, *a*, *b*). Altra particolarità che di frequente si incontra si è lo sdoppiamento degli strati dell' epitelio neoformato, i quali circondano un lembo di connettivo ricco di fibre elastiche, ed eguale a quello degli strati superficiali del tessuto proprio della mucosa; sembrerebbe quindi in tali casi che gli strati inferiori dell'epitelio si fossero insinuati per un piccolo tratto nello spessore del connettivo della mucosa, ma se si osservano delle sezioni successive ben asseriate, si trova un'altra e più naturale spiegazione del fatto, poichè queste dimostrano che si tratta semplicemente di lembetti di tessuto connettivo degli strati superficiali della mucosa, i quali col raschiamento

furono staccati dai sottoposti per certa estensione e che, a guisa di penisole, rimanendo aderenti con una estremità, sono rivestiti dall'epitelio che nella sua crescita, incontrandoli, si sdoppia e le tappezza. Un fatto analogo si osserva anche quando esistano sulla superficie depitelizzata, ed aderenti alla stessa per un breve tratto, dei piccoli coaguli sanguigni, i quali in sezioni verticali si trovano completamente circondati dall'epitelio neoprodotto. A stadii avanzati (3–4 giorni) si trova di frequente sotto la pseudomembrana fibrinosa dei piccoli tratti di epitelio a cellule pavimentose appiattite, separati dall'epitelio originante dai bordi della soluzione, il quale, ostacolato nella sua crescita, tappezza le superficie libere della pseudomembrana, ma in diretta continuazione coll'epitelio dei dotti gliandolari, i quali non sono più forniti di cellule cilindriche, bensì di cellule pavimentose piatte (fig. 14, *d*). La pseudomembrana fibrinosa, in corrispondenza dello sbocco del dotto ghiandolare e dell' epitelio, che, partendo da esso, ripiegasi sulla superficie del tessuto proprio della mucosa e ne tappezza un breve tratto, è fortemente sollevata da abbondante muco che proviene dalla ghiandola. Questo fatto ci spiega perfettamente la presenza di un foro grande, circolare, che si trova in qualche lembetto di epitelio a cellule in forma di losanga nei preparati per dilacerazione; ed è poi molto importante, perchè dimostra come l'epitelio dei dotti ghiandolari, interessati nella raschiatura, possa contribuire alla produzione dell'epitelio di rivestimento, e come al pari di questo, riproducendosi, cambii il suo tipo normale, e si presenti sotto forma di epitelio pavimentoso. Ma di ciò, come anche della *riproduzione delle ghiandole mucipare, e delle ghiandole sierose della papilla fogliata del coniglio e degli altri organi del gusto*, tratterò più diffusamente in un prossimo lavoro, dopo completato lo studio sullo sviluppo embrionale e sulla riproduzione degli apparecchi del gusto e dell'olfato.

Quanto alla questione se l'epitelio riprodotto sotto forma di epitelio pavimentoso ridiventi cilindrico vibratile stratificato, come il normale, e quali sieno le graduali modificazioni che esso va subendo per riacquistare il tipo dell'epitelio da cui origina, io posso soltanto dire che tale trasformazione certamente avviene, poichè nell' unico caso da me osservato a periodo molto avanzato (27 giorni) tale trasformazione era completa (notisi che in tal caso non esisteva pseudomembrana fibrinosa e che quindi l'epitelio sarà cresciuto rapidamente non trovando ostacoli); ma quanto alle singole fasi di essa io ho potuto solo notare qualche fatto che mi fa travedere il processo, benchè mi manchino molti stadii che in quelle esperienze non potei procurarmi, perchè per le circostanze qui sopra notate, decorrendo con variabilissima rapidità la neoformazione epiteliale compensatrice, non mi riuscì facile di determinare il tempo, in cui la trasformazione successiva dell'epitelio neoprodotto incomincia. Ho soltanto osservato in stadii molto avanzati tra le cellule subrotonde dello strato profondo frequenti cellule, che, fissate allo strato jalino con più o meno stretta base d'impianto, si elevano con un corpo cellulare ingrossato e nucleato al di sopra delle cellule vicine fino a raggiungere od oltrepassare il livello delle cellule dello strato superficiale, nel qual ultimo caso sono riunite allo strato jalino per un ristretto peduncolo, hanno una forma che si avvicina a quella delle cellule cilindriche normali, ma sono prive di un orlo cigliato. Per questo fatto e per altri particolari che ho potuto osservare nei numerosi preparati, io sarei indotto ad ammettere come cosa assai probabile che le cellule epiteliali dello strato profondo, non

potendo più liberamente crescere in direzione orizzontale (cioè nel senso della superficie, la quale trovasi già completamente rivestita di un epitelio a due strati di cellule) perchè trattenute dalle cellule vicine, tendano a crescere in direzione verticale, ed allungandosi in questa direzione assumano quindi forme che vanno sempre più avvicinandosi a quella delle cellule vibratili normali. Come però in queste cellule così allungate, che già ho notato, si sviluppino successivamente le ciglia, io non lo potei determinare, mancandomi stadii opportuni. Non voglio poi escludere la possibilità che le cellule basse cigliate dello strato superficiale dell'epitelio neoprodotto, possano allungarsi e diventare gradatamente cilindriche vibratili.

Le mie esperienze d'allora non furono limitate all' epitelio vibratile stratificato della trachea, come già ho notato, ma le estesi ben presto agli epitelii cilindrici semplici non vibratili e vibratili, poichè io non dubitava che in essi, stante la loro struttura assai meno complicata, doveva essere più facile e sicuro il rilievo dei fatti inerenti al processo di riproduzione. Ma molte difficoltà si presentarono relative agli organi, che nei vertebrati sono forniti di queste forme di epitelio. Così nell'intestino l'esistenza dei villi rese impossibile l'ottenere una buona e regolare depitelizzazione; nello stomaco e nell'utero la presenza di moltissime ghiandole tubulari assai vicine tra di loro, tappezzate interamente, o nel dotto escretore, di epitelio eguale a quello di rivestimento, fa sì che, praticata una soluzione di continuo in quest'ultimo epitelio, basti la produzione di poche cellule, che originino dall' epitelio di rivestimento e da quello dei numerosi dotti o tubuli ghiandolari, per compensare la soluzione di continuità, la quale è limitata ai microscopici spazii interghiandolari. Per la qual cosa, dopo numerose esperienze specialmente sulle corna dell'utero di cagne, riuscii soltanto in alcuni casi (i più recenti) a determinare che anche qui l'epitelio neoprodotto ha i caratteri di epitelio pavimentoso, e che assai probabilmente l'epitelio dei tubuli ghiandolari prende parte attiva nella neoformazione; ma non fu possibile procurarmi i varii stadii del processo, e nulla ho potuto determinare riguardo l'ufficio di quelle cellule rotonde, che normalmente si trovano tra le cellule cilindriche e vibratili degli epitelii semplici. Tentai pure depitelizzazioni sulla mucosa della cistifellea, previa legatura del dotto cistico, ma allora, non conoscendosi l'impiego del metodo antisettico, riusciva tale operazione troppo grave, per cui gli animali morivano assai presto. Attualmente io ripeterò le depitelizzazioni di questa mucosa, che offre le condizioni più favorevoli tra le mucose ad epitelio cilindrico semplice, potendomi servire del metodo Listeriano; e d'altra parte completerò le esperienze sull'epitelio del mantello delle cocciole di mare e sull'epitelio degli anfioxus, anche relativamente alla divisione indiretta dei nuclei, e fornirò a parte la continuazione di questo capitolo.

Da questo studio del processo di riproduzione si può dedurre:

1° Che l'epitelio cilindrico vibratile stratificato della trachea e vibratile semplice dell'utero, si riproducono compensando le soluzioni di continuo in essi artificialmente prodotte.

2° Che l'epitelio neoformato ha i caratteri di un epitelio primitivamente pavimentoso, nel quale si osservano stadii della scissione nucleare e probabilmente anche cellulare.

3° Che l'epitelio neoprodotto deriva dal preesistente, del quale nella trachea

poca o quasi nessuna parte prende alla neoformazione lo strato di cellule vibratili superficiali; grandissima parte invece le cellule ovali e rotonde dello strato profondo, e questa neoformazione si fa colla moltiplicazione per scissione di queste cellule preesistenti, e successivamente colla scissione delle neoprodotte.

4° Che l'epitelio neoprodotto primitivamente sotto forma di epitelio pavimentoso ad un solo strato, diventa a stadii avanzati stratificato (a 2 o anche a 3 strati), e che molto tardi, per una serie di modificazioni non ancora completamente determinate, si trasforma in epitelio vibratile stratificato.

5° Che la neoformazione di cellule epiteliali è assai rapida, abbondante, e sempre in diretta continuità coll'epitelio preesistente, e può farsi, indipendentemente dal connettivo della mucosa, sopra la pseudomembrana fibrinosa.

6° Che le cellule semoventi, le quali solo a principio si trovano abbondantemente infiltrate nell'epitelio, si presentano sempre coi loro caratteri normali e non offrono mai modificazioni che accennino a stadii di trasformazione a cellule epiteliali, ciò che del resto se avvenisse dovrebbe essere facilmente rilevato, poichè le differenze di grandezza e forma delle cellule epiteliali primitivamente neoprodotte, in rapporto alla forma e grandezza delle cellule semoventi, sono assai grandi. Si deve quindi ammettere in modo quasi sicuro che le cellule semoventi hanno nessuna parte nella neoformazione epiteliale, ed in modo sicurissimo si deve credere che per nulla contribuiscono le cellule connettive fisse, poichè è possibile una abbondante neoformazione epiteliale sopra un essudato fibrinoso.

II.

Infiammazione del tessuto epiteliale cilindrico.

Nelle mucose ad epitelio cilindrico o vibratile, semplice o stratificato si osservano varie forme di infiammazione, in cui ha una grande parte l' epitelio di rivestimento ed il ghiandolare. Limitandomi ora a considerare il processo patologico nel solo epitelio di rivestimento (poichè già dissi che della patologia dell'epitelio ghiandolare riferirò in altro lavoro), io trovai nel caso speciale, tanto in seguito ad irritazioni artificialmente prodotte, quanto in seguito ad irritanti naturali, così ben spiccate varietà, che credo mi permettano di distinguere (relativamente alle nostre cognizioni generali sul processo inflammatorio) due forme speciali di infiammazione, e cioè una forma di *infiammazione catarrale* ed una forma di *infiammazione parenchimatosa*. Potrebbesi credere necessario l' ammettere anche una forma di infiammazione purulenta ed una cruposa; ma, come si vedrà, in queste l'epitelio non ha una parte attiva, anzi subisce alterazioni in gran parte meccaniche, passive, ed inoltre tali infiammazioni non meritano d'essere considerate come forme speciali, ma come varietà, o, meglio, gradazioni di intensità di uno stesso processo infiammatorio, sempre riferibile alla forma catarrale o parenchimatosa, e relativo alla forza con cui l'irritante ha agito sull'epitelio. Infatti nelle infiammazioni da me artificialmente prodotte negli animali, potei ottenere cogli stessi irritanti, che agivano per le loro proprietà meccaniche o chimiche, *talora*

forme di infiammazioni *leggiere catarrali; talora più forti, parenchimatose; talora con un'infiltrazione di corpuscoli purulenti nell'epitelio* così rapida e abbondante da produrre nello spessore di questo delle vere pustole, o da sollevarlo fortemente e produrne tosto la caduta, oppure da deformare e disassociare le sue cellule, le quali in gran parte si mortificano e cadono; *od infine infiammazioni così acute e forti* nelle quali si ha, tosto dopo l'irritazione, la necrosi dell'epitelio di rivestimento e la *produzione di un essudato fibrinoso.*

Premesso questo concetto generale sul processo infiammatorio, passo ad esporre i risultati delle esperienze fin qui da me istituite. Anche per lo studio dell'infiammazione degli epitelii cilindrici e vibratili, mi sono valso specialmente di quello che tappezza la mucosa tracheale, per cui, non trovando conveniente di notare tutte le particolarità relative a ciascuna delle numerose esperienze (ciò che agevolmente potrei fare ricopiando dal mio registro i reperti delle medesime) dichiaro, che i risultati qui indicati si riferiscono specialmente all'epitelio vibratile stratificato della trachea. Utilizzai come animali da esperienza i conigli e specialmente i cani, siccome animali più resistenti, nei quali praticava una fistola tracheale e per essa spingeva nella trachea dei liquidi irritanti. Iniettava quindi nella trachea talora della tintura di iodio iodurata; talora delle soluzioni al 2 e al 4 $^0/_0$ di tartaro stibiato in quantità variabile; talora infine, per produrre infiammazioni più forti ancora, iniettava dell'olio di crotontiglio puro o diluito con olio d'uliva, ovvero dell'ammoniaca diluita o pura (22° *B* - densità 0,89). In questo modo ho esperimentato su 25 animali (3 conigli - 22 cani), cioè 10 volte con iniezioni di ammoniaca; 5 volte con iniezioni di olio di crotontiglio; 4 colla tintura di iodio, e 6 colle soluzioni acquose di tartaro stibiato, lasciando in vita gli animali vario tempo, quando, come nei casi delle iniezioni di ammoniaca, non avveniva più o men presto la morte spontanea. Il metodo di studio fu lo stesso impiegato per le esperienze sulla riproduzione, cioè dei preparati per dilacerazione a fresco nell' umor acqueo dell' occhio o in liquidi indifferenti; successivi preparati per dilacerazione dopo trattamento dei pezzetti di mucosa con liquidi maceranti, ed infine delle sezioni trasversali di trachea convenientemente indurita e chiusa in gomma. Or ecco i principali e più frequenti fatti da me osservati.

Infiammazione catarrale e parenchimatosa. — Se si iniettano nella trachea dei cani piccole quantità di soluzioni diluite di tartaro stibiato, o di ammoniaca debole, si produce sempre una infiammazione catarrale, la quale macroscopicamente si manifesta con un arrossamento più o meno forte, dovuto ad iperemia, e colla produzione di un essudato semitrasparente, filante. Esaminando per dilacerazione l'epitelio si trovano abbondanti cellule epiteliali caliciformi (*Becherzellen* dei Tedeschi); tra queste molte che nel protoplasma posto nella parte superiore del corpo cellulare (tra nucleo ed orlo cigliato ancora esistente) offrono una massa sferica di materiale omogeneo, rifrangente la luce, che coll' azione dell' acido acetico diventa granuloso e più spiccato per l' impallidimento del protoplasma cellulare che lo contiene; massa sferica che devesi considerare come una gocciola di muco prodottasi nella cellula. Molte altre cellule che, fornite di orlo cigliato ben conservato, offrono sopra di questo una massa omogenea piriforme, che col suo lungo peduncolo si in-

sinua tra le ciglia, e si fissa all'orlo cigliato (fig. 18 e fig. 28, cellula 13). Altre cellule infine che hanno perduto l'orlo cigliato e stanno emettendo una grossa gocciola omogenea, la quale in seguito all'aggiunta di ematoxilina (forse per l'azione coagulante dell'allume) diventa granulosa, e pare quindi formata da muco (tav. I, fig. 21, *c*). Rotolando fortemente queste cellule nel preparato, si può escludere il dubbio che tali gocciole di muco, anzichè appartenere a quelle cellule che, dissi, stanno emettendole, sia trasportata da lontano dalle ciglia vibranti, poichè ad onta del forte scuotimento, la gocciola non si stacca. Non credo pure che l'emissione di tali gocciole mucose, sia l'effetto di compressioni, che furono sempre evitate, nè dei liquidi d'aggiunta, poichè si osservavano anche impiegando l'umor acqueo dello stesso animale, ed infine poichè staccando un lembetto di mucosa del palato di rana, ed esaminandolo in umor acqueo della stessa rana, senza applicazione di coproggetti, si può assistere all'emissione di molte gocciole mucose da parte delle cellule superficiali a ciglia vibranti. Nelle sottili sezioni trasversali si trovano, qua e là sparse tra le cellule vibratili superficiali, delle cellule caliciformi, ed anche varie cellule vicine ridotte a calice. In queste cellule quasi sempre è rimasto il nucleo circondato da poco protoplasma granuloso. In molti punti della superficie libera dell'epitelio si vedono sporgere, tra le ciglia delle cellule, delle gocciole mucose fissate per un peduncolo all'orlo cigliato, ed inoltre numerose gocciole sferiche libere pure di muco. Tra le cellule epiteliali degli strati profondi, le quali sono più granulose del normale, si osservano qua e là poche cellule connettive semoventi; delle quali è pure infiltrato il connettivo della mucosa. Ammesso che fisiologicamente le cellule epiteliali cilindriche fabbrichino del muco, comportandosi come ghiandole mucose unicellulari, avremmo nell'infiammazione catarrale non altro che la esagerazione, più o meno forte, di questa attività funzionale.

Producendo sull'epitelio tracheale una irritazione più forte coll'iniezione per fistola tracheale di tintura di iodio, o di soluzioni più concentrate di tartaro stibiato, o coll'olio di crotontiglio, non si ottengono più le sole alterazioni sopradescritte e riferibili ad un'infiammazione catarrale, ma si osserva che le cellule epiteliali diventano in un primo stadio assai tumide con protoplasma torbido, costituito da grossi granuli, molto rifrangenti la luce, i quali coprono e rendono poco visibile il nucleo. Se queste cellule epiteliali, che abbondanti si trovano nei preparati per dilacerazione a fresco (tav. I, fig. 16 *a*; fig. 21 *d*; fig. 22, cellule 10-13; tav. II, fig. 23 *a*, *b*, *c*, *d*) si trattano con acido acetico, scompaiono totalmente i grossi granuli, per cui le cellule diventano assai pallide, omogenee, trasparenti, ed appare in esse spiccato il nucleo (tav. I, fig. 16 *b*). Ciò dimostra evidentemente che quelle cellule non contengono del muco, il quale all'acido acetico darebbe la reazione della mucina, bensì dei grossi granuli albuminoidi che si sciolgono nel detto acido. Si tratta quindi di una *degenerazione albuminoide* o *tumefazione torbida* delle cellule epiteliali, fatto questo che comunemente trovasi nelle infiammazioni degli organi, le quali da Virchow furono appunto contraddistinte col nome di *infiammazioni parenchimatose*. Quindi per analogia io mi credo autorizzato ad ammettere anche per gli epitelii cilindrici e vibratili una vera forma di *infiammazione parenchimatosa* ben distinguibile dalla catarrale, la quale generalmente consegue ad irritazioni meno forti. E questa mia distinzione è non solo fondata sulle infiammazioni che artificialmente si possono produrre negli animali, ma

anche sul fatto che le stesse alterazioni si riscontrano in casi di infiammazioni naturali e semplici delle vie respiratorie o secondarie all'infezione tubercolare, come anche nelle stesse infiammazioni secondarie dell' utero e tube faloppiane (tav. II, fig. 29 *b*, *c*, *d*, *e*, *f*). A questo primo stadio (di tumefazione torbida) generalmente tien dietro la degenerazione adiposa che porta alla distruzione delle cellule epiteliali.

Facendo dei preparati per dilacerazione dell'epitelio tracheale irritato colla tintura di iodio, o colle soluzioni di tartaro stibiato, a diverso tempo dopo la forte irritazione, si trovano isolate molte cellule cilindriche assai ingrossate, fornite, o più spesso prive di orlo cigliato, a protoplasma ricco di grossi granuli albuminoidi, già notate; tra le quali si trovano delle cellule caliciformi, che nell' assieme hanno una forma analoga alle precedenti (tav. I, fig. 17); inoltre dei lembetti di epitelio con una cellula dello strato profondo assai grande, resa vescicolare (fig. 18), avente cioè il nucleo spinto alla periferia e circondato da scarso protoplasma, il quale, oltre i limiti del nucleo, assottigliandosi fortemente, racchiude a guisa di otricolo una grossa gocciola di materiale omogeneo splendente, che, in seguito al trattamento coll'ematonilina, appare granuloso. Di tali cellule se ne trovano anche isolate come nella fig. 19 *a*, *b*, e nelle sezioni trasversali un po' spesse della mucosa tracheale (fig. 20) si può scorgere attraverso queste cellule vescicolari le estremità inferiori delle cellule vibratili superficiali poste avanti o posteriormente alle vescicole stesse. Negli stessi preparati per dilacerazione si trovano pure molte cellule col nucleo in via di scissione o a due nuclei, di cui il superiore è per lo più ovale, posto poco al disotto dell'orlo cigliato, e col suo massimo diametro parallelo a quest'orlo (fig. 21 *a*. *b*; fig. 22, cellula 8). Esaminando queste ultime cellule a più forte ingrandimento, si vede che il protoplasma tende a raggrupparsi intorno al nucleo superiore, ed in alcune si vede già separato dal restante protoplasma cellulare, mentre è unito all'orlo cigliato, il quale è staccato e sollevato dai margini della cellula (fig. 21 *b*). Numerose poi sono le sfere cigliate di varia grandezza ed aspetto, le quali sono indicate nella fig. 21 *f*; fig. 22 *a*, *b*, 2, 3; non che le gocciole libere omogenee splendenti, di varia grossezza, che probabilmente sono delle gocce di muco racchiuse in un sottile velamento protoplasmatico. Tra queste sfere alcune omogenee splendenti, o solo con rari e piccoli granuli, mancanti di nucleo e fornite di un orlo cigliato sottile a ciglia lunghe delicate, sono verosimilmente delle gocciole mucose formatesi nelle cellule, e poi espulse insieme all'orlo cigliato e ad un velamento di protoplasma, che ravvolge la gocciola e mantiene aderente l' orlo cigliato stesso. Altre sfere invece sono granulose (protoplasmatiche), fornite di nucleo ovale, che ha il suo massimo diametro parallelo al sottile orlo cigliato. Queste sfere sono perfettamente somiglianti a quelle che si osservano nei primi stadii della corizza acuta (tav. II, fig. 24). Un fatto costante è la presenza nel protoplasma delle cellule in tumefazione torbida di *varii* e *piccoli vacuoli chiari*, o di *più grandi vani* situati per lo più nelle vicinanze del nucleo, il quale talora appare di forma normale, e talora offre la sua superficie, che è rivolta al vano, depressa, od anche incavata (fig. 22, cellule 12, 13; tav. II, fig. 23 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*). Siccome accanto a queste si trovano cellule nel cui protoplasma stanno innicchiate delle cellule connettive semoventi (fig. 22, cellula 9), così non è facile determinare se i vani sopra notati sieno delle nicchie prodotte dalle cellule semoventi immigrate nell'epitelio, o se si tratti di liquido albu-

minoso, o di gocciole di muco, che si producono nel seno del protoplasma, e di preferenza vicino al nucleo. Il trovarsi però tra queste cellule, che offrono un grande vano sopra o sotto il nucleo, altre che presentano *un vano perinucleare, il quale a guisa di zona chiara circonda il nucleo* (fig. 22, cellula 11), ed altre fornite *di* 3-4 *piccoli vacuoli vicini* (fig. 28, cellule 4 e 5 della tav. II), ci costringe ad ammettere la possibilità della presenza di un liquido o materiale chiaro omogeneo nel seno del protoplasma, dal quale probabilmente è fabbricato per un processo analogo a quello, scoperto da Rovida, che dà luogo alla produzione di gocciole ialine nel protoplasma dell'epitelio renale.

Nelle sezioni trasversali di trachee così infiammate si possono riscontrare in posto le cellule colle alterazioni già descritte, inoltre una più o meno forte infiltrazione di cellule semoventi nello spessore dell'epitelio; un buon numero di cellule caliciformi, per lo più riunite in gruppi di 4 a 6 cellule, se per l'irritazione si è impiegato il iodio o il tartaro stibiato. Sulla superficie libera dell'epitelio si trova un grandissimo numero di sfere omogenee o finalmente granulose, le quali offrono un tratto della loro superficie più splendente e spiccato come se fosse un orlo cellulare alterato, che ha perduto le ciglia. Nelle sezioni di mucosa tracheale irritata con olio di crotontiglio, oltre le alterazioni notate, si osserva in generale che le cellule caliciformi sono molto scarse; che, oltre l'infiltrazione di leucociti, si hanno abbondanti stravasi di sangue nella mucosa, i quali impartono quel colore rosso-bruno o violaceo a chiazze, che si osserva nella trachea dei cani spontaneamente morti o uccisi; ma tali sezioni offrono dei fatti singolari che tendono a dimostrare molta analogia tra il modo di reagire degli epitelii vibratili e l'epidermide, cioè la *produzione di vescicole* o *di pustolette*. Riguardo al modo di formazione di queste vescicole, o pustole quasi microscopiche, io ho potuto osservare che poco dopo l'irritazione, prodotta dall'olio iniettato nella trachea, le cellule epiteliali si ingrossano ed assumono i caratteri, già notati, di cellule in istato di forte tumefazione torbida, e tra esse ha luogo una abbondante infiltrazione di cellule semoventi, le quali trapassando facilmente gli strati profondi si portano tra le cellule vibratili superficiali tumefatte, ove potendo stentatamente progredire finiscono per innicchiarsi nel loro protoplasma, stirarle in alto ed in parte disassociarle. In seguito ha luogo una essudazione fibrinosa, che ove si fa lentamente, si infiltra nell'epitelio e ne solleva lo strato di cellule vibratili superficiali (già alterate), la estremità inferiore delle quali per lo più viene rotta, e spesso in questo sollevamento vengono fortemente stirate in alto delle cellule degli strati profondi, le quali appaiono così estese nella cavità intra-epiteliale prodotta dall'essudato effusosi (tav. II, fig. 26). Ma se l'essudazione primitiva, o successiva, è rapida ed abbondante, allora si solleva l'epitelio in totalità, e si forma una vescicola sottoepiteliale a contenuto sierofibrinoso, od una pustola (tav. II, fig. 25 *c*, *c*). Esaminando poi l'epitelio che fu così sollevato, si trova di frequente in esso, o delle piccole irregolari cavità, dovute al disassociamento e parziale sollevamento dello strato superficiale di cellule vibratili, o delle vere e piccole pustolette (tav. II, fig. 25 *d*, *d'*, *h*, *m*). Pustole vere nello spessore dell'epitelio tracheale dell'uomo, le trovai in un caso di infiammazione della mucosa tracheale secondaria ad un cancro dell'esofago; caso che io debbo alla gentilezza del Prof. Bizzozero.

Riassumendo, nella infiammazione catarrale e nella parenchimatosa si sono trovati, riguardo l'epitelio, tre fatti o alterazioni principali: 1° *La tumefazione torbida delle cellule epiteliali*; 2° *La trasformazione delle medesime in cellule caliciformi* ed in *vescicolari*; 3° *La produzione di sfere cigliate mucose e protoplasmatiche nucleate.* Ora è necessario fare alcune considerazioni generali su questi fatti più costantemente osservati, perchè non posso, pei ristretti limiti in cui devo tenere questo mio lavoro, entrare nei molti particolari delle singole esperienze. Sulla tumefazione torbida, o degenerazione albuminoide, delle cellule epiteliche in seguito a forti irritazioni non è possibile muovere dubbio alcuno; perchè le prove date del trattamento coll'acido acetico; la frequenza di questa alterazione nelle infiammazioni artificialmente prodotte e nelle naturali dell'uomo (nelle broncopolmoniti, nelle infiammazioni secondarie all' infezione tubercolare delle vie respiratorie e dell'utero); il fatto inoltre del conseguire a questo primo stadio della tumefazione torbida la degenerazione adiposa, come io ho osservato nelle infiammazioni naturali, e in qualche caso nelle infiammazioni artificiali a periodo avanzato, sono argomenti così forti e convincenti da potersi ammettere come indiscutibili. Non così va la cosa per gli altri due fatti, poichè riguardo a questi si parano innanzi varie domande, che, se non rappresentano veramente dei problemi insolubili, riesce tuttavia non agevole il dar loro una sicura risposta. Infatti, come si producono le cellule caliciformi e le vescicolari? così trasformate stanno in posto? quale ufficio hanno? quali rapporti colle sfere cigliate? E così ora potrei moltiplicare queste domande che rappresentano tanti problemi di studio. Limitandomi a rispondere soltanto a quelle, per le quali nelle mie osservazioni ed esperienze posso trovare fatti esplicativi sicuri, io noterò che le cellule caliciformi nelle infiammazioni catarrali (quelle cioè prodotte da irritanti relativamente non molto forti) sono il risultato della produzione di muco nel protoplasma delle cellule vibratili (probabilmente originante da una parziale trasformazione delle sostanze albuminoidi di questo), e della successiva eliminazione della goccia di muco, generalmente rattenuto da un sottile velamento protoplasmatico, cui aderisce l'orlo libero cellulare fornito o privo delle ciglia (per caduta delle medesime, precedente alla eliminazione del muco). In tal modo si formano quelle sfere mucose con o senza orlo cigliato, che abbondanti si osservano nelle infiammazioni catarrali, e nel primo stadio delle infiammazioni parenchimatose artificiali e naturali delle mucose ad epitelio vibratile (corizza, bronchite, metrite catarrale, salpingite). Tra le cellule caliciformi che rimangono in posto nell'epitelio, alcune hanno conservato il nucleo coperto, nella sua parte superiore, da poco protoplasma; altre sono rimaste prive di nucleo. Ora se è probabile che molte delle prime possano vivere, e forse fabbricare del nuovo muco, o ricostituirsi in cellule vibratili; certamente le seconde per la massima parte sono da considerarsi come cellule morte destinate ad essere eliminate dall'epitelio, e sostituite con nuove. Nell'esame del muco proveniente da mucose infiammate, fatto su larga scala, trovai sempre abbondanti cellule caliciformi prive di nucleo, più scarse quelle che ne erano fornite (1). Per

(1) In questo muco si trovano anche cellule vibratili più o meno alterate, non che delle sfere cigliate; ma senza essere, le prime, ridotte a cellule caliciformi. La eliminazione di queste cellule trova una facile spiegazione quando si pensi alle condizioni dell'epitelio vibratile di una mucosa infiammata, cioè al trovarsi in esso delle cellule vibratili limitrofe alle caliciformi, che sono eliminate, e per ciò quelle saranno mal sostenute per la microscopica soluzione di continuo lasciata da queste;

una analoga produzione di muco nelle cellule subrotonde dello strato inferiore dell'epitelio si producono le cellule vescicolari (tav. I, fig. 18, 19 *a*, *b*). Queste cellule probabilmente scoppiano e la goccia di muco, divenuta libera, si effonde. In questi casi si avrebbe quindi la produzione di muco nella cellula, e la eliminazione di questo con rimanenza di una cellula caliciforme ; ma in altri casi , quando l' irritazione fu più leggiera (come nei casi poco dopo una debole raschiatura fatta sulla mucosa tracheale, o nei tratti della mucosa in cui la sostanza irritante ha poco agito), si trovano delle cellule che stanno eliminando una gocciola di muco (tav. II, fig. 28, cellula 13) attraverso l'orlo cigliato senza la caduta di questo, e quindi senza la rimanenza di una *Becherzellen*. Per le precauzioni da me prese negli esami a fresco, e pel successivo controllo, su preparati per dilacerazione e in sezioni trasversali, dopo trattata la mucosa con opportuni liquidi di conservazione, io non posso credere che tale emissione lenta della goccia di muco sia un fatto artificiale, ad esempio, per compressione esercitata sulla cellula ; anzi crederei spiegabile il fatto pensando che nelle irritazioni leggiere la produzione di muco nelle cellule è scarsa e si fa lentamente, per cui è possibile che venga, il muco formatosi, lentamente emesso attraverso l'orlo cigliato ; mentre nei casi di infiammazione forte la rapida e abbondante produzione di muco tende a spingere in basso nucleo e protoplasma, staccando questo dall'orlo cigliato, il quale, non più rattenuto che dalla sottile lamella protoplasmatica periferica della cellula (membrana ?), si lascia poi facilmente sollevare e staccare per opera del muco sottoposto, che aumenta in quantità.

Riguardo la produzione delle sfere cigliate, le quali furono già da varii patologi trovate in essudati catarrali di infiammazioni naturali, abbiamo opinioni disparate ed, a mio credere, in parte erronee. Rindfleisch le raffigura e considera come cellule purulenti (1) sviluppatesi nelle cellule epiteliali (fig. 30 *a*; *Entwicklung von Eiterkörperchen in Epithelien*); mentre, ad esempio, Cornil e Ranvier (2) le considerano come prodotte dalla segmentazione delle cellule cilindriche vibratili. L'idea di Rindfleisch, e di altri, sulla produzione endogena di corpuscoli purulenti nelle cellule epiteliali, non richiede attualmente una considerazione speciale, in quanto che tale formazione endogena fu già da Bizzozero, Volkmann e Steudener vittoriosamente combattuta, dimostrando che le cellule purulenti contrattili possono penetrare nelle epiteliali. E siccome le sfere cigliate contengono un nucleo o no, ma giammai un corpuscolo purulento, così non è ammessibile un rapporto tra la penetrazione dei corpuscoli purulenti e la formazione delle sfere cigliate. D'altra parte si è veduto antecedentemente come le cellule purulenti (nei nostri casi) veramente si innicchiano solo parzialmente nel protoplasma e non penetrino nella cellula. Quanto alla opinione di Cornil e Ranvier, noterò che essa non è da loro dimostrata con fatti, e che lo studio della riproduzione dell'epitelio cilindrico vibratile

---

inoltre quando si pensi al fatto del disassociamento, o dissodamento, prodotto dalla continua, e più o meno forte, migrazione di cellule connettive semoventi, le quali si rendono all'essudato mucoso che ricopre l'epitelio. Negli epitelii ad un solo strato, per esempio, la sola migrazione di cellule semoventi ne procura facilmente la caduta e perciò questo epitelio non si presta allo studio delle infiammazioni forti acute.

(1) *Lehrbuck der Pathologischen Gewebelehre*, 4ª edizione, pag. 55.

(2) *Manuel d'Histologie Pathologique*, pag. 47 e 653.

tenderebbe a far escludere questa possibilità, poichè le cellule vibratili preesistenti non offrono che di rado assai due nuclei od altri segni della scissione, ed anche nelle infiammazioni è relativamente scarso il numero di cellule a due nuclei. Io non voglio con questo negare in un modo assoluto la vera scissione cellulare delle cellule vibratili, osservo che, stante il grandissimo numero di sfere cigliate le quali si producono in molti casi di infiammazioni artificiali e naturali, se la scissione cellulare fosse il modo unico, o soltanto il più frequente della formazione di sfere cigliate, dovrebbe essere facilissimo il trovare cellule nelle varie fasi di questa scissione. Considerando i fatti da me osservati, e le varietà delle sfere cigliate che si producono nelle infiammazioni, io sono indotto a credere che esse abbiano non una, ma diverse origini. Alcune, quelle omogenee, prive di nucleo (Tav. I, fig. 22, cellula 2ª), provengono da cellule vibratili, in cui, prodottasi una gocciola di muco, viene questa, nel modo descritto, eliminata coll'orlo cigliato. Poche altre derivano da cellule vibratili a due nuclei (Tav. I, fig. 21 *b*), il protoplasma delle quali, che sta intorno il nucleo superiore, si raggruppa sul medesimo, e si separa dal restante insieme all'orlo cigliato che si stacca; ed allora si hanno delle sfere protoplasmatiche nucleate, con rimanenza di una Becherzellen. Altre provengono probabilmente da cellule il cui corpo è assai ridotto di volume nel senso della lunghezza, fornite di un lungo prolungamento d'attacco allo strato jalino (Tav. I, fig. 22, cellula 4, 5), il corpo delle quali, per trasudamento sieroso e per infiltrazione di corpuscoli purulenti, facilmente viene staccato dal peduncolo. Altre infine, e sono la maggior parte, provengono dalle cellule degli strati profondi, le quali, cadute qua e là le cellule vibratili superficiali, vengono spinte in alto e quivi, resesi cigliate prima di assumere la forma cilindrica, sono, per successivi trasudamenti e migrazione di cellule connettive semoventi, facilmente staccate e rese libere nell'essudato mucoso.

Infiammazione cruposa artificiale delle mucose ad epitelio vibratile. — Per chi nel 1874 e 75 si proponeva lo studio della patologia degli epitelii cilindrici, acquistavano grandissima importanza le ricerche sperimentali su questa forma di infiammazione, poichè appunto allora si avevano osservazioni sperimentali contradditorie tra Reitz, Trendelenburg ed Oertel da una parte, e Bayer e Mayer dall'altra; tendendo i primi a togliere ogni idea di specificità all'infiammazione cruposa, e negando i secondi la possibilità di produrre, colle iniezioni di ammoniaca nella trachea di animali, un vero crup artificiale. Poichè infine allora avevano molto valore le idee di Wagner e Buhl, i quali ammettevano che le pseudomembrane crupose *non sono il prodotto di un essudato fibrinoso*, come nelle pleuriti, pericarditi, peritoniti; *sibbene un derivato della degenerazione fibrinosa delle cellule epiteliche* (1). — Io quindi ho allora istituite molte esperienze appunto per contribuire alla soluzione di queste due quistioni, cioè *se il crup della trachea fosse da considerarsi una infiammazione specifica; se l'epitelio tracheale avesse alcuna o nessuna parte alla produzione*

(1) Wagner che studiò il processo di degenerazione fibrinosa specialmente negli epitelii pavimentosi, ma che lo estese anche ai cilindrici, fornisce nelle sue figure delle immagini, riguardanti i primi stadii, che sono perfettamente eguali a quelle che offrono le cellule pavimentose, in cui le cellule semoventi infiltrate nell'epitelio hanno prodotto delle nicchie, e che io, studiando l'infiammazione di mucose ad epitelio pavimentoso, ottenni isolate in discreto numero.

della pseudomembrana. — Ora, in questa memoria, non troverei utile riferire minutamente le singole esperienze riguardanti questioni che dopo il 75 furono da altri nuovamente trattate, ma stimo più conveniente il riprodurre qui soltanto le conclusioni da me già state pubblicate nella seconda comunicazione preventiva (1), potendo così dimostrare la parte che io ebbi in tale studio; ed in proposito farò antecedentemente rilevare, come io fin d'allora *avessi sperimentalmente dimostrato*, *che non solo l'epitelio non ha parte alcuna*, *ma la sua mancanza* (raschiatura dell'epitelio tracheale) *dà luogo ad una pseudomembrana limitata al tratto depitelizzato: quindi che la caduta dell'epitelio è condizione necessaria per la produzione della pseudomembrana stessa.*

Ecco i resultati di quelle esperienze:

1° *Se per fistola tracheale s'introduce nelle vie aeree del cane dell'ammoniaca debolissima o diluita*, *non si ottiene che una forte iperemia con abbondante essudato mucoso* (infiammazione catarrale acuta).

2° Se s'introduce dell'*ammoniaca forte* (22° B) l'animale muore dopo 28 a 60 ore, e si riscontrano sulla trachea pseudomembrane bianco-grigie, d'uno spessore vario, fino a 2 millimetri, le quali talora rivestono l'intera superficie della mucosa tracheale a guisa di tubo, talora invece appaiono sotto forma di grandi placche sparse qua e là. Sono lassamente adese alla mucosa, consistenti e non si stirano in filamenti come il muco. Esaminate fresche al microscopio, in preparati per dilacerazione, constano di un reticolo di fibre bianche lucenti, nelle cui maglie stanno delle cellule semoventi. L'acido acetico forte fa tosto scomparire il reticolo di fibre. Trattasi quindi non di un essudato catarrale, ma di *vere* pseudomembrane fibrinose, che si comportano con questo reagente e colle soluzioni di cloruro sodico, come le pseudomembrane crupose naturali dell'uomo. Le sezioni verticali della laringe e trachea in corrispondenza delle pseudomembrane, artificialmente prodotte, lasciano scorgere altri punti di somiglianza col crup naturale dell'uomo, quali: la caduta dell'epitelio, di cui rimangono poche cellule intorno agli sbocchi dei condotti ghiandolari; il sollevamento della pseudomembrana in corrispondenza di questi condotti ghiandolari pel secreto mucoso che non può versarsi sulla superficie della mucosa, e infine la particolare lucentezza che offre nel suo assieme la pseudomembrana, e l'intima struttura della medesima, specialmente una disposizione stratificata del reticolo, cioè vi sono delle trabecole più grosse che continuano per lungo tratto in direzione parallela alla mucosa, mandando trabecole più piccole in alto ed in basso, le quali si anatomizzano con quelle inviate dalle altre grosse e parallele, che stanno superiormente ed inferiormente.

3° In un caso ho osservato la coesistenza di abbondanti bacterii e micrococchi, che apparivano già macroscopicamente sotto forma di piccole macchie bianchiccie sparse qua e là sopra la pseudomembrana, e, verso la fine della trachea e sui grossi bronchi, nei luoghi ove non esisteva pseudomembrana. Ma in questo caso il cane era morto da qualche ora, mentre in altri casi, in cui i cani furono uccisi nel

---

(1) *Contribuzione alla Patologia generale del tessuto epitelio cilindrico.* L'Osservatore, Gazzetta delle Cliniche. Luglio 1875.

periodo dell'agonia e prima, mancavano affatto. Credo quindi interamente accidentale questa coesistenza, e ciò dimostra anzi più sempre, come, preparato un terreno opportuno, i micrococchi e bacterii introdotti con l'aria aspirata, vi si moltiplichino prodigiosamente. Non per questo però si potrà dire che essi abbiano esistito fin da principio, ed essi, e non l'ammoniaca, abbiano prodotto il crup.

4° Anche iniettando direttamente nella trachea dei cani, mediante un trequarti esploratore e siringa, 4 a 6 grammi di una soluzione di tartaro emetico al 4 % ho ottenuto grosse pseudomembrane fibrinose; mentre in molte altre esperienze iniettando soltanto 10 a 15 goccie della stessa soluzione, produceva una semplice infiammazione senza pseudomembrana.

E non solo con mezzi *chimici*, ma anche con mezzi *meccanici*, cioè colla raschiatura della mucosa tracheale, ho potuto produrre delle pseudomembrane crupose. Qui pure, a seconda che la raschiatura della mucosa era leggiera o forte, l'essudato che veniva prodotto era *catarrale semplice* o *cruposo*.

Ora, concludendo, se si può artificialmente produrre con un comune irritante, l'ammoniaca, una *vera forma di infiammazione cruposa*, e se, usando della medesima sostanza diluita, si produce nello stesso animale (*nei cani*) una comune infiammazione catarrale, parmi non si dovrebbe esitare a togliere al crup ogni idea di specificità. L'aver ottenuto la produzione d'un essudato *cruposo* o *catarrale* a seconda che si faceva sulla mucosa una raschiatura forte o debole, dimostra ancora come, *indipendentemente da azioni chimiche, la natura dell'essudato stia in relazione colla forza dell'irritazione, e quindi le irritazioni deboli danno essudato catarrale; le forti, un essudato cruposo.*

Quanto alla cosidetta degenerazione fibrinosa di Wagner, il fatto sperimentale del prodursi pseudomembrane in seguito a depitelizzazione semplice e nei limiti precisi del tratto depitelizzato, basterebbe a non farla più ammettere; ma oltre ciò molti fatti ne la contraddicono, e cioè: 1° se le pseudomembrane derivassero da questa degenerazione che, stando alle figure di Wagner, non porta alla distruzione del nucleo, si dovrebbe avere nello spessore delle grosse trabecole di quelle dei nuclei; ciò che non si osserva mai; 2° lo spessore delle pseudomembrane è troppo grande in confronto di quello dell'epitelio da cui deriverebbe; 3° si hanno pseudomembrane su piaghe granuleggianti, quindi prive di epitelio; 4° le pseudomembrane crupose, perchè costituite da un reticolo di fini filamenti fibrinosi, trattate con acido acetico si sciolgono completamente, mentre ciò non dovrebbe avvenire, se esse derivassero dalle cellule epiteliali, in cui avviene la degenerazione fibrinosa in singoli punti, poichè avrebbero un reticolo costituito dai residui cellulari protoplasmatici, che non si sciolgono con quell'acido.

Quindi è ormai indiscutibile che nelle infiammazioni crupose per la violenza dell'irritazione l'epitelio si mortifica e cade, ed in *nessun modo diretto contribuisce a produrre la pseudomembrana fibrinosa*, anzi si deve credere che la sua caduta, la quale precede la formazione della pseudomembrana, è *una condizione necessaria per la essudazione di fibrina.*

III.

Alterazioni del tessuto epiteliale cilindrico nella tubercolosi.

Nella infezione tubercolare che offre localizzazioni in mucose provvedute di epitelio cilindrico o vibratile, si osservano delle alterazioni, che, se possono a primo aspetto destare sorpresa, trovano però una sicura spiegazione nei due processi già descritti della *riproduzione* e dell'*infiammazione*. Abbiamo infatti delle alterazioni dell'epitelio, che si possono porre nella serie delle alterazioni inflammatorie comuni, qui però dovute all'azione irritante speciale del bacillo, la quale è piuttosto lenta, ma continuata, e per ciò dà luogo ad un'infiammazione secondaria cronica; e delle altre alterazioni dovute ad azioni meccaniche, relative allo sviluppo di noduli tubercolari in prossimità dell'epitelio, od a parziale processo inflammatorio più forte, le quali producono una circoscritta caduta dell'epitelio, cui tosto seguono tentativi di riproduzione da parte dell'epitelio vicino alla soluzione di continuo, e quindi, seguendo la neoproduzione di cellule epiteliali le stesse leggi già notate per la riproduzione in seguito ad artificiali depitelizzazioni, si forma al posto del vecchio epitelio cilindrico disassociato e poi caduto, un *epitelio pavimentoso*. Tale trasformazione, sebbene rimanesse inesplicabile, fu dapprima da Foerster (1) riscontrata nelle infiammazioni della laringe croniche di lunga durata, e da lui chiamata *Metamorfosi dermoide*, poichè oltre all'aversi un epitelio di rivestimento che ha i caratteri di epitelio pavimentoso, constatava ancora che la mucosa aveva assunto una struttura papillare. Più tardi (1872) il D.r Wahlberg (2) trovava, non nelle infiammazioni semplici della laringe, ma intorno alle ulceri tubercolari delle corde vocali superiori un vero epitelio pavimentoso, e nota come questo cambiamento di forma si osservi anche quando, non essendo l'epitelio perforato, ma solo assottigliato, l'ulcera tubercolare sta sviluppandosi. Egli vuole inoltre trovare in queste alterazioni dell'epitelio qualche cosa di specifico, non dovendosi, secondo lui, ritenere come un prodotto di un semplice processo inflammatorio.

Le mie osservazioni fatte sulla laringe, trachea, grossi e medii bronchi di molti casi di tubercolosi cronica, che mi venivano gentilmente offerti dal compianto collega Prof. Colomiatti, mi fecero constatare che non solo intorno alle ulceri delle corde vocali superiori, ma in qualunque punto della mucosa tracheale esistevano dei noduli tubercolari, l'epitelio in corrispondenza del nodulo si era trasformato da cilindrico vibratile stratificato in pavimentoso. A questi noduli tubercolari superficiali, corrisponde un piccolo rialzo emisferico, il quale, studiato in sezioni verticali, appare formato dal

---

(1) *Handbuch d. speciell. path. Anat.*, vol. II, pag. 321.

(2) *Das tuberkulöse Geschwür im Kehlkopfe. Medisinische Jahrbücher von Stricker*, 1872, fasc. III, pag. 238.

nodulo che risulta di una cellula gigantesca con cellule epitelioidi (generalmente poco ben conservate) e di cellule linfoidi; dal connettivo della mucosa molto infiltrato di cellule semoventi, il quale è in corrispondenza di questo rialzo tappezzato da epitelio pavimentoso stratificato, che va, ai lati del rialzo, grado grado assumendo i caratteri normali di epitelio vibratile. I noduli tubercolari nella trachea appaiono poco ben conservati, per cui non è sempre facile il dimostrare la tipica struttura del nodulo; però in tratti di trachea, appartenente ad individui tubercolosi, nei quali tratti non si osservano noduli, e solo una moderata infiltrazione di leucociti, si trova la mucosa ricoperta per una grande estensione di epitelio pavimentoso. In tali casi l'epitelio trasformato presenta un aspetto analogo all'epidermide; cioè esso è composto di uno strato profondo di cellule ovali, a grosso nucleo, dirette in modo d'aver il massimo diametro perpendicolare alla superficie dello strato jalino, su cui poggiano; a questo strato succedono varii altri (2-3) di cellule più grandi, poligonali, con nucleo rotondo, granuloso, circondato da più abbondante protoplasma; infine altri strati di cellule appiattite col massimo diametro parallelo alla superficie della mucosa; queste cellule superficiali piatte in molte sezioni appaiono qua e là in parte sollevate, come si ha nell'epidermide od altro epitelio pavimentoso stratificato, i cui strati più superficiali si desquamano. Questo epitelio trasformato offre un'altezza uguale a quella dell'epitelio cilindrico normale, e solo appare qua e là per breve tratto assottigliato per desquamazione degli strati superficiali. La superficie inferiore di questo epitelio presenta una leggiera ondulazione, cui corrispondono eguali rialzi ed abbassamenti alterni della superficie superiore, per la qual cosa si tratterebbe di semplici ripiegature od ondulazioni dell'epitelio. In qualche piccolo tratto si ha maggiormente l'apparenza di zaffi epiteliali insinuantisi nel connettivo della mucosa; però tra questi non si osserva una vera papilla vascolare come nel derma. Questo cambiamento della forma tipica dell'epitelio si verifica costantemente anche all'intorno delle ulceri tubercolari della trachea, alcune delle quali sono coperte da una pseudomembrana fibrinosa.

Nei grossi bronchi (4 casi) e nei medii (2 casi) si osservano pure dei rialzi circoscritti della mucosa, rivestiti di epitelio pavimentoso stratificato, cui corrisponde un nodulo tubercolare (Tav. II, fig. 30). Esaminando l'epitelio in questa figura si rileva tosto la perfetta somiglianza tra questo e l'epitelio che si è riprodotto in seguito ad artificiali depitelizzazioni; solo qui ha un maggiore spessore, in parte anche perchè la sezione riuscì non perfettamente perpendicolare alla superficie, ma un po' obliqua Intorno alle ulceri dei grossi e medii bronchi, le quali sono qui assai rare, si ha la stessa trasformazione dell'epitelio, notata per le ulceri tubercolari della mucosa tracheale. — Io ho finora dimenticato di esaminare casi di infiammazioni croniche della mucosa laringea, tracheale, bronchiale, enterica, ecc. non tubercolari, ma credo per fermo che il trovarsi questa trasformazione immancabilmente nelle stesse mucose appartenenti ad individui tubercolosi, non può assolutamente escludere che i processi infiammatorii semplici, purchè forti e capaci di produrre la parziale caduta dell'epitelio, volgendo a guarigione, non possano dar luogo alla trasformazione dell'epitelio, la quale, come nei casi delle depitelizzazioni, sarà naturalmente temporaria. Gli individui che superarono il colera, e muoiono poco dopo per malattia accidentale, fornirebbero un materiale prezioso per tale ricerca.

Quali altre alterazioni dell'epitelio nella tubercolosi della laringe, trachea e bronchi ho riscontrato già in preparati per dilacerazione a fresco, quasi in tutti i casi da me esaminati, delle cellule cilindriche vibratili a *due*, *tre* e fino *quattro* o *cinque nuclei* (fig. 27); fu poi ben constatato in ogni caso, collo smuoverle e farle rotolare, che queste cellule erano perfettamente isolate, e che quindi non si trattava di due o più cellule addossate ed aventi il nucleo a diversa altezza; inoltre colla colorazione nell'ematoxilina fu tolto il dubbio che potessero essere non veri nuclei, ma cellule purulenti penetrate nelle cellule epiteliali. Di cellule epiteliali cilindriche contenenti corpuscoli purulenti ne ho riscontrato in alcuni casi diverse, ma riusciva facile, e per la grandezza dei corpuscoli stessi, e specialmente per la colorazione coll'ematoxilina, che tinge intensamente i nuclei, il distinguerle (fig. 28, cellula 3). Inoltre si trovano cellule caliciformi; cellule che emettono gocciole di muco; cellule in istato di tumefazione torbida, e con altre alterazioni (fig. 28) analoghe a quelle osservate nelle infiammazioni artificialmente prodotte.

Dopo questo costante risultato della trasformazione dell'epitelio nella mucosa delle vie aeree prese da tubercolosi, era naturale il verificare se nelle altre mucose tappezzate da epitelii cilindrici semplici, si avverasse lo stesso fatto. E allora (nel 75) mi si porgeva occasione di studiare due casi di tubercolosi dell'utero e delle tube faloppiane, uno dei quali debbo alla gentilezza del Prof. Bizzozero, alla cui collezione privata apparteneva, e l'altro mi provenne dalla Clinica Medica di Torino, allora diretta dal compianto Prof. Rovida. Nel primo caso il processo tubercolare era molto avanzato; l'epitelio di rivestimento della cavità dell'utero era in gran parte caduto, ma esisteva nelle tube faloppiane, mentre l'epitelio ghiandolare esisteva anche nelle ghiandole tubulari della mucosa uterina. Nel secondo caso era meno avanzato il processo e, avendo avuto il pezzo dal cadavere, potei studiare l'epitelio anche a fresco. Coi preparati per dilacerazione a fresco, in questo caso, si isolavano numerosi elementi epiteliali *molto grandi* e *assai appiattiti*, tra i quali altri somiglianti, ma più piccoli. Avevano i primi una figura tendente alla esagonale, erano forniti generalmente di due, tre o più nuclei centrali, ovali e vescicolari, con uno o due nucleoli distinti; il protoplasma cellulare, finamente granuloso, conteneva numerosi corpuscoli sferici, a riflesso alquanto giallastro, e di uniforme grandezza (Tav. II, fig. 29, *b*, *c*, *d*, *e*). Trattandoli con acido acetico, tali elementi cellulari diventavano pallidi e trasparenti, perchè i corpuscoli si scioglievano nell'acido, e si dimostravano quindi di natura albuminoide. Oltre a queste cellule grandi, si osservavano elementi perfettamente sferici a grossi granuli, che impedivano di scorgere bene il nucleo. Alcuni (specialmente appartenenti alle tube) avevano in un punto un prolungamento simile a quello delle cellule superficiali di un epitelio vibratile stratificato, e, all'estremità opposta, traccie dell'orlo cigliato, da cui però erano cadute le ciglia; contenevano pur essi dei granuli giallo-splendenti, però qui il trattamento coll'acido acetico faceva scomparire molti granuli (albuminoidi), ma ne lasciava molti giallastri, che erano delle goccioline adipose. Si avevano inoltre molte cellule cilindriche, prive di ciglia, rigonfiate, deformate, che, dopo il trattamento coll'acido acetico, contenevano ancora molte goccioline adipose (fig. 29, *f*). Infine si trovavano isolati dei lembetti di epitelio a *cellule pavimentose assai piatte*. — Le sezioni verticali della mucosa appartenente al corpo e al fondo dell'utero dimostrarono,

in ambedue i casi, l'esistenza di numerosi noduli tubercolari (a diverso grado di sviluppo), di cui alcuni superficiali avevano prodotto dei rialzi molto rilevanti (a guisa di papille o villosità) sulla superficie della mucosa, i quali erano ricoperti talora da un unico strato di cellule *pavimentose assai piatte* ed a grosso nucleo, che nella sezione verticale era un po' protuberante ; talora invece da due strati di cellule *pavimentose meno piatte.* Anche dove il nodulo tubercolare aveva già fatto cadere l'epitelio e stabilita così un'ulcera microscopica, l'epitelio ai lati di questa presentava l'aspetto di epitelio pavimentoso per una variabile estensione.

L'epitelio delle ghiandole tubulari della mucosa dell'utero può subire questa trasformazione. Intanto in quasi tutte le sezioni perpendicolari alla superficie della mucosa, si scorgevano i tubi delle ghiandole enormemente dilatate (specialmente verso il loro fondo cieco) da numerosi corpi sferici a grossi granuli, già notati nei preparati per dilacerazione, non che dalle cellule grandi a grossi granuli, pure descritte, e da corpuscoli mucosi e cellule desquamate, epiteliche cilindriche in degenerazione grassa. Frequentemente poi lungo la parete ghiandolare (o meglio nel tessuto connettivo interghiandolare) si scorgeva uno o più noduli tubercolari, ed, in corrispondenza di questi, un rialzo verso il lume della ghiandola, il quale era rivestito di epitelio a *cellule piatte, pavimentose* (fig. 31). Ai lati di questo rialzo si aveva un graduale passaggio dalle cellule normali epiteliali cilindriche (ora non vibratili), a cellule che man mano diventavano più basse, ed infine pavimentose vere. In molti punti il nodulo aveva perforato lo strato epiteliale trasformato, e si era prodotta un'ulcera, ai lati della quale si aveva epitelio pavimentoso.

Nelle tube faloppiane vi erano noduli tubercolari più recenti e meno numerosi, perciò meglio si prestavano allo studio di questa parziale trasformazione dell'epitelio.

Dall'intestino non potei aver buoni preparati, poichè nell'uomo, l'epitelio poco dopo la morte si stacca e si distrugge , e negli animali non mi fu dato finora di trovare casi di tubercolosi o di processi inflammatorii cronici dell'intestino. Però ultimamente in alcuni casi di tubercolosi del fegato diffusa ai dotti biliari nell'uomo e nel coniglio, ho potuto constatare la trasformazione dell'epitelio nei grossi dotti biliari. Per cui è da ammettersi che anche nell'intestino, fornito di eguale epitelio, si debba avere lo stesso fatto.

Che tale trasformazione non sia l'effetto della compressione esercitata dai noduli tubercolari è certo, poichè in molti casi, da me esaminati, di grossi miomi sottomucosi dell'utero, i quali dovevano aver esercitato una forte compressione sull'epitelio, si aveva l'epitelio di rivestimento a cellule vibratili normali.

Da queste osservazioni si può dedurre :

1° Che nel processo tubercolare delle mucose ad epitelio cilindrico e vibratile, semplice o stratificato, si osserva la trasformazione parziale di questo in una forma di epitelio pavimentoso semplice o stratificato ;

2° Che questa trasformazione talora è limitata a tratti microscopici , corrispondenti ad uno o pochi noduli tubercolari ; talora invece è estesa larghi tratti (trachea) senza che nella mucosa si trovino noduli tubercolari, od evidenti residui di questi ;

3° Che tale trasformazione non dipende da compressioni esercitate dai noduli, poichè si ha anche dove non è dimostrabile la presenza di questi, ma è il risultato

della neoformazione di cellule epiteliali che, originando delle preesistenti, sostituiscono le cellule cadute o distrutte (per degenerazione adiposa), e che nel loro sviluppo, seguendo la norma che regola la riproduzione di questi epitelii, assumono il carattere di cellule epiteliali pavimentose;

4° Che perciò tale trasformazione non è qualche cosa di speciale (collegato alla natura specifica dell'infezione tubercolare); ma che trova la sua spiegazione nelle alterazioni dell'infiammazione secondaria, e nel processo di riproduzione degli epitelii cilindrici. Che infine è lecito credere che in comuni infiammazioni, quando queste sieno così forti da produrre la caduta di alcuni tratti dell'epitelio di rivestimento, o in talune infezioni (colera, crup secondario alla difterite), in cui ha luogo questa abbondante o limitata caduta dell'epitelio, si possa produrre una somigliante trasformazione.

Dicembre, 1883.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. **1**. Cellula vibratile dello stato superficiale in tumefazione torbida, appartenente all'epitelio dei bordi di una soluzione di continuo praticata nella trachea di coniglio (14 ore dopo la depitelizzazione) — Camera lucida — Ingr. 350.

NB. Le cellule delle figure seguenti, fino alla figura 13 compresa, appartengono alla stessa esperienza notata nella figura 1.

» **2**. Cellula somigliante alla precedente, con una nicchia quasi completa nel protoplasma poco sopra il nucleo; ed incavature nella estremità inferiore dovute alle cellule dello stato profondo. — Ingr. 240.

» **3**. Due somiglianti cellule, di cui una tiene innicchiato nel protoplasma 3 cellule connettive semoventi. — Ingr. 240.

» **4**. Gruppo di cellule con prolungamenti diretti in uno stesso senso, ed offrenti alla base del loro corpo una grande incavatura. — Camera luc. — 350.

» **5**. Cellula somigliante a corpo più breve e con due grandi infossature; — Ingr. 350.

» **6**, **7**, **8** e **9**. Cellule analoghe a corpo più breve con grande infossatura; a nucleo in alcune diretto trasversalmente, e ad estremità dirette quasi orizzontalmente e, in alcune cellule, lamelliformi (7 e 9) — Ingr. 350.

» **10**. Un lembetto di epitelio neoformato, veduto in *a* e *b* sotto due faccie — Ingr. 240.

» **11**. Altro lembetto somigliante, con limiti cellulari un po' più distinti — Ingr. 240.

» **12**. Lembetto di cellule piatte a losanga; *a* due cellule riunite per una loro estremità; *b* cellula a nucleo con strozzamento a cifra otto; *c* con 2 nuclei; *d* con nucleo in scissione — Ingr. 350.

» **13**. Le due cellule *a* della figura precedente a più forte ingrandimento (520, immersione omogenea).

» **14**. Sezione verticale della mucosa tracheale in corrispondenza di una soluzione di continuo dell'epitelio (al 3° giorno); *b* ammasso di cellule epiteliali neoprodotte ostacolate nella loro crescita dalla pseudomembrana; *a* epitelio pavimentoso di neoformazione che deriva dall'ammasso *b*, e si ripiega

sulla pseudomembrana; *c* pseudomembrana fibrinosa; *d* dotto ghiandolare escretore con tratto di epitelio di rivestimento da esso derivante — Ingr. 140; figura ridotta a metà grandezza.

FIG. **15**. Sezione verticale di trachea di coniglio in corrispondenza della depitelizzazione 14 ore dopo praticata (ved. la spiegazione nel testo).

» **16**. Preparato per dilacerazione di epitelio tracheale tre giorni dopo l'iniezione di tintura di iodio — *a* cellula in tumefazione torbida priva di ciglia (esaminata a fresco); *b* cellula somigliante trattata con acido acetico; *c* stessa cellula dopo essere stata 24 ore in liquido di Müller — Ingr. 350.

» **17**. Gruppo di due cellule che racchiude una Becherzellen.

» **18**. Gruppo somigliante con cellula dello strato profondo, resa vescicolare. Una cellula vibratile sta emettendo una gocciola di muco, e vicino vi è una sfera mucosa libera con traccie di orlo cellulare privo di ciglia.

» **19**. *a* cellula vescicolare trattata con l'ematoxilina; *b* somigliante cellula con un breve peduncolo.

» **20**. Sezione verticale di trachea di cane, nella quale si iniettarono 8 goccie di tintura di iodio, 44 ore dopo — *a* cellule vibratili superficiali a protoplasma con grossi granuli; *b* una grossa vescicola posta nello strato profondo dell'epitelio, attraverso la quale si travedono le estremità delle cellule vibratili; *c* cellule dello strato profondo con corpo cuneiforme che manda un'estremità assottigliata fino al livello della superficie libera.

» **21**. Cellule isolate della stessa esperienza; *a* cellula col nucleo già scisso, e con protoplasma a grossi granuli; *b* cellula a due nuclei di cui il superiore è vicino all'orlo cigliato ed in direzione trasversale, il protoplasma che lo circonda è già separato dal rimanente; *c* cellula che ha perduto l'orlo cigliato ed emette una grossa goccia di muco; *d* cellula in tumefazione torbida; *e* cellula che pare stia per dar luogo ad una sfera cigliata priva di nucleo; *f* sfera cigliata alquanto oblunga; *g*, *h* sfere mucose rivestite da velamento protoplasmatico.

» **22**. *a* e *b* due sfere cigliate trovate in un essudato escreato da un cane, nella cui trachea si era iniettata una soluzione di tartaro stibiato.

Cellule ottenute dall'epitelio tracheale dello stesso cane; 1) gocciola omogenea; 2) sfera cigliata omogenea senza nucleo; 2') sfera che emette goccioline ialine; 2'') sfera con granuli e vacuoli; 3) sfera granulosa con nucleo, emettente una sferetta ialina; 3') sfera a protoplasma con grossi granuli che mascherano il nucleo; 4) e 5) due cellule il cui corpo è assai ridotto di volume, fornite di lunghissimo prolungamento; 6) e 7) cellule a protoplasma con grossi granuli e nucleo spinto verso l'orlo cigliato; 8) gruppo di tre cellule di cui la mediana ha due nuclei con proto-

plasma raggruppato intorno al superiore; 9) cellula vibratile con due cellule semoventi innicchiate nel protoplasma ai lati del nucleo; 10) cellula in tumefazione torbida con orlo cigliato poco distinto; 11) cellula in tumefazione torbida con zona chiara intorno al nucleo non dovuta a doppio contorno di questo; 12 e 13) cellule con uno o molti grandi vacuoli.

Tavola II.

Fig. **23**. Cellule isolate di epitelio tracheale irritato con olio di crotontiglio (16 a 18 ore dopo l'iniezione); *a* cellula tumefatta fortemente granulosa con vacuoli alla parte superiore del nucleo, il quale è omogeneo, poco colorabile coi comuni mezzi; *b*, *c*, *d*, *e* cellule analoghe con grandi vacui (probabili nicchie di cellule semoventi).

» **24**. *a* due sfere omogenee mucose; *b*, *c*, *d*, *e*, *f* varie forme di sfere cigliate trovate nel 1° stadio della corizza acuta.

NB. Dalla figura 17 della tavola I alla figura 24 della tavola II, l'ingrandimento corrisponde a 300 diametri *circa*, essendo state tali figure copiate ad occhio, e quindi non con quella esattezza, riguardo l'ingrandimento, che si ottiene colla camera lucida.

» **25**. Sezione verticale di mucosa tracheale irritata con olio di crotontiglio; *a* epitelio di rivestimento; *b* connettivo della mucosa infiltrato di globuli rossi (emorragia); *c c* essudato fibrinoso che solleva fortemente ed in totalità l'epitelio di rivestimento; *d d'* due pustole formatesi nello spessore dell'epitelio, il cui strato superiore è sollevato e con cellule disassociate, gli strati profondi compressi, rimangono in posto, limitando una cavità contenente cellule purulenti; *e* dotto ghiandolare tagliato obliquamente; *f* vaso capillare dilatato, tagliato obliquamente; *g g* stravasi sanguigni che infiltrano il connettivo della mucosa; *h h'* vani prodotti per disassociazione delle cellule vibratili; *m* distacco dello strato superiore di cellule vibratili dal sottoposto.

» **26**. Sezione verticale della trachea di cane, iniezione di olio di crotontiglio; produzione di vescicole intraepiteliali a contenuto siero-fibrinoso; *a a* cellule superficiali vibratili in tumefazione torbida, staccate e fortemente allontanate, con stracciamento della loro porzione inferiore, dalle cellule dello strato inferiore *d*; *c c'* cavità della vescicola a contenuto siero-fibrinoso, ed in *c'* con due cellule epiteliali che stirate nell'allontanamento dello strato superiore, cui erano connesse, hanno assunto una forma stellata; *e* strato ialino; *b* connettivo della mucosa con abbondanti stravasi di sangue.

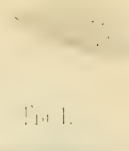
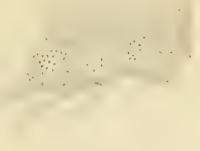
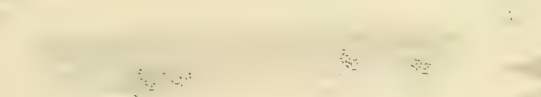
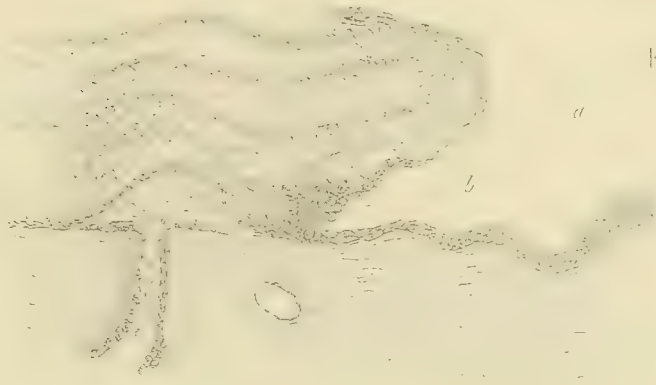
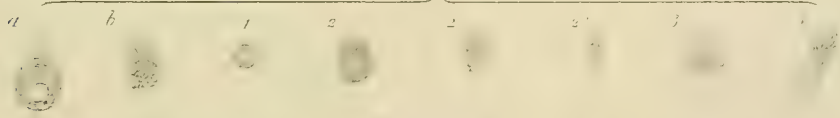
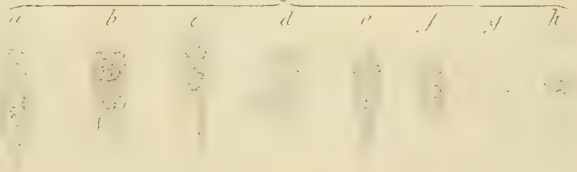
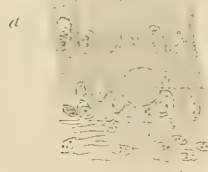
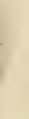
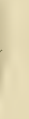
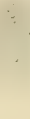
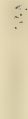
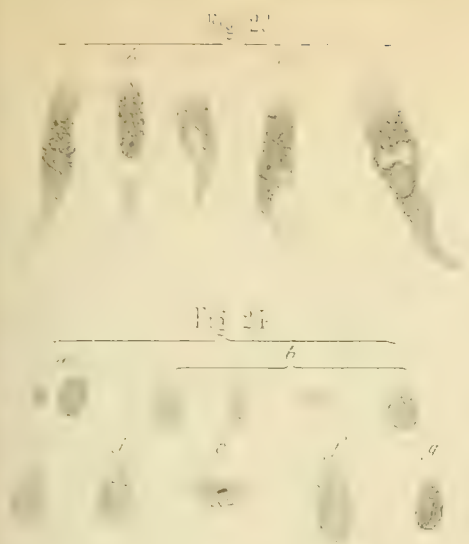
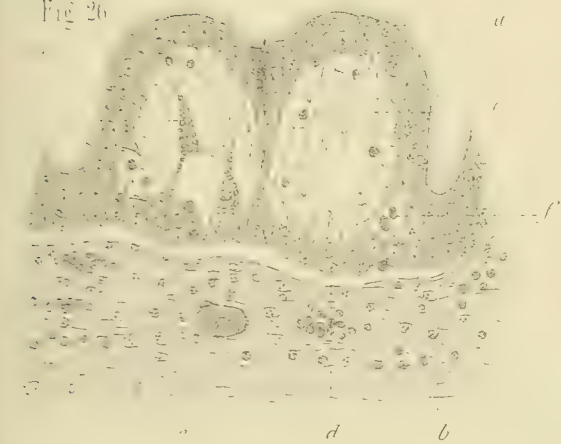
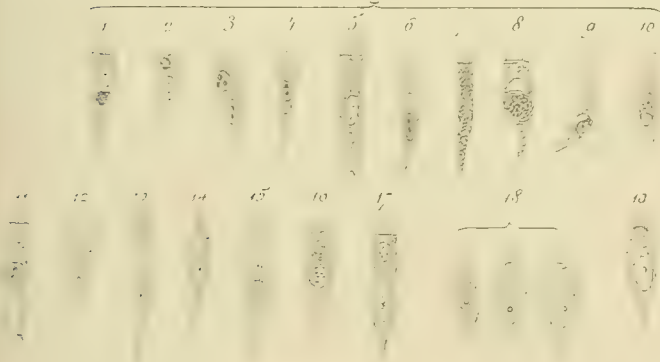
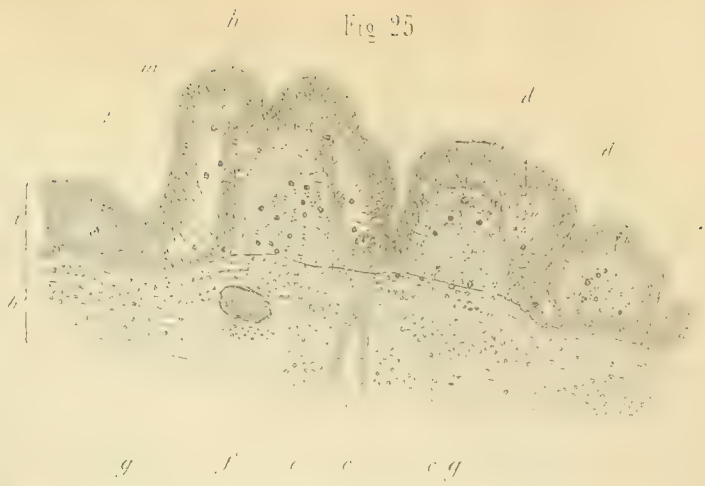
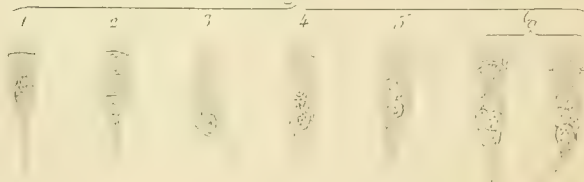
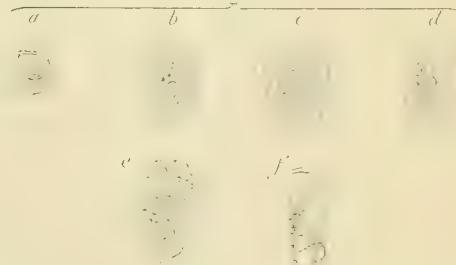
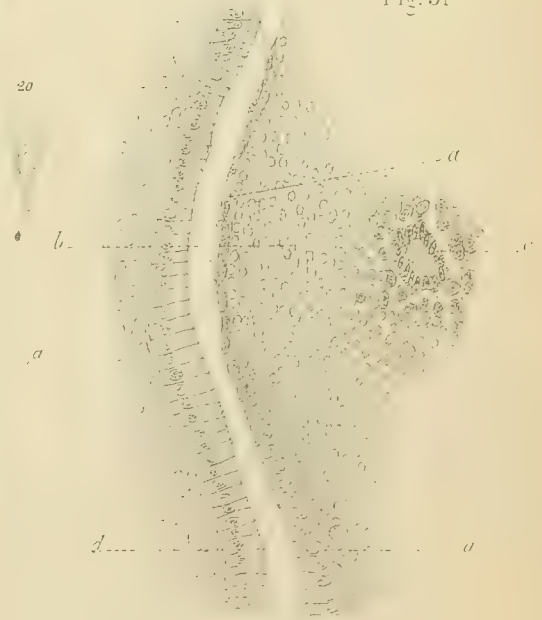
» **27**. Cellule dell'epitelio tracheale ottenute isolate in casi di tubercolosi, ed aventi un nucleo in scissione, o due, tre e quattro nuclei.

Fig. **28**. Cellule isolate negli stessi casi: 1) contenente un globulo rosso sotto il nucleo; 2) contenente un corpicciuolo colorato dal carmino, ma di natura non determinabile; 3) cellula priva di ciglia e che porta una cellula semovente innicchiata nel protoplasma; 4 e 5) cellule con varii vacuoli sopra e sotto il nucleo; 6) idem con un solo grande vacuolo sopra il nucleo e 7) anche un piccolo vacuolo sotto; 8, 9, 10) cellule somiglianti in cui il nucleo è depresso in corrispondenza del vacuo; 11) cellula con grandissimo vacuo che occupa tutta la porzione cellulare sottoposta al nucleo; 12 e 20) cellule caliciformi; 13 e 14) cellule che emettono una gocciola omogenea; 15) cellula che emette una grande massa granulosa (protoplasma) nucleata; 16) cellula con due nuclei in cui il protoplasma tende a raccogliersi intorno al superiore; 17) cellula somigliante col nucleo superiore più vicino all'orlo cigliato e col protoplasma che lo circonda già in parte separato dal restante; 18 e 19) due cellule che offrono un leggiero restringimento del protoplasma, tra nucleo ed orlo cigliato, quasi da far credere ad una separazione della porzione superiore di protoplasma, se non si tratta di cellule alquanto incurvate.

» **29**. Tubercolosi dell'utero e tube faloppiane — cellule isolate, *a* sfera cigliata, *b*, *c*, *d*, *e*, cellule contenenti corpuscoli grossi splendenti ed anche due a tre nuclei; *f* cellula dell'epitelio della tuba faloppiana dopo il trattamento con acido acetico; contiene delle goccioline adipose non sciolte.

» **30**. Tubercolo dei grossi bronchi — limitata trasformazione dell'epitelio — sezione verticale in corrispondenza di un nodulo tubercolare; *a* epitelio vibratile stratificato; *b* connettivo della mucosa fortemente infiltrato di cellule semoventi; *d* nodulo tubercolare con cellula gigante; *e* tratto di epitelio pavimentoso corrispondente ad un rialzo della mucosa — Ingr. 200.

» **31**. Tubercolosi dell'utero — Cl. Medica di Torino, 1875 — Sezione longitudinale di un dotto ghiandolare della mucosa uterina, vicino una parete del quale si ha un nodulo tubercolare; *a* epitelio della parete del dotto dal lato del nodulo tubercolare, il quale va gradatamente facendosi basso finchè in *a*, ove corrisponde il vertice di questo rialzo, diventa pavimentoso; *b* mucosa fortemente infiltrata di cellule semoventi; *c* nodulo tubercolare a cellula gigante molto grande; *d* epitelio normale (senza ciglia) dell'altra parete del tubo ghiandolare, con incavatura corrispondente al rialzo della parete opposta.

Fig. 10
Fig. 12
Fig. 14
Fig. 16
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21

Lit. Salussolia, Torino

RICERCHE

INTORNO ALLA

DISTRIBUZIONE DEI COLORI

NEL REGNO ANIMALE

DEL DOTTORE

LORENZO CAMERANO

Appr. nell'adunanza del 23 Marzo 1884

> In so complex a subject, for which experiment and systematic inquiry has done so little, we cannot expect to explain every individual case, or solve every difficulty.....
>
> A. R. WALLACE, *Tropical nature colours of animals.*

I colori splendidi di molti animali hanno in tutti i tempi colpito i naturalisti e non è raro di trovare nelle opere antiche relative agli animali considerazioni più o meno estese intorno ad essi.

Il primo che abbia cercato di riunire tutti i fatti conosciuti intorno ai colori degli animali ed abbia cercato di scoprirne la legge regolatrice è Carlo Darwin il quale trattò a lungo l'argomento delle colorazioni degli animali nei suoi libri *L'origine delle specie* e *L'origine dell'uomo.*

Quasi contemporaneamente all'opera del Darwin intorno alla origine delle specie si stampava un libro di A. R. Wallace intitolato: *The theory of natural selection* nel quale le questioni relative ai colori degli animali sono pure discusse ed illustrate.

Più tardi nel 1877 l'attenzione dei naturalisti venne di nuovo rivolta ai colori degli animali da un lavoro del Dott. M. Magnus (1) il quale ripigliando a considerare le conclusioni alle quali era giunto il Gladstone nel suo libro « *Studies on Homer and the Homeric age,* 1858, cercava di spiegare le ipotesi formulate dal Gladstone colle moderne teorie (2). Il Magnus conchiude così:

(1) *Zur geschichtlichen Entwickelung des Farbensinnes.* Leipzig, 1877.

(2) Le principali conclusioni del GLADSTONE sono le seguenti:

« 1° Omero si è servito più di tutti gli altri poeti di tutte le espressioni che descrivono gli effetti luminosi in tutti i loro gradi di intensità; ma le sue descrizioni e le sue denominazioni dei colori sono vaghe ed imperfette. Omero adunque aveva una percezione molto difettosa e vaga dei colori prismatici; come ad esempio quelli dell'arcobaleno. La stessa cosa si deve dire e a più forte ragione dei colori non puri.

« 2° Si deve adunque cercare un'altra base pel suo sistema dei colori ».

« 1° Vi è nella storia dello sviluppo dell'uomo un periodo nel quale mancò al tutto il senso dei colori esistendovi semplicemente il senso della luce.

« 2° Il senso dei colori si sviluppò originariamente dal senso *della luce.* L'eccitamento continuo degli elementi sensibili della retina dovuti all'azione della luce aumentò a poco a poco e perfezionò il modo di funzionare della retina stessa in modo che è giunta a distinguere, a sentire non solamente l'intensità, ma eziandio il colore dei raggi luminosi.

« 3° Il tempo che ciascun colore isolatamente deve impiegare per impressionare la retina sta in ragione inversa della quantità di forza viva che ciascun colore possiede. In altri termini, quanto più la quantità di forza viva è piccola e più tempo ha impiegato la retina per distinguerla. I colori adunque dotati di una forte intensità luminosa hanno impiegato un tempo minore che non quelli aventi una piccola intensità luminosa ad impressionare la retina e ad eccitare in essa sensazioni speciali ».

Nel 1878 W. E. Gladstone sostiene gli stessi argomenti (1).

Le conclusioni del Gladstone e del Magnus vennero combattute da vari autori fra i quali ricorderò il Dott. H. Dor (2) il quale sostiene non essere ammessibile la teoria della evoluzione storica del senso dei colori.

Nello stesso anno 1878 il Wallace (3) conchiude nel seguente modo intorno ai colori degli animali. « Le varie cause del colore negli animali sono i mutamenti chimici e molecolari della sostanza dei loro integumenti, o l'azione su di questi esercitata dalla luce, dal calore o dall'umidità.

« Il colore è pure prodotto da interferenza di luce dovuta a lamelle trasparenti sovrapposte le une alle altre o a strie superficiali finissime. Queste condizioni elementari per la produzione dei colori si trovano ovunque nello involucro esterno degli animali tanto che la loro presenza può essere considerata come normale e la loro mancanza come eccezionale.

« I colori sono fissati per selezione naturale o da questa secondo i vari scopi a cui devono servire in colori scuri o imitativi, in colori per dissimulare, in colori vivaci per avvertire o in speciali segni, sia pel facile riconoscimento di individui smarriti, femmine o giovani, sia per difendere da un diretto assalto una parte vitale come nelle grandi e brillanti ali di parecchie farfalle ed insetti. I colori sono prodotti e resi più intensi dal processo dello sviluppo, sia dove l'integumento o i suoi accessorii sono soggetti a grandi estensioni o modificazioni, sia dove vi ha un superfluo di energia vitale, come nell'animale maschio generalmente e più particolarmente nella stagione della riproduzione.

« I colori sono più o meno modificati da molte cause, come per esempio la natura dell'alimento, l'azione fotografica della luce e da alcuni agenti sconosciuti dipendenti probabilmente da particolarità chimiche del suolo e della vegetazione. Queste

---

(1) *Sur le sens de la couleur et particulièrement sur la notion des couleurs dans Homère.* (Revue internat. des Sciences par LANESSAN, vol. I, 1878, vol. II, 1878.

(2) *De l'évolution historique du sens des couleurs.* Réfutation des théories de GLADSTONE et de [illegible]. Paris. 1879.

(3) *Tr[illegible] nature.* Londra, 1878.

varie cause hanno agito e reagito in vari modi e sono state modificate da condizioni dipendenti dall' età e dal sesso o per rivalità con nuove forme o per cambiamenti geografici o climatici ».

Nell' anno 1879 il signor Grant Allen pubblicò un libro sull'origine e sullo sviluppo dei colori degli animali (1). Egli riassume in fine al libro le sue teorie nel modo seguente:

« Gli Insetti danno origine ai fiori. I fiori producono negli insetti il senso dei colori. Il senso dei colori dà origine ad un gusto pel colore. Il gusto pel colore dà origine alle farfalle ed ai coleotteri brillanti.

« Gli Uccelli ed i Mammiferi danno origine ai frutti. I frutti danno origine ad un gusto pel colore negli uccelli e nei mammiferi. Il gusto pei colori produce le tinte esterne degli uccelli mosca, dei pappagalli e delle scimmie. I frugivori antenati dell'uomo originano in esso un gusto consimile e questo produce i risultamenti finali delle arti cromatiche umane ».

Queste conclusioni dell'Allen, in verità molto discutibili non vennero accettate da molti Autori e il Wallace stesso le discusse in varie pubblicazioni (2).

La massima parte degli Autori che si sono occupati fino ad ora dello studio dei colori degli animali hanno trascurato per lo più di studiare quei gruppi di animali nei quali le colorazioni sono poco appariscenti ed hanno generalmente rivolto la loro attenzione al gruppo degli Uccelli ed a quello degli Insetti.

Ora a mio avviso è cosa importante osservare l' andamento della colorazione *sistematicamente ed ordinatamente* in tutti i gruppi di animali dai più semplici ai più complessi.

Questo io ho cercato di fare nel presente lavoro, lavoro destinato a riunire una parte di quei materiali di cui il Wallace, come si legge nelle parole poste in capo di questo capitolo, segna la mancanza.

Mi son messo ad esaminare perciò ordinatamente o sistematicamente giovandomi delle collezioni dei Musei e principalmente di quelle del R. Museo zoologico di Torino e delle più importanti e sicure opere iconografiche, tutti i gruppi di animali dai Protozoi ai Vertebrati, notando:

1° La presenza e la frequenza de'vari colori, pigliando per base lo spettro solare.

2° I rapporti che le varie colorazioni hanno coll' ambiente, col nutrimento, coi costumi, coll' età, col sesso, colla superiorità organica, colla distribuzione geografica, ecc.

Prima di procedere oltre sarà bene che io dica che considero come colori il *nero*, il *bianco*, ed il *grigio*, poichè il *nero assoluto* ed il *bianco assoluto* molto probabilmente non esistono negli animali, poichè ciò che noi comunemente chiamiamo nero non è altro che uno dei colori rosso, giallo, azzurro, verde, ecc. molto carico ed intenso, analogamente il bianco presenta sempre una qualche leggerissima tinta.

---

(1) *The colour-sense-its origin and development an essay in comparative psychology.* London, 1879.

(2) *Nature,* vol. 19, n. 492, 1879; e n. 495. (Vi si contiene uno scritto dell' ALLEN in risposta all'articolo del WALLACE). *Revue internat. des Sciences,* del dottore LANESSAN, vol. IV, 1879.

Avvertirò ancora che nel discorso che segue io chiamo colori vivaci e luminosi il *rosso*, il *giallo*, il *verde*, l'*azzurro chiaro;* colori non vivaci il *nero*, il *bruno*, il *violetto*, il *grigio* e il *bianco;* che io chiamo *vivacemente coloriti* quegli animali nei quali i colori luminosi predominano ed *appariscentemente* coloriti quelli nei quali la colorazione è molto intensa e vistosa anche se formata da colori non luminosi.

CLASSIFICAZIONE DEI COLORI DEGLI ANIMALI.

Non è possibile dare colle cognizioni attuali una classificazione naturale dei colori degli animali.

La *chimica* e la *fisica* non han fatto ancora che sfiorare lo studio dei pigmenti animali e da queste scienze soltanto si può aspettare la chiave dei fenomeni di colorazione degli animali per quanto riguarda la loro natura intima.

Le varie classificazioni dei colori proposte dai vari Autori non riguardano per lo più che qualche gruppo isolato di animali.

Il Wallace (1) cercò di dare una classificazione dei colori fondata sui servizi che essi rendono ai loro possessori. « Let us therefore tacke a wider wiew of these colour grouping them in to classes determined by what we know of their actual uses or special relations to the habits of their possessors ».

Ecco la classificazione dei colori delle piante e degli animali del Wallace:

Animali
- 1° Colori protettori — Di animali aventi una maniera speciale di protezione.
- 2° Colori avvisatori — Di animali privi di modi speciali di protezione i quali imitano quelli del gruppo precedente.
- 3° Colori sessuali
- 4° Colori tipici

Piante -- Colori attrattivi.

La via aperta dal Wallace può condurre a notevoli risultamenti; ma la sua classificazione non è sufficiente, poichè lascia in disparte molte maniere di colorazioni che non possono entrare nelle categorie da lui stabilite.

In quanto al gruppo dei colori tipici io lo credo soltanto sostenibile quando lo si voglia riferire a colorazioni dei più semplici fra gli animali, ai *Protozoi*.

La classificazione del Wallace è buona, a mio avviso, salvo l' ultimo gruppo, essenzialmente per gli animali superiori, pei vertebrati.

Io ho cercato nella classificazione che segue di riunire tutte le maniere di colorazione trovate nell'esame dei vari gruppi di animali.

---

(1) *Tropical nature*, pag. 172.

COLORAZIONI

- Delle parti interne degli Animali prodotte da
  - fenomeni di interferenza luminosa. — Tendini — muscoli — membrane diverse.
  - pigmento o da sostanze coloranti determinate. — Sangue — bile — liquidi ghiandolari diversi, ecc. — Ovarii, ecc. — Membrane diverse.
  - da sostanze estranee introdotte nell'organismo. — Colori di animali inferiori trasparenti variabili secondo le sostanze delle quali si nutrono.
- Delle parti esterne degli animali — Colori ipodermici ed epidermici
  - Prodotti o da fenomeni di interferenza luminosa o da pigmento, o da sostanze coloranti speciali, o da interferenza luminosa e da pigmento o sostanza colorante ad un tempo.
    - Colorazioni utili agli animali
      - come colorazioni protettrici utili
        - immediatamente
          - imitanti il colore del suolo o dei corpi fra i quali l'animale vive.
          - imitanti i colori di altri animali i quali hanno un qualche speciale mezzo di protezione.
        - mediatamente
          - colori avvisatori.
          - colori deviatori.
      - come colori insidiosi
        - imitanti il colore del suolo o dei corpi fra i quali l'animale vive.
        - colori attrattivi.
      - (Colori sessuali (in parte))
    - Colorazioni indifferenti
      - Perchè l'animale ha altri mezzi di protezione.
      - Colori tipici (Protozoi).
      - (Colori sessuali (in parte))
    - Colorazioni rudimentali
      - incipienti — protettrici.
      - residue — indifferenti o non protettrici.
      - (Colori sessuali (in parte))
    - Colorazioni accidentali
      - Prodotte da condizioni biologiche speciali nelle quali ciascun individuo si trova — Melanismo — Albinismo.

Io non parlo qui delle colorazioni delle parti interne degli animali poichè ciò esce dal campo in cui io voglio tenermi in questo lavoro. Ricercherò soltanto che queste colorazioni sono spesso spiccate come ad esempio negli ovarii degli Echini e nelle ossa di qualche Anfibio anuro.

Io ebbi già occasione in un mio precedente lavoro (1) di occuparmi della colorazione azzurra che presentano le ossa dello *Pseudis paradoxa* in seguito alla presenza in esse di *fosfato di ferro*.

Il Peters osservò pure la stessa colorazione azzurro-verdastra nella *Pseudis minuta*, ma non ne diede alcuna spiegazione.

(1) *Nota intorno alla colorazione naturale delle ossa di una specie di Anfibio anuro.* Atti Accad. delle Scienze di Torino, vol. XV, 1880.

I colori delle parti esterne degli animali, per ciò che è della loro posizione, possono dividersi, come già fece l'Hagen, in due grandi categorie: in colori epidermici ed in colori ipodermici. I primi sono quelli che si trovano essenzialmente nelle penne, nei peli, nello strato chitinizzato degli insetti, ecc.

Questi colori non variano molto dopo la morte dell'animale.

I secondi sono quelli che si trovano negli strati inferiori e molli della pelle e che tingono spesso quelle parti degli animali nude di peli o di penne; molti mammiferi ed uccelli ci presentano esempi di tali colorazioni. Naturalmente; queste due categorie di colori non sono separate fra loro da un taglio netto e non è difficile trovare esempi di colorazioni che potrebbero sostituire una categoria intermedia alle due precedenti.

I colori detti epidermici possono essere prodotti dalla presenza di un pigmento speciale, come si vede nella massima parte dei casi; se questo pigmento ha forma determinata ci si presenta sotto forma di cellule pigmentali, se non l' ha diffuso egualmente per tutto il tessuto epidermico. Non di rado si trovano riunite nello stesso animale le due maniere di colorazione.

I colori epidermici possono poi essere prodotti semplicemente da fenomeni di interferenza luminosa, cagionati dalla presenza di minutissime laminette sovrapposte le une alle altre in modo speciale, come nelle elitre di molti insetti, oppure dalla presenza di strie o di peluzzi finissimi posti sulla parte esterna della pelle, o anche da peli e da squame che, alla lor volta, hanno la superficie esterna solcata da minutissime striscie le quali producono fenomeni di iridescenza, ecc.

I riflessi metallici, l'opacità, il vellutato, ecc., che si osservano in molti casi, o nelle penne o sul capo di molti insetti provengono essenzialmente da strutture speciali della superficie della pelle o della produzione dermica.

La stessa tinta, lo stesso pigmento prendono un aspetto molto diverso secondo che noi li vediamo attraverso ad una superficie liscia e riflettente o ad una superficie rugosa od opaca.

In altri casi, non rari specialmente nelle penne degli uccelli o nello strato epidermico degli insetti troviamo ad un tempo pigmento e fenomeni di interferenza luminosa, quest'ultima prodotta dalla struttura della superficie della pelle stessa. In molti insetti, ad esempio nei carabici, gli individui di fresco trasformati hanno le tinte molto più chiare che non quelli che hanno già qualche mese di vita. Orbene, non è raro il caso di vedere sulle elitre o sul corpo dei riflessi iridescenti dovuti alla struttura dell'elitra la quale più tardi diventa interamente colorita per la produzione di pigmento ipodermico o per altre ragioni poco note finora.

I colori degli animali dovuti ad interferenza luminosa considerando complessivamente tutti gli animali, sono scarsi; abbondano invece i colori prodotti da sostanze pigmentali.

Naturalmente io non parlo qui della natura del colore delle cellule pigmentali La scienza non ha ancora cognizioni sicure in proposito. Non è impossibile che le colorazioni di alcune specie di cellule pigmentali siano dovute a fenomeni di interferenza luminosa che si compiono nella sostanza costituente le cellule stesse. Non è forse impossibile che i riflessi dorati di molti Pesci e di molti Anfibi abbiano

la stessa origine di quelli che si verificano in certe varietà di pirite e di calcopirite e in altri minerali, cioè che uno strato sottilissimo, il più esterno, della sostanza pigmentale si ossidi (dico si ossidi per indicare una mutazione chimica probabile, non avendo la scienza nessun dato positivo in proposito) e diventi iridescente essendo il nuovo corpo così formato ridotto a grandissima sottigliezza.

Le colorazioni provenienti da fenomeni di interferenza pigliano il loro massimo grado di sviluppo negli insetti e negli uccelli.

Lasciando in disparte questi argomenti veniamo ora a parlare dei colori degli animali dal punto di vista dei rapporti che i colori stessi hanno coi costumi degli animali e della utilità che recano a questi.

I colori degli animali si possono anzitutto dividere in colori utili ed in colori indifferenti. Non tutte le colorazioni che noi osserviamo negli animali hanno una utilità ben determinata per l'animale stesso. Molte volte l'azione del colore è contro-bilanciata, e spesso anzi superata dall'azione di altre cause; per esempio dalle modificazioni speciali delle forme, o dalla presenza di apparati di difesa o di offesa determinati. Non sempre tutti i colori che noi osserviamo attualmente negli animali sono colorazioni utili o indifferenti; molto probabilmente alcune sono realmente nocive all'animale stesso.

Il concetto dei molti filosofi dei tempi trascorsi, che cioè tutte le parti di un animale hanno un uffizio determinato *e prestabilito*, non è un concetto giusto ed oramai non è più guari sostenibile.

Nello stesso modo in cui in moltissimi animali (anzi in quasi tutti i gruppi di animali, se ne trovano esempi), vi sono parti rudimentali che non servono più e che quindi sono sulla via di scomparire, e in altri si trovano parti le quali sono soltanto, per dir così, abbozzate e tendono a svilupparsi ed a perfezionarsi, così anche nelle colorazioni degli animali, io credo che si debbano ammettere delle colorazioni le quali tendono a scomparire e sono gli avanzi di colorazioni primitivamente esistenti, e colorazioni le quali tendono a svilupparsi e a dare un nuovo aspetto all'animale.

In poche parole io credo che si possano stabilire delle categorie di *colorazioni rudimentali* analoghe alle categorie di *organi rudimentali*.

Queste colorazioni rudimentali possono quindi essere di due maniere: *rudimentali residue* o *rudimentali incipienti*.

Gli esempi di queste categorie di colorazioni sono abbondantissimi negli animali si trovano in tutti i gruppi di animali che hanno una vita di relazione un poco intensa.

Troviamo frequentissimamente nello stesso animale ad un tempo colorazioni rudimentali e colorazioni incipienti. È cosa spesso assai difficile il dire se una determinata colorazione rudimentale sia incipiente o residua. Per ciò fare bisogna studiar bene i costumi dell'animale, i luoghi in cui vive, i corpi che lo circondano ecc., onde poter determinare bene se una data colorazione possa essere o non essere protettiva.

Gli animali non sono coloriti in un modo stabile e definitivo; ma vi è una lotta per dir così, fra l'animale che tende spesso ad assumere colorazioni vivaci e i colori

che tendono a svilupparsi, e la scelta naturale che cerca di sviluppare soltanto alcuni determinati colori, facendone scomparire certi altri. Lo studio della distribuzione dei colori nel regno animale conduce ad accettare l'opinione del Wallace (1), intorno alla produzione dei colori stessi. « It seems, egli dice, a fair conclusion that colour per se may be considerat to be normal, and to need no special accounting for; while the absence of colour (that is, either white or blak), or the prevalence of certain colours so the constant exclusion of otters, mut be traced, like other modifications in the economy of living things, to the needs of the species. Or looking at it in another aspect, we may say, that amid the constant variations of animals and plants colour is ever tending to very and to appear where it is absent: and that natural selection is constantly eliminating such tints as are injurious to the species, or preserving and intensifying such as are useful ».

Possiamo dire dunque che gli animali tendono a prendere colorazioni vivaci. Il colore è una conseguenza, per dir così, dello sviluppo dei loro tessuti. A queste conclusioni si giunge principalmente esaminando il sistema di colorazione degli animali più semplici.

Nei Protozoi, sopratutto nei Rizopodi, le colorazioni sono spesso vivacissime ed intense. Noi troviamo per esempio delle specie, in cui la massa protoplasmatica è di un rosso vivacissimo; altre in cui essa è di un azzurro intenso, altre ancora in cui è gialla, ecc. Queste colorazioni spiccate, uniformi e decise si mantengono pure più o meno evidentemente nei Celenterati, negli Echinodermi e nei Vermi; a misura che si sale nella serie zoologica, queste colorazioni si modificano e possiamo dire che in complesso tendono a dar luogo a tinte più oscure e più cupe; tendono a produrre il bruno e il nero. Ciò si può vedere molto bene paragonando i sistemi di colorazione dei vari gruppi di animali, e sopratutto degli animali superiori.

Ritornando alle colorazioni rudimentali, dirò che esse sono frequentissime, poichè quasi tutte le specie dei generi un po' numerosi ne offrono esempi.

Le colorazioni rudimentali residue si trovano spesso nelle parti dell'animale che sono meno in vista e ciò avviene sopratutto quando si tratta di colorazioni molto vivaci ed appariscenti. Negli Uccelli, per esempio, le parti inferiori dell'addome, il sottocoda, le parti interne delle ali, ecc., hanno colorazioni assai vivaci, mentre quelle delle parti superiori dell'addome, del petto e delle parti superiori sono invece oscure e sbiadite. Anche nei Mammiferi non di rado si trovano casi di colorazioni più oscure nelle parti inferiori che non nelle superiori. Lo stesso si può dire pei Rettili, e sopratutto per gli Anfibi in cui (anche nelle specie dei nostri paesi, nel *Bombinator igneus* per esempio: nella *Salamandrina perspicillata* ed in molti altri casi), le parti superiori sono brune o nerastre e le parti inferiori sono invece vivacissimamente macchiate di rosso, ecc. La stessa cosa poi, e sopra una scala vastissima si osserva negli Insetti, sopratutto nei Lepidotteri, negli Ortotteri e nei Coleotteri. Molti Coleotteri per esempio (Cicindele, Geotrupidi, ecc.), hanno le parti inferiori con dei riflessi metallici splendidissimi, mentre le loro parti superiori sono invece oscure, opache, grigiastre o verdastre, secondo i casi. Negli Ortotteri frequentemente le ali

(1) Op. cit.

inferiori sono riccamente colorite, mentre l'opposto accade per le ali superiori. Così pure in molte specie le colorazioni si osservano nella parte inferiore delle zampe, là dove essa è poco in vista. Nei Lepidotteri le ali inferiori hanno spesso il loro margine superiore, quello che rimane normalmente più o meno ricoperto dalla parte posteriore dell'ala superiore vivacemente colorite. Così pure nella specie in cui, mentre l'animale è in riposo, le ali ricoprono l'addome, questa parte è spesso tinta di colori appariscenti. La stessa cosa si può dire pei Rincoti, per gli Aracnidi e pei Crostacei.

Le colorazioni rudimentali incipienti nella maggior parte dei casi cominciano invece ad apparire nelle parti che sono più in vista, e si estendono poi a poco a poco alle altre.

Nelle ali inferiori dei Lepidotteri, per non citare che qualche esempio, è dalla periferia che in generale comincia la colorazione oscura, la quale va a poco a poco avvicinandosi al margine superiore ed interno dell'ala stessa, parte che, come già si è detto, è generalmente l'ultima a perdere le colorazioni appariscenti.

Nei *Geotrupidi* gia citati, la parte più opaca e meno vivacemente colorita è l'alto del dorso. Le striscie longitudinali elegantissime e vivaci che in molti *Carabus* circondano esternamente le elitre sono molto probabilmente colorazioni residue di una colorazione che si estendeva a tutta la parte superiore dell'animale. Lo stesso fatto si può osservare in molti uccelli.

Le colorazioni *rudimentali incipienti* cominciano invece ad apparire nelle parti che sono più in vista e si estendono poi a poco a poco alle altre.

Nei Geotrupidi, ad esempio, già citati, la parte opaca e meno vivacemente colorita è l'alto del dorso. Negli uccelli le colorazioni rudimentali incipienti cominciano generalmente ad apparire sul dorso.

Quanto meno è in vista la regione nella quale si trova la colorazione rudimentale residua, tanto più questa è stabile nell'animale.

Quanto più la colorazione rudimentale incipiente è diversa di tinta e di tono da quella già esistente, tanto più presto la colorazione rudimentale residua scompare dall'animale riducendosi alle parti meno visibili dell'animale stesso.

Le colorazioni non solo servono a rendere meno visibile l'animale ai proprii nemici, ma anche a renderlo meno visibile a quegli animali di cui si vuole impadronire.

Nel corso del lavoro ho menzionato molti esempi di colorazioni utili in questo senso. Ricorderò tuttavia la colorazione dello *Spilornis holospila*, rapace diurno il quale ha, principalmente nelle parti inferiori, un sistema di macchiettatura non come predomina nel gruppo dei Rapaci ma analoga a quella che presentano varie sorta di Uccelli viventi nella stessa regione. È probabile che la colorazione in discorso serva all'animale per avvicinarsi non visto alla preda.

Nella categoria dei colori attrattivi io metto quei colori vivaci che si trovano spesso negli animali o privi al tutto di movimento, o dotati di movimento scarso; come le Attinie, alcuni Echinodermi, certi Vermi marini, ecc. Io credo che i colori di questi animali agiscano verso gli altri animali come i colori dei fiori della terra emersa. È un fatto noto e che può essere facilmente verificato da chiunque che i colori vivaci

attirano gli animali e soprattutto gli animali acquatici. Il Cuvier (1) ha a questo proposito le parole seguenti: « Lorsqu'ils se trouvent (parla dei Physeter) eloignés des côtes, leur nourriture principale consiste en une espèce de sèche (*Sepia octopedia*); près de terre ils se nourrissent de poissons parmi lesquels s'en trouvent des petits et d'autres qu'ont la taille moyenne d'un saumon. Les pêcheurs et M. Béale admettent cette opinion, pensent que pour s'emparer de sa proie le cachalot descend à une certaine profondeur et qu'il ouvre sa mâchoire de manière qu'elle forme un angle droit avec la mâchoire opposée. La *blancheur de ses dents attire alors les sèches*, comme elles le sont par toutes les couleurs brillantes et même les poissons qui sont avalés dès qu'ils se trouvent en quantité suffisante..... Ce qui porte M. Béale à admettre l'idée des pêcheurs, que c'est par une sorte d'attrait que ces petits animaux se rendent dans la guele du cachalot et qu'ils ne sont point poursuivis par cet animal c'est qu'il a vu des cachalots entièrement privés de la vue, et d'autres qui ne pouvaient faire aucun usage de leur mâchoire inférieure monstrueusement conformée, être aussi bien nourris, avoir autant de graisse que ceux dont l'organisation était la plus parfaite ».

I colori attrattivi, si noti, sono principalmente sviluppati negli animali marini ed in quelli in cui la locomozione è scarsa o manca interamente.

I colori avvisatori sono quelli che rendono l'animale molto appariscente e lo proteggono facendolo distinguere da altri. In questi casi l'animale è per lo più protetto o da secrezioni velenose o da odori forti, ecc.

Nei colori deviatori entrano tutti quelli che tendono a portare l'attenzione del nemico sopra parti di poca importanza per l'animale. Così ad esempio le macchie oculiformi delle ali di molte farfalle che sono collocate quasi sempre alla periferia dell'ala. Così le appendici intensamente colorate di molti animali, ecc.; il Darwin ed il Wallace hanno nelle opere ripetutamente citate, studiato a lungo questa categoria di colorazioni.

Un'altra categoria di colori ci presentano gli animali, categoria che io chiamo dei colori indifferenti. Queste colorazioni sulle quali probabilmente ha poca azione la scelta naturale, sussistono costanti poichè l'animale ha altri mezzi di protezione, come in integumento molto duro, la presenza di un dermascheletro, di una conchiglia, ecc.

In un'altra categoria speciale io colloco i colori tipici.

Il gruppo dei colori tipici quali io lo intendo è diversamente costituito da quello della classificazione del Wallace.

In questo gruppo io colloco semplicemente i colori che si incontrano nei più semplici fra i Protozoi. Quei colori che negli altri animali inscurendosi o facendosi più chiari o mescolandosi fra di loro danno luogo a tutte le svariatissime colorazioni degli animali stessi. Il rosso, il giallo, l'azzurro e il verde puro dei Protozoi sono colori tipici.

(1) *Histoire naturelle des Cétacés*. Paris, 1836, pag. 381.

Un'ultima grande categoria di colori comprende le colorazioni sessuali.

La teoria della scelta sessuale quale venne escogitata dal Darwin, non è sufficiente per spiegare le colorazioni sessuali.

In moltissimi casi i colori sessuali si possono spiegare colla semplice scelta naturale e colle leggi dello sviluppo dei colori in rapporto collo sviluppo delle forme (1).

Il Wallace nell'opera ripetutamente citata espone a lungo le ragioni per le quali la teoria della *scelta sessuale* non può spiegare la produzione delle colorazioni sessuali. Io non ripeterò qui le conclusioni del Wallace, dirò solo che le differenze sessuali di colori si incontrano anche in molti animali inferiori, come ad esempio, nei Crostacei, come dimostra il Weismann, nei Celenterati (*Galeolaria aurantiaca*), ecc. In questo ultimo caso i colori dei maschi sono gli stessi di quelli delle femmine ma molto più intensi. In queste ultime abbiamo del giallo pagliarino nei primi invece abbiamo del giallo arancio.

Ciò si verifica spessissimo colle differenze sessuali di colorazione anche negli animali superiori: Uccelli, Insetti, Mammiferi, ecc. Spesso il giallo chiaro delle femmine passa nei maschi in giallo arancio od in rosso. L'azzurro chiaro delle femmine passa nei maschi in violetto od in nero, il verde in rosso, il giallo verdastro in verde intenso, ecc.

In generale si può dire che quanto maggiori sono le differenze di forma fra i due sessi, tanto maggiori pure sono le differenze di colore.

Si trovano certi casi nei quali le femmine hanno colori più vivaci dei maschi. Ciò si può spiegare ricorrendo anche qui agli animali inferiori. Nei Cefalopodi ad esempio il maschio della *Loligo sagittata* è meno intensamente colorito della femmina ma ne è anche meno sviluppato. Non sono rari gli esempi analogi in altri gruppi di animali inferiori.

Le differenze sessuali di colore sono molto variabili nel loro sviluppo nei diversi gruppi di animali, non solo nelle grandi divisioni, ma nella stessa famiglia e nel genere stesso.

PROTOZOI

La massima parte dei Protozoi è al tutto scolorita: il loro corpo è trasparente e ialino: talvolta essi presentano colorazioni accidentali dovute a sostanze estranee introdotte nell'interno dell' organismo. In qualche caso vi ha una colorazione propria uniformemente sparsa per tutta la sostanza dell'animale oppure dovuta a granuli colorati i quali si accumulano più o meno in varie parti del corpo. Nei Protozoi si incontrano: il *rosso*, il *giallo*, l'*azzurro* ed il *verde*.

Il *verde* è frequente nei Flagellati ed in vari Infusori propriamente detti. Talvolta la colorazione verde è molto intensa come nel genere Euglena (*E. geniculata*,

(1) Si consulti a questo proposito P. MANTEGAZZA. *L'elezione sessuale e la neogenesi.* Archivio per l'antropologia e l'etnologia, vol. I, 1871.

E. longicauda, ecc. (1), nel genere Uvella *U. virescens*) nel *Chilomonas paramecium*, ecc. (2).

Al verde tien dietro per la frequenza il giallo il quale accompagna talvolta il verde nella stessa specie. Pare che il giallo provenga da una modificazione del verde prodotta da modificazione chimica della sostanza dell'animale stesso. Il giallo è talvolta molto intenso come nelle Vaginicole e in vari Rizopodi. La massa centrale ad esempio della *Achantodermia polibrocha* è di un bel giallo. Sia in questa specie, sia nella *Cyrtidosphaera echinoides* sia in altre vi sono fra i pseudopodi numerosi corpicciuoli di color giallo vivacissimi (3).

Il rosso non è raro nei Protozoi e talvolta come nella *Oxytricha rubra*, nell'*Actinelius purpureus*, ecc. (4) costituisce la colorazione di tutto l'animale.

Il rosso accompagna molto frequentemente il verde e in vari casi, come ad esempio nell'*Oxytricha flava*, lo si direbbe una modificazione del giallo.

L' azzurro è molto meno frequente. Esso è talvolta diffuso per tutto l'animale come in varie specie di *Dileptus*: altre volte è solo nella massa centrale nella *Cyrtidosphaera echinoides.*

Nei Protozoi finalmente il giallo volge talvolta al bruno.

CELENTERATI

I Celenterati hanno spesso colorazioni vivaci: ora esse sono limitate alle parti interne degli animali, ora sono esterne.

Il *verde* è scarso nei Celenterati nei quali è abbondante invece il *bruno.*

Il corpo è spesso trasparente e ialino: in molti casi la colorazione è dovuta solamente alla fosforescenza.

Nelle spugne predominano i colori uniformi e poco appariscenti: quantunque si abbiano in essi tinte rossastre come nel *Pandarus acanthifolium*, nell'*Euryades notabilis* (5), nell'*Halisasca lobularis* var. *purpurea* (6) e come nella *Tetilla radiata* (7).

Il giallo è frequente. Il verde è invece scarso. Si trova il verde nell'*Amphimedon viridis* nella *Tetilla euplocamus* nella *Spongia dumentosa.*

Si trova pure il violetto come nell'*Hyrtios musciformis.* Hanno ad esempio colorazioni scure, quasi nere, la *Calospongia*, *mollis*, la *C. scalaris*, la *C. cavernosa*, l'*Hiscinia spinulosa* (8).

---

(1) FROMENTEL, *Études sur les microzoares.* Paris, 1874, tav. XXII.

(2) O-BÜTSCHLI, *Beiträge zur Kenntniss der Flagellaten. Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. 30, tav. XI-XV, 1878.

(3) F. COHN, *Neu Infusorien in See aquarium. Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. 16, 1866, tav. XIV e XV.

(4) E. HAECKEL, *Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. XV, 1865, tav. XXVI.

(5) P. DUCHASSAING e G. MICHELOTTI, *Spongiares de la mer Caraibe.* Harlem, 1864, tav. XX e XXV.

(6) E. SCHULZE, *Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. XXVIII, 1877, tav. I.

(7) E. SELENKA, *Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. XXXIII, 1879, tav. XXVII.

(8) SCHULZE, *Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. XXXII e XXXIII.

Le colorazioni , fatto degno di nota , variano anche negli individui della stessa specie. Così nell'*Halisarca lobularis* troviamo una varietà di color rosso ed una di color porporino (1).

Negli *Alcionari* si hanno a un dipresso le stesse tinte delle spugne, talvolta con gradazioni vivacissime. Nei Madreporari le cose vanno come negli Alcionari : ma le tinte sono in generale meno intense.

Gli Attiniari hanno invece colorazioni vivaci, eleganti e svariate, e spesso lo stesso animale presenta l'unione di due o più colorazioni ben spiccate. Il verde, scarso nei gruppi precedenti, torna a trovarsi, il che è in rapporto col loro corpo molle e col loro vivere fra le alghe marine le quali spesso sono verdi.

In molte specie , la parte superiore del corpo ed i tentacoli sono vivacemente coloriti e danno all'animale, quando espande i tentacoli, l'aspetto di un fiore, come ad esempio nella *Cariophyllia Smithii* nella *Sagastia venusta*, nel *Cerianthus lioyrdii.* È probabile che come i fiori i quali coi loro splendidi colori attirano gli insetti, le Attinie attirino gli animaletti marini colle loro colorazioni *insidiose.* Ciò è in rapporto colla scarsità dei movimenti di questi animali, e coll'essere le colorazioni vivaci nelle parti più in vista dell'animale stesso.

Nelle *Idromeduse* e nei *Ctenofori* spesso il corpo è trasparente e ialino e talvolta a colorazioni leggiere. In vari casi fra le Meduse si hanno tuttavia colorazioni ed anche macchiettature molto intense e vivaci come ad esempio nella *Chrysaora mediterranea*, ecc. (2).

Si hanno frequenti colorazioni dovute a fenomeni di fosforescenza.

Nelle Idre d'acqua dolce si hanno colorazioni delicate, rosee, verdi, giallastre o bruniccie. Un fatto importante per la questione dei colori sessuali si osserva nella *Galeoraria aurantiaca* Vogt, nella quale gli individui maschili sono di color giallo arancio intenso, mentre gli individui femminili sono invece di color giallo pallido.

Questo fatto è un buon argomento in favore della teoria che considera la causa prima dei colori sessuali maschili come un portato della maggiore attività vitale del maschio indipendentemente dall'azione diretta della scelta sessuale.

Per quanto riguarda i fenomeni di fosforescenza si consultino le opere del Panceri e fra le altre le seguenti:

La luce e gli organi luminosi dei Beroides (Atti R. Accademia di Scienze Fisiche di Napoli, 1871).

Intorno alla sede del movimento luminoso nelle Campanularie, Ibid. , 1876.

---

(1) F. E. Schulze, Op. cit.

(2) E. Haeckel, *Das System der Medusen*, tav. XXXI. Jena, 1880.

ECHINODERMI

Negli Echinodermi vi è in generale poca ricchezza di tinte. Gli Asteridi e gli Olotondi sono i gruppi più vivacemente colorati.

Negli Asteridi predomina il giallo-rosso il quale occupa talvolta tutto il corpo e si inscurisce qua e là formando delle macchiettature come nell'*Asterias aurantiaca* nel *Goniodiscus placentaeformis*, nell' *Asteriscus Pancerii*, ecc. (1). La colorazione è uniformemente gialla; ma è meno vivace nell'*Ophionycha flaccida*, nell'*Ophiolepis elegans*, ecc. (2). In altri casi troviamo il *violetto*, il *verdiccio*, il *bruno* ed il *grigiastro*. Queste varie colorazioni si trovano anche riunite in modo elegante nello stesso individuo come nell'*Hermipholis cordiphera*, nell'*Ophiopholis bellis*, nell'*Ophiura holnesii*. I raggi hanno macchiettature disposte in serie trasversali. Variano spesso le colorazioni delle due parti dell'animale: le parti superiori hanno spesso colori più vivaci delle inferiori. È possibile che anche qui come negli Attiniari si abbia esempio di *colorazioni insidiatrici*.

Negli Echinidi predominano il bruno, il nerastro, il grigio ed il violetto. Le parti dure esterne sono spesso fasciate di bruno e di chiaro come nell'*Echinus mamillatus*. Internamente gli ovarii di varie specie sono di color rosso-aranciato.

Gli Oloturidi hanno spesso colorazioni vivaci ed eleganti come nella *Holoturia elegans*, altre volte la colorazione è uniforme e dimessa come nella *Holoturia oceanica*, nella *Fistularia lilla* e in altre specie affini. Altre volte finalmente il corpo è trasparente e leggermente roseo-violetto con striscie bianchiccie, come nella *Synapta duvernaea*.

VERMI

Il sistema di colorazione dei Vermi è molto vario e vi troviamo sistemi di colorazione che ricordano quelli dei Molluschi, dei Celenterati, ecc.

Nei Platelminti e nei Nematelminti gruppi che comprendono essenzialmente forme endoparassite, le colorazioni mancano o sono sbiadite ed appena accennate.

Nelle Planarie invece la colorazione è vivace e variata e ricorda, soprattutto quella delle forme marine, quella dei molluschi nudi. Nelle Planarie troviamo il verde, il giallo, il rosso, il nero, il grigio, il bruno e frequentemente varie di queste tinte sono riunite nello stesso individuo. Talvolta l'animale è di color bianco lattiginoso.

I Gefiriei rassomigliano in complesso per la colorazione alle Planarie. Gli Irudinei hanno colorazioni più intense e in complesso meno vivaci che non nei Vermi dei due gruppi precedenti. Le macchiettature sono spesso notevoli e spiccate, come si osserva in varie specie di Bdellidi e nella sanguisuga comune. Le parti superiori sono in generale più oscure delle inferiori.

---

(1) F. Gasco, *Rendic. Accad. Scienze Fis.* di Napoli, 1876.

(2) T. Lyman, *Ophinridae and Asterophitide. Illustred Catal. of. t. Mus. Comp. Zool. A. Horward College*, n. 1, 1865.

Nei Chetopodi le colorazioni sono variabilissime e spesso molto eleganti, in essi troviamo un nuovo esempio di colori *insidiatori:*

Nei *Phyllodoce*, nelle *Eulalia*, nelle *Arenicole*, nelle *Serpule*, nelle *Pectinaria*, nelle *Terebelle*, ecc. si trovano i colori che abbiamo osservato nelle Attinie ed a un dipresso anche colla stessa intensità.

Negli Anellidi provvisti di astuccio calcareo la parte che l' animale tiene fuori usualmente dall'astuccio è vivacemente colorita e ricorda le corolle dei fiori. È possibile che anche qui si abbiano colori insidiatori come nelle Attinie.

Nell'*Eunice magnifica* i tentacoli sono fasciati di bianco rossastro o di bruno-nerastro. Un analogo sistema di colorazione si incontra nel *Cerianthus lioydii* nel quale i tentacoli sono fasciati di rosso e di bianchiccio. In non pochi Anellidi marini vi sono colorazioni dovute alla fosforescenza: il *Chaetopterus variopedatus*, il *Balanoglossus minutus*, l'*Odontosyllis ctenostoma* hanno una bella luce verde, il *Polycirrus aurantiacus* ha luce violetta, ecc. (1).

Negli Oligocheti finalmente le tinte sono meno spiccate e meno svariate che non nei Policheti. Nei primi predominano il rossiccio, il gialliccio od il bruno chiaro. Vi sono spesso colorazioni iridescenti. Si vuole che in qualche caso si abbiano fenomeni di fosforescenza come nel *Lumbricus terrestris*. Ciò merita di essere meglio studiato.

ARTROPODI.

CROSTACEI

Il sistema di colorazione dei Crostacei si scosta notevolmente dai sistemi di colorazione della maggior parte degli altri Artropodi o si avvicina invece a quello dei Molluschi. A ciò contribuisce certamente e la natura del dermoscheletro e il mezzo nel quale la massima parte dei Crostacei suole vivere. Anche nei Crostacei le forme parassite hanno colorazioni meno vivaci e meno svariate delle forme libere.

Nei Cirripedi, nei Copepodi, negli Ostracodi e in una parte dei Fillopodi spesso il corpo è trasparente e privo di colore: ora vi è qualche tinta rosea o verdiccia. Talvolta si hanno colori spiccati ed intensi come in qualche *Cipris* e in varie forme di Dafnidi. Il Weismann (2) osservò in questi ultimi fenomeni notevolissimi rispetto alla colorazione:

« 1. Eine kleine zahl von Daphnoiden besitzt bunte Färbungen, welche selten nur bei dem einen Geschlecht, meist bei beiden und zwar, theils in verschiedener theils in gleicher Stärke entwickelt sind.

« 2. Diese Pigmentirungen müssen als Schmuckfärbungen augesehen werden, welche von dem einen Geschlecht allein (wahrscheinlich meist dem männlichen) zuerst

(1) Panceri, *La luce e gli organi luminosi di alcuni Anellidi.* Rend. Accad. delle Scienze di Napoli, 1875.

(2) *Ueber die Schmuckfärben der Daphnoiden. Zeit. f. Wiss. zool.*, vol. XXX, suppl. 1878, p. 163, t. VII.

erworben in den meisten Fällen, aber sodann auch auf das andere Geschlecht übertragen worden. Es ist denkbar, dass diese Uebertragung dadurch wesentlich beschlennigt wurde, das « alternirende Zuchtwahl » eintrat; so zwar, das im Beginn jeder Sexualperiode die dann noch seltenen Männchen die schönsten Weibchen wählten, gegen das Ende der Sexualperiode aber die Weibchen die Auswahl unter den zahlreicheren Männchen hatten. »

Le specie pelagiche di questo gruppo presentano il sistema di colorazione che si trova in quasi tutti gli animali pelagici. Riferirò a questo proposito le osservazioni seguenti del Pavesi (1). « Un fenomeno assai curioso ho notato nei crostacei del lago di Garda; voglio dire che quelli tolti da 15 e più metri di profondità invece di essere al solito incolori e trasparentissimi, mi apparirono leggermente azzurrognoli. Non si dica che la mia retina mantenesse l'impressione del colore delle acque, perchè doveva vedere azzurrino ogni altro simile oggetto circostante mentre li vidi nello stesso tempo delle tinte normali, e seguii benissimo l'opacamento delle Leptodore quando le immersi nell' alcool. Io credo di scorgervi un fatto di mimicrismo, come i tanti già noti che affettano anche i vertebrati e mi ricordo di averlo pure osservato in certi acalefi marini ».

Nei Pecilopodi le colorazioni sono generalmente poco spiccate e poco variate.

Negli Artrostraci e nei Toracostraci il sistema di colorazione è variatissimo e spesso molto vivace ed elegante. È in questi crostacei che si trovano colorazioni e macchiettature che ricordano quelle di molte conchiglie di molluschi marini.

Le specie di piccola mole degli Artrostraci sono molto notevoli inquantochè ci presentano frequentissimi casi di colorazioni mimetiche. In queste specie il verde è relativamente abbondante. Non è raro eziandio il rosso. Si può dire che questo gruppo di crostacei è per molte forme il rappresentante degli Ortotteri fra gli insetti: e si noti che non solo esso rappresenta questi insetti nel sistema di colorazione, ma, fino ad un certo punto, anche nella forma, come si può vedere nelle specie del genere *Caprella, Protella* (*P. phasma*, ecc.).

Questo gruppo di crostacei comprende pure un certo numero di forme pelagiche. Queste forme hanno un sistema di colorazione analogo a quello di tutti gli animali inferiori pelagici: hanno cioè il corpo più o meno trasparente e tinto in azzurro chiaro o in roseo chiaro. Le specie del genere *Phronima* le stesse *Phyllosome* e molte altre larve pelagiche di crostacei Toracostraci presentano il sistema di colorazione sopra menzionato. Non di rado in quelle specie pelagiche si trovano delle macchiettature rosse assai spiccate, il che si verifica pure in altri animali pelagici appartenenti ad altri gruppi di animali.

Fra gli Artrostraci stessi troviamo poi dei gruppi di forme (*Oniscidi*, *Armadillidi*), nei quali il sistema di colorazione è in rapporto colla loro vita terrestre. In questi animali predominano le tinte nere, brune e grigie, intense, con macchiettature gialle e rosse più o meno abbondanti e spiccate. Nei Toracostraci le colorazioni sono quasi sempre ben spiccate, predominano in essi tuttavia il rosso e il giallo, ora sbiadito, ora invece

---

(1) *Ulteriori studi sulla fauna pelagica dei laghi italiani.* R. Istituto Lombardo, 1879.

molto intenso. Frequentemente si hanno delle macchiettature molto evidenti. Non sono rari il bruno, il grigio ed anche il nero schietto ; più raro invece ma meno di quanto si potrebbe immaginare a primo aspetto è l'azzurro ; poi viene il verde sbiadito.

Nei Crostacei di questo gruppo si trovano esempi abbastanza spiccati di colorazioni rudimentali residue o incipienti, colorazioni che troveremo poi in maggior quantità negli Insetti e negli altri animali superiori agli Insetti.

Non di rado le colorazioni vivaci sono ridotte a parti poco in vista. Qualche volta però, come per esempio in molti Paguri, sono invece quasi tutte concentrate in quelle parti che rimangono fuori della conchiglia protettrice. Queste parti hanno per lo più un colore nero intenso. È difficile trovare una spiegazione di questi fatti.

Non sarebbe al tutto impossibile che si trattasse in questo caso di un colore insidioso.

Un caso di colorazione notevole è quello che ci presenta il *Gelasimus chlorophtalmus* in cui la chela più sviluppata è di un rosso vivacissimo, mentre tutte le altre parti dell'animale sono invece di un verdastro più o meno macchiato di scuro.

Menzionerò pure la *Lupea pelagica* per la sua colorazione e per le sue macchiettature analoghe a quelle di varie conchiglie marine.

In generale si può dire che la colorazione di questi animali li protegge, uniformando più o meno il loro colore con quello del suolo o degli oggetti circostanti. Così si spiegano le macchiettature che danno un'idea della ghiaia e delle sabbie variopinte dei fondi marini ; così si spiegano le tinte azzurrognole e violacee, variamente screziate che ricordano l'aspetto di molte roccie ; così pure si spiegano ancora i colori verdastri o rossastri che ricordano i colori delle alghe marine.

Non di rado si trova pure il nero ; si noti che questa tinta è per lo più sviluppata sulle estremità, dove costituisce delle macchiettature ben evidenti.

MIRIAPODI ed ARACNIDI

La colorazione degli Aracnidi e dei Miriapodi è più ricca di toni oscuri e neri ed è in generale più intensa, quantunque in complesso meno vivace, di quella dei Crostacei.

Le specie che vivono fra le erbe ed i fiori sono più vivacemente colorite e più macchiettate di quelle che vivono fra i sassi e sul terreno.

Le specie più grosse hanno colorazione più uniforme e scura delle altre.

Le colorazioni mimetiche sono frequenti ed accompagnano spesso le modificazioni di forma.

Sono in complesso poco spiccate le differenze sessuali di colore.

INSETTI

Ortotteri. — Nei Forficulidi, nei Blattidi e nei Grillidi che vivono in buche o fra i *detritus* caduti sul suolo le colorazioni sono poco spiccate ed oscure. Nelle Mantidi, negli Acrididi e nei Locustidi che vivono fra i cespugli e le erbe le colorazioni sono chiare, vivaci o variate.

Più variata ed intensa è la colorazione dei Libellulidi.

Le colorazioni molto vivaci sono per lo più nelle parti dell'animale che sono meno in vista.

Il colore, la figura e la disposizione delle macchiettature sono per lo più in rapporto colle modificazioni di forma delle varie parti.

Le differenze sessuali di colore sono spesso spiccate. Ora il maschio è meno colorito della femmina, come nei Mantidi o nei Fasmidi, ora invece è la femmina che è meno intensamente colorita, salvo qualche caso come nell'*Aeschna mixta* in cui la femmina ha le ali di colori più intensi del maschio come nei Libellulidi.

Rincoti.

Nei Rincoti la varietà o la vivacità dei colori è maggiore in quei gruppi nei quali vi ha una grande varietà di forme.

Le specie parassite hanno colorazioni sbiadite, residui di colorazioni vivaci possedute dalla specie prima del suo adattamento alla vita parassita, od anche sono affatto scolorite.

Le specie acquaiuole hanno colorazione più cupa e meno intensa e più uniforme di quelle terragnole. In queste specie le colorazioni vivaci sono per lo più nelle parti più nascoste. Invece nelle forme terragnole e che fanno vita sui fiori o fra i cespugli, come ad esempio nei Pentatonidi, le colorazioni più vivaci sono nelle parti più nascoste e servono forse come colorazioni avvisatrici.

Le differenze sessuali di colore sono nei Rincoti generalmente poco spiccate.

Ditteri.

Nei Ditteri le colorazioni sono spiccate ed intense, ed il nero schietto è molto abbondante costituendo numerose macchiettature. Il giallo accompagna frequentemente il nero. Il verde è all'incontro assai scarso.

Le specie parassite hanno colorazioni meno intense e più uniformi e meno macchiettate delle altre.

Le larve sono per lo più scolorite, salvo quelle che vivono nell'acqua, le quali talvolta hanno colorazioni vivaci.

Le differenze sessuali di colore sono in generale piccole (salvo nei Bibionidi). Piccole pure in generale sono le differenze sessuali di colore.

Lepidotteri.

La colorazione dei Lepidotteri varia secondochè la si considera nei Lepidotteri notturni o nei Lepidotteri diurni.

Nei Lepidotteri notturni la colorazione è in complesso meno vivace che non nei diurni, tuttavia sia negli uni che negli altri vi sono forme a colorazione vivace ed altre a colorazione oscura e sbiadita.

Frequentissime sono nei Lepidotteri le colorazioni protettrici, imitatrici e molto spesso accompagnano le modificazioni di forma.

I Lepidotteri presentano esempi notevoli di colorazioni deviatrici e di colorazioni avvisatrici.

Ad un grande sviluppo di ali corrisponde frequentemente anche una grande intensità di colorazione.

La colorazione delle larve è eminentemente protettiva.

Le larve presentano talvolta casi spiccati di *policroismo*, come ad esempio le larve del *Bombix salicis,* ecc.

Non vi è, a quanto pare, alcun rapporto fra la colorazione delle larve e quella degli insetti perfetti.

I Lepidotteri corrispondono per la varietà, la vivacità, ed anche per l'accoppiamento dei colori agli uccelli.

Sono frequenti nei Lepidotteri i casi di *policroismo*, i quali accompagnano i casi di polimorfismo. Qualche volta i primi sono indipendenti dai secondi.

Rari sono i casi di riunione sopra uno stesso individuo delle colorazioni appartenenti ai due sessi. Questi individui vengono detti ermafroditi. L'ermafrodismo è da intendersi molto probabilmente (dico così poichè poco si sa di sicuro a questo riguardo), soltanto per questo riguarda i caratteri sessuali secondari della colorazione.

Coleotteri.

Le colorazioni dei Coleotteri sono per lo più intense : il nero è molto abbondante, il bianco è scarso e in molti gruppi è al tutto mancante.

Le specie che vivono sui fiori hanno colorazioni più variate e vivaci di quelle che vivono nel terreno o nel legno dei tronchi.

Le specie acquaiuole hanno colorazioni più uniformi e meno spiccate delle specie terragnole, complessivamente considerate.

Le specie dell'involucro chitinoso molto duro hanno in generale colorazioni vivaci ed appariscenti.

Le colorazioni mimetiche sono frequenti ed accompagnano spesso le modificazioni di forma.

Le macchiettature sono più abbondanti e varie nei coleotteri fitofagi che non nei coleotteri carnivori.

Le specie cieche e che fanno vita sotterranea hanno colorazioni sbiadite rossiccie, giallastre, brunastre, ecc., e mancano per lo più di macchiettature.

Spesso le specie notturne hanno colorazioni brillantissime.

Le differenze sessuali di colore sono spiccate ed accompagnano spesso le modificazioni di forme.

Imenotteri.

Gli Imenotteri hanno colorazioni intense con abbondanza di nero.

Fra i colori vivaci degli Imenotteri viene in prima linea per abbondanza il giallo, poi segue il rosso, poi il verde, poi l'azzurro e in ultimo il bianco.

Le specie sociali hanno colorazioni più scure e più uniformi.

Le colorazioni mimetiche negli Imenotteri, come nei Ditteri sono poco frequenti.

Le specie di piccola mole hanno in complesso colorazioni brillanti più di quelle di grande mole.

Le larve di quei Imenotteri le quali vivono sulle foglie *(Tenthedo, Nematus, Hylotoma)* hanno un sistema di colorazione analogo a quello di molte larve di Lepidotteri.

Non vi è rapporto alcuno fra la colorazione delle larve e quella dell' insetto perfetto.

Le differenze sessuali di colore sono spesso notevoli. La femmina è spesso più grossa del maschio ed è, fatto molto notevole ed in stretto rapporto coll'aumento di mole, più intensamente colorita del maschio.

MOLLUSCHI

Le colorazioni dei Molluschi, quantunque ciò a primo aspetto non sembri, sono in complesso poco variate. Il nero è scarso; abbondano invece il bruno, il grigiastro, il giallastro, il bianco ed il rosso; è relativamente abbondante il violetto, non è raro l'azzurro; è invece assai raro il verde.

La vivacità della colorazione di varie specie è prodotta dal contrasto delle macchiettature.

Spesso nei molluschi le colorazioni rimangono nascoste o dal *drappo* o da altri animali i quali vivono ricoprendo esternamente la conchiglia.

Le colorazioni delle specie a conchiglia robusta e resistente sono in generale ben evidenti e vivaci più che non quelle delle specie a conchiglia sottile e fragile.

Spesso le colorazioni vivaci sono nelle parti meno in vista.

Le specie terragnole hanno colorazioni più varie, più vivaci e più spiccate delle specie acquaiuole. I molluschi bivalvi sono in complesso meno variamente coloriti dei molluschi univalvi. Le specie marine sono più colorite di quelle d'acqua dolce.

Nei molluschi nudi marini le colorazioni mimetiche sono frequentissime. I molluschi marini imitano nelle loro colorazioni, ora i fondi sabbiosi o ghiaiosi del mare, ora il colore delle rocce, ora quello delle alghe, ora anche la conchiglia di altre specie di molluschi o la scaglia di certi crostacei.

Le differenze sessuali di colore si osservano talvolta nei Cefalopodi. Quando le femmine sono più sviluppate dei maschi esse sono anche più intensamente colorite.

Nelle forme pelagiche spesso il corpo è trasparente, il che costituisce un mezzo protettivo.

Non sono rari i casi di albinismo e di melanismo.

In varie specie di Cefalopodi i colori possono, entro certi limiti, essere cambiati *a volontà* degli animali.

VERTEBRATI

Pesci.

I vari gruppi di Pesci comprendono a un tempo specie a colorazione poco spiccata e specie con colorazione vivace.

La colorazione delle specie di grande mole è notevolmente meno spiccata e meno varia di quelle di piccola mole.

La colorazione dei pesci è spesso in stretto rapporto colla forma del corpo. Così ad esempio i pesci appiattiti e molto larghi, anche appartenenti a gruppi diversi, hanno un analogo sistema di colorazione.

Le specie che hanno organi locomotori molto sviluppati e fanno lunghi viaggi, hanno in generale colorazioni poco appariscenti.

Le specie che vivono fra le alghe hanno per lo più colorazioni vivaci.

Le pinne sono spesso vivamente colorite.

La regione superiore e posteriore del dorso è quella che è più frequentemente macchiettata.

La colorazione delle parti meno in vista, come ad esempio le parti interne delle pinne, è spesso notevolmente più vivace delle altre ed ha anche talvolta macchie speciali.

Le differenze sessuali di colore sono poco spiccate.

Un certo numero di pesci può cambiare *a volontà* il colore.

In vari casi la colorazione cambia colle stagioni.

ANFIBI

Le specie a colorazione vivace sono in minor numero di quelle a colorazione poco appariscente.

Vengono in prima linea per abbondanza il bruno ed il grigiastro, seguono il verde ed il giallastro, poi il nero, il rosso, l'azzurro ed il violetto e in ultimo il bianco schietto.

Gli Anfibi urodeli hanno in complesso colorazioni meno eleganti e meno variate degli Anfibi anuri.

Fra gli urodeli le specie che fanno vita in gran parte terragnola hanno colorazioni più spiccate di quelle che fanno vita quasi esclusivamente acquatica.

Fra gli Anfibi anuri le specie che vivono fra le erbe e sugli alberi hanno colorazione più chiara e più vivace di quelle che vivono sul terreno o fra le roccie.

Le colorazioni vivaci sono spesso limitate alle parti inferiori e meno in vista dell'animale.

Le differenze sessuali di colore sono in complesso poco spiccate.

Gli Anfibi cambiano facilmente di colore secondo le località nelle quali vivono. Le specie che vivono sui monti hanno in generale colorazioni più cupe di quelle che vivono al piano.

I colori variano in una stessa specie spesso colle stagioni e soprattutto col genere di vita acquaiuola o terrestre.

L'animale può *volontariamente* cambiare entro a certi limiti la colorazione.

Non sono rarissimi i casi di albinismo e i casi di melanismo.

RETTILI

Nei Rettili come negli Anfibi le specie che hanno colorazioni appariscenti sono in minor numero di quelle a colorazione poco spiccata.

Nei Rettili troviamo per abbondanza in primo luogo il nero, il bruno e il grigio, poi il giallo, il verde, il rosso, poi l'azzurro ed il violetto e per ultimo il bianco.

Gli Ofidi ed i Sauri sono più ricchi di forme vivacemente colorite dei Chelonii.

Le colorazioni vivaci sono spesso limitate alle parti inferiori e a quelle parti che, come si osserva in vari sauri, pigliano uno speciale sviluppo.

Le macchiettature sono frequentissime ed hanno per lo più ufficio mimetico. Esse sono più spiccate e numerose nelle specie che vivono fra le erbe, fra i cespugli; meno in quelle che vivono nei luoghi scoperti rocciosi e sabbiosi. Queste ultime hanno del resto colorazioni in complesso meno vivaci e variate.

La parte che è più vivacemente colorita anche nelle specie a colorazione generale oscura è spessissimo la parte inferiore della coda e ciò soprattutto negli Ofidi. Queste colorazioni si sono conservate perchè trattandosi di una parte poco importante per l'animale non ha avuto su di esse molta azione naturale.

Nei Rettili, si osserva frequentemente che le colorazioni mimetiche hanno principio nella parte anteriore del tronco e del capo e procedono poi verso la coda o le parti laterali. Ciò si può vedere bene in molti Sauri, soprattutto nei Lacertidi.

Le parti che possono essere protette da altre dure e resistenti come ad esempio il capo e le zampe di molti Chelonii che l' animale ritrae entro la scaglia, hanno spesso colorazioni vivaci e variate.

Le differenze sessuali in colore sono in complesso piccole ; accompagnano per lo più le differenze sessuali secondarie di forma e in ogni caso il maschio è più vivacemente colorito della femmina.

Sono frequenti i casi di mimetismo nella colorazione fra specie prive di veleno e specie velenose, le prime imitano nella colorazione le seconde. Ciò si può verificare anche come è noto nelle specie nostrali di Ofidi.

Nei Rettili i casi di albinismo sono rari, e sono invece frequenti i casi di melanismo.

UCCELLI

Negli Uccelli i colori hanno, per la loro frequenza, la distribuzione seguente: 1° Nero; 2° Bruno; 3° Grigio e Bianco; 4° Giallo-Rosso, Verde; 5° Azzurro; 6° Violetto.

Il nero è abbondantissimo. Quanto più abbonda il verde in un dato gruppo di Uccelli, tanto più scarseggia il bianco. I Trogonidi ed i Pittidi fanno eccezione a questa regola.

Il giallo e il rosso accompagnano quasi sempre il verde e crescono e diminuiscono con esso.

Fra specie di gruppi diversi ma aventi fra loro costumi analoghi corre pure una analogia più o meno grande nel sistema di colorazione.

Le specie che fanno vita acquatica hanno generalmente colorazioni meno spiccate e meno variate di quelle che fanno vita terragnola.

Le specie di Uccelli che vivono nel terreno e che non sono forti volatori hanno in generale colori meno variati e meno spiccati di quelli che fanno vita esclusivamente arborea.

Le colorazioni più vivaci e più variate si trovano generalmente nelle specie che vivono nelle foreste.

Le specie migratrici e le specie pelagiche hanno colorazioni poco variate e poco appariscenti.

La colorazione dei giovani è spesso notevolmente diversa da quella degli adulti; essi sono per lo più meno chiari e più macchiettati.

Le colorazioni più variate e più spiccate si trovano principalmente in quei gruppi di Uccelli nei quali, certe porzioni del piumaggio pigliano uno sviluppo speciale più o meno grande.

Le macchiettature sono frequentissime e in molti casi servono a rendere meno facilmente discernibile l'animale e quindi hanno azione protettiva.

Considerando complessivamente tutti gli Uccelli si osserva che le colorazioni chiare e spiccate si trovano principalmente nelle parti inferiori come ad esempio nella parte inferiore della coda, o nella parte inferiore delle ali. Vi sono ad esempio specie interamente brune o nere, le quali hanno nelle parti ora menzionate, parti poco in vista, colorazioni rosse spiccatissime.

Le specie che fanno vita diurna hanno colorazioni più vivaci e variate di quelle che fanno vita notturna.

Non sono rari i casi di specie che cambiano colore secondo le stagioni.

Non sono rari i casi di albinismo. Un po' più rari invece sono i casi di melanismo.

Le differenze sessuali di colore sono molto spiccate e i maschi sono in generale più elegantemente e più vivacemente coloriti delle femmine.

Le maggiori differenze sessuali di colore si trovano soprattutto in quei gruppi nei quali vi sono anche grandi differenze sessuali di forma.

Le differenze sessuali di colore sono in complesso più spiccate fra uccelli arborei che non negli altri. Fra questi ultimi essi sono più notevoli in quei gruppi che vivono entro foreste anzichè in quelli che vivono nel terreno in luoghi scoperti.

In quasi tutti i gruppi si osserva che le differenze sessuali di colore sono inegualmente distribuite nelle specie, e che vi sono specie vicine fra loro le quali le une hanno grandi differenze sessuali di colore e altre che o non ne presentano affatto o le hanno poco spiccate.

Rispetto alla colorazione delle uova io credo che in molti casi essa sia un portato della scelta naturale. Le uova degli Uccelli come è noto ora sono di un sol colore, ora sono più o meno macchiettate.

Si può dire in generale che le macchiettature delle uova hanno scopo mimetico o coi corpi circostanti o colle sostanze costituenti il nido.

I colori dei nidi dipendono dalle sostanze che li compongono e variano spesso nella stessa specie secondo le località.

In generale si può dire che l'animale cerca per la costruzione dei nidi materiali che non rendano il nido molto appariscente.

Interessantissimi sono a questo riguardo i fatti osservati dal Beccari (1) intorno ai nidi delle Clamidodere.

MAMMIFERI

Nei Mammiferi predominano i colori carichi e specialmente le tinte bruno-nere.

Per frequenza viene 1° il Bruno, 2° il Nero, 3° il Grigio, 4° il Bianco e il Giallo, 5° il Rosso.

L'Azzurro, il Verde, il Violetto, ecc., sono appena accennati e sono quasi esclusivamente limitati a parti prive di peli.

Vi è anche nei Mammiferi una notevole rassomiglianza nella colorazione fra le forme che hanno analoghi costumi anche quando appartengono a gruppi notevolmente diversi. Ad esempio l'Ornitorinco, le Lontre, i Castori, le Talpe, gli Spolaci, le Arvicole, i *Cladobates*, gli Sciuridi, i *Petauros*.

Le forme acquaiuole hanno generalmente una colorazione meno varia e meno spiccata delle forme terragnole.

Le specie delle foreste hanno colorazione più ricca e variata di quelle che vivono in luoghi scoperti.

Nei primi le macchiettature sono più abbondanti e più variate che non nei secondi, e spesso esse imitano le ombre prodotte dalle foglie.

I giovani sono spesso diversi nella colorazione degli adulti, e frequentemente sono più macchiettati.

Le differenze sessuali di colore sono generalmente piccole.

Non sono rari i casi di cambiamento del colore dei peli secondo le stagioni.

Non sono rari i casi di albinismo. Sono un po' più rari invece i casi di melanismo.

---

(1) *Le capanne dell'Amblyornis inornata.* Ann. del Mus. Civico di Genova, 1876-77, p. 388-389. In questo suo lavoro il Beccari espone varie sue teorie intorno alla origine probabile delle colorazioni e delle macchiettature delle Paradisee, e di altre specie di uccelli a colorazioni splendide. Queste teorie, sebbene, come dice l'Autore stesso, siano seducenti, tuttavia non mi paiono guari sostenibili.

Osservazioni generali intorno alla distribuzione dei colori nei Vertebrati.

Nei vertebrati i colori si possono distribuire secondo la loro frequenza nell'ordine seguente:

1. { Nero, Bruno, Grigio }
2. Bianco
3. Giallo
4. Rosso
5. Verde
6. Azzurro
7. Violetto.

Le varie classi si possono distribuire secondo la quantità di ciascun colore che esse presentano nell'ordine seguente cominciando da quelle che ne hanno di più.

Nero 1. Uccelli
» 2. Rettili
» 3. Mammiferi
» 4. Anfibi
» 5. Pesci.

Grigio 1. { Mammiferi, Uccelli }
» 2. { Rettili, Pesci }
» 3. Anfibi.

Rosso 1. Uccelli
» 2. Rettili
» 3. Pesci
» 4. Anfibi
» 5. Mammiferi.

Azzurro 1. Uccelli
» 2. Pesci
» 3. { Anfibi, Rettili }
» 4. Mammiferi.

Bruno 1. Mammiferi
» 2. Uccelli
» 3. Rettili
Bruno 4. Anfibi
» 5. Pesci.

Giallo 1. Uccelli
» 2. Rettili
» 3. Pesci
» 4. { Anfibi, Mammiferi }

Verde 1. Uccelli
» 2. { Rettili, Anfibi }
» 3. Pesci
» 4. Mammiferi

Violetto 1. Uccelli
» 2. { Pesci, Anfibi, Rettili }
» 3. Mammiferi.

Bianco 1. Uccelli
» 2. Mammiferi
» 3. Pesci
» 4. Anfibi
» 5. Rettili.

CONCLUSIONI

Lo studio della distribuzione dei colori nel regno animale, mi conduce alle conclusioni principali seguenti:

1. I colori che si trovano nel regno animale sono essenzialmente i seguenti, che io dispongo per ordine di frequenza:

1° Bruno; 2° Nero; 3° Giallo, Grigio, Bianco; 4° Rosso; 5° Verde; 6° Azzurro; 7° Violetto.

Il *nero* è più abbondante e sviluppato nei Vertebrati e negli Antropodi. Il *bruno* quantunque più sparso del nero segue tuttavia l'andamento di quello.

Il *rosso* è invece più frequente negli animali inferiori. La stessa cosa si può dire a un dipresso pel giallo.

Il *verde* è frequentissimo negli animali inferiori, lo è meno nei Molluschi; ma torna ad essere abbondante nei Vertebrati.

L'*azzurro* ed il *violetto* sono relativamente più scarsi: il violetto soprattutto: essi si trovano tuttavia in quasi tutti i gruppi di animali.

Il *grigio* è nel suo sviluppo come il nero ed il bruno.

Il *bianco* è sparso poco regolarmente; esso abbonda tuttavia soprattutto nelle forme acquaiuole.

2. Le colorazioni degli animali sono nel loro complesso essenzialmente in stretto rapporto col mezzo nel quale vivono.
3. Gli animali parassiti hanno colorazioni meno spiccate e meno variate di quelli non parassiti.
4. Gli animali acquaiuoli hanno generalmente colorazioni più uniformi e meno intense dei terragnoli.
5. Gli animali pelagici hanno colorazioni poco spiccate e deboli, le quali sono in rapporto colla trasparenza del corpo.
6. I grandi volatori fra gli Uccelli hanno pure generalmente colorazioni uniformi e poco appariscenti.
7. Gli animali marini che vivono fra le alghe in luoghi ricchi di vegetazione sottomarina hanno un sistema di colorazione più variato e più vivace di quelli che vivono fra le roccie e nel fondo sabbioso.
8. Gli animali terragnoli che vivono nelle foreste fra le piante, sui cespugli sui fiori, ecc., hanno colorazioni più svariate di quelli che vivono in luoghi deserti, brulli o rocciosi.
9. Non vi è rapporto generale e costante fra la colorazione ed il genere di nutrimento. Non credo perciò sostenibile la teoria già menzionata dell'Allen intorno

alla produzione dei colori. Animali insettivori che vivono fra le erbe e fra i fiori hanno colorazioni brillanti e variate, mentre animali fitofagi e carpofagi che non vivono consuetamente fra le erbe e i fiori hanno invece colorazioni oscure ed uniformi, e ciò perchè come già si è detto sopra, la colorazione dipende essenzialmente dal mezzo nel quale l'animale vive.

10. Quanto più un gruppo di animali è ricco di specie e di forme, tanto più varia è la sua colorazione e in molti casi si può dire anche tanto più vivace.

11. Lo sviluppo dei colori non è in ragione diretta della quantità di luce che l'animale può ricevere.

12. Lo sviluppo dei colori e in stretto rapporto collo sviluppo generale dell'animale; la denutrizione, lo stato patologico producono un indebolimento nella colorazione.

13. Il clima ha grande azione nella produzione dei colori degli animali; ma questa azione non è che mediata e non immediata come si suole dire.

14. Il grado di umidità dell' aria agisce, a quanto pare, nella colorazione degli animali. I climi molto secchi iscuriscono le tinte, mentre quelli molto umidi tendono a rischiarirle.

15. I colori variano col variare dell'altezza dei luoghi sul livello del mare. Più si sale e più le tinte diventano intense.

16. Le specie animali aventi una larga distribuzione geografica hanno in generale colorazioni uniformi e poco svariate. La stessa cosa si può dire per le specie di animali migratori, i quali sono per lo più meno elegantemente e meno vistosamente colorite delle specie stazionarie.

17. Le specie limitate alle isole sono spesso di colorazione più oscura di quelle continentali. Gli esempi di questo fatto sono numerosi. Il Darwin menziona gli animali delle isole Galapagos. Il Günther, l'Eimer, il Bedriaga, il Giglioli, l'Ernest ed altri osservarono numerosi fatti di tal genere in varie sorta di rettili (*Podarcis muralis*, *Cnemidophorus vulgaris*) ecc. abitatori di piccole isole. Anche gli insetti presentano fenomeni analoghi, ricorderò la varietà azzurra e talvolta quasi nera della *Cicindela campestris* che si trova nell' isoletta di S. Pietro vicino alla Sardegna.

18. Le varie regioni zoologiche hanno a quanto pare alcuni colori più o meno abbondanti. Nella regione poleartica abbondano il bianco, il grigiastro, il nero ed il gialliccio, nella regione etiopica sono molto sviluppati il gialliccio, il bruno; nella regione neotropicale vi è grande sviluppo di verde e di rosso: nella regione indiana troviamo invece grande abbondanza di gialli: nella regione australiana predominano le tinte scure ed il nero. Queste cose riguardano essenzialmente i mammiferi, gli uccelli e gli insetti: poichè i rettili, i pesci e gli altri animali sono troppo poco noti ancora dal punto di vista della colorazione.

19. Nelle varie regioni zoologiche si osservano qua e là casi di variazioni di colori limitati ad animali di località ristrette; di queste variazioni non si è trovato ancora una soddisfacente spiegazione.

20. Generalmente nei vari gruppi di animali le forme più grosse hanno colorazioni più uniformi e meno eleganti e vivaci delle altre di mole minore dello stesso gruppo.

21. Vi sono rapporti spiccati e stretti fra animali appartenenti a gruppi anche molto diversi fra loro, ma viventi nelle stesse condizioni.

22. I colori sessuali sono in stretto rapporto collo sviluppo generale dell'animale: generalmente i maschi hanno colorazioni più svariate e più spiccate delle femmine, il che è in rapporto colla loro energia vitale. Ciò è in rapporto pure colle moderne teorie della produzione dei sessi, secondo le quali il sesso dipenderebbe dal numero dei nemaspermi penetrati nell'uovo (1).

23. La colorazione dei giovani è spesso diversa da quella degli adulti ed è meno spiccata, rassomigliando per lo più a quella delle femmine, nelle quali perciò si ha un fenomeno di *neotenia* o meglio di *ebososia* (2).

I giovani di specie molto diverse nel colore dello stato adulto sono spesso molto simili fra loro.

---

(1) Si consulti G. Canestrini, *Bull. Soc. Veneto-Trentina* 1879, p. 18. — *Gazz. med. Ital.*, prov. Veneta. An. 22, N. 16.

(2) Vedi L. Camerano, *Intorno alla Neotenia ed allo sviluppo degli Anfibi.* Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XIX, 1883.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Le figure di questa Tavola mostrano alcuni fra i più spiccati casi di colorazioni rudimentali.

Fig. 1. *Cyphocrania herculeana.*
» 2, 3. *Mantis palliata* ♀, ala superiore, 2 parte esterna dell'ala, 3 parte interna ed inferiore.
» 4, 5. *Mantis palliata* ♂ 4, parte superiore, 5 parte inferiore delle ali.
» 6. *Nemoria lunigera* ♂.
» 7. *Paragonia deustata* ♀.
» 8. *Strophidia phantasma* ♂.
» 9. *Graphigona roseifer* ♂, ala inferiore.
» 10. *Sematura Actaeon*, ala inferiore.
» 11. *Papilio Archesilaus*, ala inferiore.
» 12. *Papilio Araspes* ♂, ala inferiore.
» 13. *Scolia deipar* ♂.
» 14. *Id. rutilla* ♂.
» 15. *Id. id.* ♀.
» 16. *Id. pubescens* ♀.
» 17. *Anthrax hippolita.*
» 18. *Id. noctilio.*
» 19. *Id. maurata.*
» 20. *Id. monacha.*
» 21. *Id. stictica.*
» 22. *Apiletria haematella* ♀.

Fig. 23. *Cryptoledia foecosa* ♀.
» 24. *Ochsenhaeimeria squamicornis* ♀.
» 25. *Anatolnius viridiceps* ♂.
» 26. *Erateina paeonata* ♀. Nella parte inferiore dell' ala la macchia rossa è più grande.
» 27. *Opsomola fasciculata*, parte interna (il rimanente del corpo è giallo-rosso uniforme).
» 28. *Mantis oratoria.*
» 29. *Acridium plorans.*
» 30. *Mantis zebrata.*
» 31. *Tropinotus discoideus.*
» 32. *Urapteryx praetoraria* ♂, ala inferiore.
» 33. *Trigla corax*, pinna anteriore vista dalla parte esterna.
» 34. *Trigla corax*, pinna anteriore vista dalla parte interna.
» 35. *Anolis Sallaei.*
» 36. *Oreopsittacus arfaki*, parte inferiore dell'ala.
» 37. Tavola riassuntiva della distribuzione dei colori negli animali.
» 38. *Fratercula glacialis.*

Tavola II.

Questa Tavola mostra l'andamento dei varii colori nei diversi gruppi animali. I dati numerici sono calcolati in rapporto a venti specie di ciascun gruppo di animali. Questa Tavola ci dà quindi il tanto pei venti dei varii colori in ciascun gruppo di animali.

Cominciando a sinistra l'ordine dei gruppi animali è il seguente:

1. Protozoi.

nterati
2. Spugne.
3. Alcionari, Madreporari.
4. Attiniari.
5. Idromeduse, Ctenoferi.

Echinodermi
6. Stelleridi.
7. Echinidi.
8. Olonturidi.

Vermi....
9. Platelminti, Nematelminti.
10. Turbellari, Briozoi, Rotiferi, Gefiriei.
11. Irudirei.
12. Chetopodi.

13. Crostacei.
14. Aracnidi.
15. Miriapodi.

Ortotteri..
16. Tisanuri, Forficulidi, Blattidi.
17. Mantidi, Fasmidi.
18. Acrididi, Locustidi.
19. Grillidi.
20. Libellulidi.

21. Neurotteri.

Rincoti...
22. Cicadari.
23. Idrocorisi.
24. Reduvidi, Pentatomidi.

Ditteri ...
25. Pupipari, Afanitteri.
26. Brachiceri, Nemoceri.

Lepidotteri
27. Microlepidotteri, Geometridi, Nottuidi.
28. Bombicidi, Sfingidi.
29. Ropaloceri.

Coleotteri.
30. Coccinellidi.
31. Crisomelidi.
32. Cerambicidi.
33. Curculionidi.
34. Eteromeri.
35. Silofagidi.
36. Malacodermidi.
37. Elateridi, Buprestidi.
38. Lamellicorni.
39. Isteridi, Silfidi.
40. Stafilinidi.
41. Schofilidi, Diliscidi.
42. Carabidi.
43. Cicidelidi.

44. Imenotteri.

Molluschi Lamellibranchiati
45. Ostreadi.
46. Pectinidi.
47. Aviculidi, Mitilidi.
48. Arcadi, Nuculidi, Trigonidi.

Segue *Molluschi Lamellibranchiati*
- **49**. Unionidi.
- **50**. Camidi, Cardiadi, Mactridi.
- **51**. Tellinidi, Miacidi.
- **52**. Gastrochenidi, Foladidi, Scafopodi.

Molluschi Gasteropodi.
- **53**. Pteropodi, Eteropodi.
- **54**. Opistobranchi.
- **55**. Patellidi, Chitonidi.
- **56**. Fissurellidi, Aliotidi, Trochidi.
- **57**. Neritidi.
- **58**. Jantinidi, Solaridi.
- **59**. Volutidi, Olividi, Musicidi.
- **60**. Conidi, Terebridi, Pleurotomidi.
- **61**. Cipreidi, Tritonidi, Strombidi.
- **62**. Ceritidi, Melanidi, Turritellidi.
- **63**. Littorinidi, Paludinidi, Ciclostomidi.
- **64**. Limneidi.
- **65**. Limacidi.
- **66**. Succinidi, Pupidi, Vitrinidi.
- **67**. Achatinidi, Bulimidi, Elicidi.

- **68**. Cefalopodi.
- **69**. Brachiopodi.
- **70**. Tunicati.

Pesci . . . .
- **71**. Leptocardi, Ciclostomi, Selaci, Ganoidi.
- **72**. Lofobranchi, Plectognati, Fisostomi apodi.
- **73**. Fisostomi addominali, Anacantini.
- **74**. Acantotteri, Dipnoi.

Anfibi . . . .
- **75**. Perennibranchiati, Salamandridi.
- **76**. Ranidi.
- **77**. Bufonidi.
- **78**. Discodattili.

Rettili . . . .
- **79**. Ofidi.
- **80**. Sauri.
- **81**. Idrosauri.
- **82**. Chelonii.

Uccelli Palmipedi
- **83**. Impenni.
- **84**. Alcidi.
- **85**. Colimbidi.
- **86**. Lamellirostri.
- **87**. Steganopodi, Laridi, Procellaridi.

Gralle . . . .
- **88**. Caradridi, Scolopacidi.
- **89**. Erodidi.
- **90**. Rallidi.
- **91**. Galinullidi, Alectoridi.

Gallinacei
- **92**. Cripturidi, Penelopidi, Megapodidi.
- **93**. Fagianidi.
- **94**. Tetraonidi, Pteroclidi.

- **95**. Colombe.

Rampicanti
- **96**. Ramfastidi.
- **97**. Trogonidi.
- **98**. Bucconidi.
- **99**. Cuculidi, Musofagidi.
- **100**. Picidi.
- **101**. Prittacidi.

Passeracei
- **102**. Buceridi.
- **103**. Alcionidi.
- **104**. Trochilidi.
- **105**. Melifagidi.
- **106**. Irudinidi, Cipselidi, Caprimulgidi.

Segue *Passeracei*
- **107**. Corvidi.
- **108**. Paradiseidi.
- **109**. Muscicapidi.
- **110**. Paridi, Motacillidi, Silviadi, Turdidi.
- **111**. Alaudidi, Fringillidi.
- **112**. Tanagridi.
- **113**. Pittidi.

Rapaci . . .
- **114**. Strigidi.
- **115**. Vulturidi, Accipitridi, Gipogeranidi.

116. Corridori.

117. Monotremi.

Marsupiali
- **118**. Rosicanti, Macropodi.
- **119**. Rampicanti.
- **120**. Rapaci.

121. Sdentati.

122. Cetacei.

123. Perissodattili.

Artiodalliti
- **124**. Tilopodi, Camelopardalidi.
- **125**. Pachidermi.
- **126**. Moscidi, Cervidi.
- **127**. Cavicorni.

128. Proboscidati.

Roscicanti
- **129** Leporidi, Subungulati. Istricidi, Lagostomidi.
- **130**. Musidi, Castoridi.
- **131**. Mioscidi, Sciuridi.

132. Insettivori.

133. Pinnipedi.

Carnivori .
- **134**. Ursidi.
- **135**. Mustelidi.
- **136**. Lontrini.
- **137**. Viverridi.
- **138**. Canidi.
- **139**. Jenidi.
- **140**. Felidi.

Chirotteri .
- **141**. Frugivori.
- **142**. Insettivori.

143. Proscimie.

Primati . .
- **144**. Arctopiteci.
- **145**. Cebidi.
- **146**. Micetidi.
- **147**. Cenocefalidi.
- **148**. Cercopitecidi.
- **149**. Semnopitecidi.
- **150**. Ilobatidi, Antropomorfidi.

Torino, Lit. F.lli Doyen

Torino Lit. F.lli Doyen

CONTRIBUZIONI

ALLA

ORNITOLITOLOGIA ITALIANA

DEL

Dott. ALESSANDRO PORTIS

Approvata nell'adunanza del 25 Maggio 1884

Mentre negli altri Stati d'Europa si poterono fin qui raccogliere nei varii piani dei terreni terziarii e quaternarii traccie ed avanzi abbastanza numerosi di Uccelli e se ne poterono costituire faune che, avuto riguardo agli ostacoli che si oppongono alla conservazione di resti di tali animali, sono riescite abbastanza ricche ed interessanti, scarsissime furono finora in Italia le notizie avute su Uccelli fossili (astrazione fatta dalle faune delle caverne) e sulle loro traccie.

È noto come al principio del presente secolo il Faujas (1) abbia accennato ad impronte di penne di uccelli osservate al Monte Bolca (accenno che venne da tutti fino al Milne Edwards ripetuto successivamente), e come, per la prima volta, nel 1866 abbia il Gastaldi parlato di proposito di uno scheletro di uccello, trovato nelle ligniti di Monte Bamboli in Toscana (2). L'ornitolite fatto conoscere dal Gastaldi, e che venne studiato dal Salvadori, è conservato nel Museo geologico di Torino e rimase finora l'unico Ornitolite di qualche valore trovato in Italia.

Non parlo della impronta di piè d'uccello da me descritta nel 1879 col nome di *Ornitichnites Argenterae* (3), il cui originale trovasi ora nello Istituto Geologico di Bologna, poichè da quella poco frutto si può ricavare per lo studio dell'animale che verosimilmente la cagionò; ma volendone pur tener conto, noi non avremmo finora che tre località in Italia nelle quali, affatto isolatamente, si sia rivelata in terreni terziarii la Classe degli uccelli.

(1) In *Ann. du Mus. d'Hist. Nat.* tom. III, pag. 21, Pl. I. Paris, 1803.

(2) *Intorno ad alcuni fossili del Piemonte e della Toscana.* Mem. d. R. Acc. d. Sc. di Torino, ser. II, tom. XXIV. Torino, 1866.

(3) *Intorno ad alcune impronte eoceniche di Vertebrati, recentemente scoperte in Piemonte.* Atti d. R. Acc. d. Sc. d. Torino, vol. XV, 8°, Torino, 1879.

A queste (ed è lo scopo del presente lavoro), debbo aggiungerne ora di nuove, poichè l'altrui gentilezza e la fortuna mi hanno procurato modo di aver in mano e di descrivere nuovi Ornitoliti provenienti da giacimenti italici di varie età.

I.

L'ornitolite di Monte Zuello.

Palaeogrus princeps Portis.

Tav. I, fig. 1, 2, 3, 4.

La località che abbia fornito in Italia ossa di uccelli, appartenenti ad un'epoca la più lontana da noi, è senza dubbio il Monte Zuello, dove il Barone A. De Zigno, trovava una diecina d'anni sono un frammento di tibia ornitico in compagnia di numerose altre specie di fossili, fra le quali il *Crocodylus Arduini*, l' *Halytherium veronense*, il *Palaeophis Owenii*, *Trionyx* sp., *Pristis Bassanii* e *Coelorhynchus rectus* (1).

Il signor Barone De Zigno mi volle gentilmente comunicare il prezioso fossile ornitico di questa località ed al quale aveva dato provvisoriamente il nome di *Ornitocnemis robustus* e mi autorizzò pure a riprodurre in questo lavoro le figure in grandezza naturale che ne aveva eseguite.

Il frammento ci mostra la porzione inferiore della tibia sinistra con tutta l'articolazione e piccola parte del corpo dell'osso.

Le misure che se ne possono trarre sono le seguenti:

Lunghezza totale del frammento.	millim.	50
Larghezza della porzione articolare inferiore .	»	21
Spessore massimo della medesima	»	20
Larghezza del corpo dell'osso.	»	12
Spessore del medesimo	»	10,5 .

Noi vediamo un corpo dell'osso relativamente robusto ed appiattito in basso, il quale si allarga considerevolmente in corrispondenza della sua estremità articolare inferiore e mostra due condili ben sviluppati dallo avanti allo indietro, compressi da fianco a fianco e separati da una gola larga, profonda nella sua porzione anteriore e molto meno accentuata nella inferiore e nella breve porzione posteriore. Il condilo esterno è sensibilmente più grande dello interno. Sulle faccie laterali dei condili poi sono molto accusati i rilievi legamentosi rispettivamente interno ed esterno, il primo anzi più sentito del secondo.

---

(1) De Zigno, *Sirenii fossili trovati nel Veneto*, Mem. d. R. Ist. Ven. di Sc. Lett. ed Arti, Vol. XVIII, 1875, Venezia.

De Zigno, *Sopra un cranio di Coccodrillo scoperto nel terreno eoceno del Veronese*. Mem. d. R. Acc. d. Lincei, ser. III, vol. V, Roma, 1880.

Nicolis E., *Note illustrative alla Carta Geologica della Provincia di Verona* (pag. 111), 8°. Verona, 1881.

Sulla faccia anteriore dell'osso, al disopra della estremità articolare noi notiamo il bordo interno segnato da una linea sporgente a mo' di spigolo che la separa dalla faccia interna, mentre in corrispondenza del bordo esterno osserviamo la grondaia del muscolo Corto Peroniero limitata da due creste parallele esse pure assai sporgenti.

In corrispondenza della estremità inferiore del bordo interno e della cresta interna della grondaia pel Corto Peroniero sono poi sviluppatissime le rugosità interna ed esterna di attacco pel Legamento Obliquo, mancante è invece il tubercoletto col quale termina in basso la rugosità esterna.

Nel mezzo, in basso di questa stessa faccia anteriore è in parte visibile la lamina trasversale ossea che costituisce il ponte sopratendineo, mentre il restante è mascherato dalla roccia ancora aderente.

Volendo ora cercare di stabilire press'a poco con quale tipo di uccelli della nostra fauna abbia avuto relazioni quello cui appartenne il presente avanzo, troviamo che quasi tutti i caratteri che il medesimo ci presenta si ritrovano nella tibia dei Gruidi; così l'allargamento della estremità inferiore, la sporgenza e reciproca diseguaglianza dei condili e l'ampiezza e brevità della gola intercondiloidea sono caratteri costanti in tutte le specie di Grù (in senso Linneano) come lo sono la sporgenza dello spigolo che limita allo interno la faccia anteriore del corpo dell'osso, la sporgenza delle due creste delimitanti la grondaia del Corto Peroniero nonchè la robustezza dell'osso stesso.

Un'unica differenza trovo nello allargamento della estremità inferiore dell'osso che, quantunque molto sentito, non lo è però proporzionatamente tanto quanto nella Grù cinerea. Ma gli è qui il caso di osservare che anche questo carattere subisce qualche oscillazione se lo si osserva comparativamente nelle diverse specie del genere.

In fatti i dettagli di quest'osso condurrebbero a paragonarlo colla Grù antigone od anche colle diverse specie del genere *Psophia* anzichè colla ordinaria Grù cinerea dei nostri paesi.

Per conseguenza sarei di parere di considerare l'Ornitolite di Monte Zuello siccome avente appartenuto, per quanto ci è dato di scorgere, ad una Gralla della famiglia dei Gruidi e particolarmente affine al principale genere *Grus*.

La statura sua non doveva essere inferiore a quella della comune Cicogna (*Ciconia Alba*).

Non osando per ora collocare direttamente l'Ornitolite di Monte Zuello nel genere *Grus*, dal quale avrebbe potuto distinguersi per altre parti che noi ancora non conosciamo, propongo per quello il nome generico di *Palaeogrus*, chiamandolo *Palaeogrus princeps*.

Assieme all'osso precedente venne trovata una seconda estremità inferiore pure di tibia sinistra spettante ad un secondo individuo della stessa specie. Questo frammento lungo 64 milim. è stato schiacciato da lato a lato mentre si trovava ancora compreso nel terreno, quindi i condili si sono deformati ed addossati l'uno all'altro riempiendo la gola frapposta, Tuttavia si ravvisano ancora in questo esemplare, sulla faccia anteriore, e la Cresta Interna, e la traccia di grondaia pel muscolo Corto Peroniero, e la rugosità esterna pel Legamento Obliquo. Il corpo dell'osso presenta le stesse dimensioni relative e la stessa robustezza che il precedente, soltanto è desso un po'

deformato da pressioni laterali. Il complesso insomma dei caratteri visibili e rimasti inalterati in questo pezzo e sufficiente a farci ammettere con certezza che esso appartenga ad un secondo individuo di *Palaeogrus princeps* (1).

L'associazione poi di vertebrati di diverso regime colla quale la *Palaeogrus princeps* venne rinvenuta, ci fa molto di leggieri ammettere che tanto essa, quanto la maggior parte degli animali che l'accompagnavano abbiano trovata lor morte in condizioni diverse da quelle in cui vennero trovate e che solo più tardi gli scheletri o loro parti sieno stati trasportati in un giacimento marino.

II.

L' ornitolite miocenico di Ceva.

Chenornis graculoides Portis.

Tav. I, fig. 5.

Una dozzina d'anni or sono, mentre lavorandosi alla ferrovia Torino-Savona si attendeva al perforamento del Tunnel che in faccia alla città di Ceva attraversa il piccolo promontorio su cui s'ergono i ruderi dell' antico forte, vennero alla luce in una volta tre pezzi importanti per la Paleontologia del nostro paese, i quali per fortuna trovarono subito un intelligente cultore delle Scienze Naturali che ne conobbe il pregio, se li procurò e li conservò alla scienza. Voglio dire del signor Vittorio Figone, Professore di Storia Naturale alla Scuola tecnica di Ceva e farmacista colà. Fu egli che raccolse questi tre pezzi dei quali non venni che successivamente ad aver conoscenza. Il primo, un Chelonio, fu da me descritto fin dal 1879 nel primo lavoro da me pubblicato in Italia (2). Esso porta ora il nome di Tryonix pedemontana, della quale specie è l'esemplare da me figurato e, ceduto prima d'allora al Comm. Michelotti, trovasi presentemente nel Museo geologico di Roma, al quale venne dallo stesso Michelotti donato, unitamente a tutta la sua preziosa raccolta di fossili terziarii.

Il secondo non è che un modello interno di un Echinoderma Irregolare, probabilmente di uno Spatangoide non molto ben distinto e che tengo ora in comunicazione. Il terzo era rimasto come il secondo fino ad ora in mano al signor Figone. Già l'aveva visto il Gastaldi e da quel poco di ossa che sporgeva fuori da un frammento di marna indurita l' aveva assegnato alla classe degli uccelli ed aveva proposto al proprietario di spedirlo a Torino, affinchè lo si potesse maggiormente scoprire e studiare.

---

(1) Il *Palaeogrus princeps* è credo il più antico rappresentante dei Gruidi; infatti, benchè trovi già anteriormente descritti avanzi di Gralle di forti dimensioni (Lemoine, *Recherches sur les oiseaux fossiles des terrains tertiaires inférieurs des environs de Reims*, I^re partie, Reims, 1878, 8°, pag. 53, tav. 4, fig. 6. — Owen, *British fossil Mammals and Birds*, 1846, pag. 556. — Gervais, *Zool. et Pal. Française*, 2° éd. *passim*. — Milne Edwards, *Rech. Anat. et Paléontologiques pour servir à l'histoire des oiseaux fossiles de la France*, Paris, 1869-71, *passim*, tuttavia nessuno di quelli sufficientemente determinabili mostra volersi pei suoi caratteri avvicinare a questa famiglia.

(2) *Di alcuni fossili terziarii del Piemonte e della Liguria appartenenti all' ordine dei Chelonii.* Mem. d. R. Acc. d. Sc. di Torino, ser. II, tom. XXXII.

La repentina morte del Gastaldi impedì che la proposta venisse messa ad esecuzione ed il pezzo rimase indescritto a Ceva. Finalmente nel passato autunno il Michelotti, che pur conosceva l'esistenza di un tale avanzo e quel che ne avesse pensato il Gastaldi, mi scrisse invitandomi a recarmi a Ceva per esaminare ed all'uopo cercare di studiare quel fossile. Potei combinare, di ritorno da un'escursione alpina, di passare per Ceva; trovato il gentil proprietario ed intesomi con lui, il prezioso avanzo mi fu consegnato a Torino nell'ora scorso gennaio.

Potei anch'io subito riconoscere che si trattava realmente di ossa di uccello, ma le parti visibili eran poche e non sufficienti a fornirmi i dati necessari per una approssimativa determinazione delle affinità dell'animale che le aveva possedute con uccelli viventi. Un rapido esame alla lastra di dura marna in cui erano avvolte le parti visibili, mi convinse che potevo senza pericolo azzardare di scoprir maggiormente le parti che avevo sott'occhio e fors'anco trovarne e metterne in evidenza di nuove. Lavorando per qualche giorno di scalpello, di punteruolo e di pazienza son giunto al risultato insperato di poter avere sott'occhio al fine del mio lavoro manuale, un complesso di non meno di venti ossa, fra le quali se alcune eran difettose e guaste, altre invece son sufficientemente conservate ed intere da poter con qualche sicurezza collocare in sistema l'animale a cui appartennero.

Avendo numerato osso per osso man mano che le andavo scoprendo ed essendo la mia numerazione abbastanza ben riescita nella annessa tavola I, fig. 5, seguirò nella descrizione delle singole ossa, l'ordine della numerazione che va del resto abbastanza regolarmente da destra a sinistra (1).

Il n° 1 è un osso di 21 mm. di lunghezza; corroso alla superficie, vi si riconoscono tuttavia una faccietta articolare ad un capo ed una troclea all'altro; è facilmente determinabile per una *Falange*, probabilmente la seconda del dito secondo di un Palmipede a dita molto allungate.

Il n° 2 è un frammento di osso esilissimo e molto allungato. Il frammento misura 35 mm. di lunghezza essendo in parte mascherato dall'osso n° 1. Per la sua forma e sovrattutto per la sua espansione verso il basso sarei disposto a vedere in esso porzione della *Fibula* sinistra veduta dalla faccia posteriore e colla sua sommità articolare rivolta al basso della tavola. Tale fibula sarebbe assai meno sviluppata che in uno scheletro di *Anser segetum* adulto che ho dinanzi.

Il n° 3, frammento di osso lungo misurante 11 mm., parrebbe la metà prossimale di una *Falange;* è alquanto più esile dell'osso n° 1 e forse appartiene ad un dito interno o primo, del quale deve essere stata la seconda.

Il n° 4 è di nuovo un frammento di osso lungo misurante 58 mm. di lunghezza, mancano entrambe le estremità e non abbiamo dinanzi che porzione del corpo dell'osso il quale, essendo vuoto, fu per opera della macerazione e della pressione sfondato, portando le due lamine ossee quasi a contatto; ritengo questo frammento

(1) Nella descrizione delle singole ossa ho cercato di tener dietro per quanto mi fu possibile al piano ed alla terminologia di cui si serve il Milne Edwards nelle sue *Recherches zool. et Pal., pour servir à l'hist. des oiseaux foss. de la France*, e nelle sue *Observations sur les oiseaux fossiles des Faluns de Saucats et de la Mollasse de Léognan,* 8° av. pl. *Bibl. des Hautes études, Sect. d. Sc. nat.*, tom. XI, art. n. 3. Paris, Masson, 1874.

per porzione della *Tibia* sinistra vista dalla faccia posteriore e colla sommità prossimale rivolta allo ingiù; la porzione visibile comincierebbe al disotto della testa articolare, la quale doveva protendersi ancor quasi di un centimetro e mezzo verso l'osservatore. È ancora assai visibile sul bordo esterno di quest'osso (a destra) una sottile cresta ossea alla quale, come nel genere *Anser*, aderiva dapprima, quindi si doveva saldare la fibula a metà circa dalla sua lunghezza: tale espansione è però molto meno svolta che nel genere *Anser*, sovrattutto verso la testa prossimale, e non aveva ancora contratta aderenza diretta colla fibula.

Questa tibia intiera doveva avere una lunghezza maggiore che non lo stesso osso dell'*Anser segetum*, con tuttociò il suo diametro doveva esser minore e quindi, se non sono indotto in errore dallo stato presente di compressione, l'osso della gamba doveva esser molto più svelto che non nell'*Anser segetum* che ho preso come termine di confronto.

L'osso n° 5, misurante 19 mm. di lunghezza, è appuntito in basso e probabilmente munito di una faccietta articolare alla più larga estremità opposta. Lo determinai per *Falange Ungueale* del primo dito della estremità anteriore. In confronto colle altre ossa del presente scheletro e con simili parti di uno scheletro di *Anser segetum*, di *Carbo Desmarestii* e di *Carbo cormoranus* è molto piccolo, sovrattutto molto corto; ricorderebbe quindi molto di più un simile osso quale si trova nello scheletro delle *Gralle*, per esempio nell'*Ardea cinerea*.

Il n° 6 è un *Tarso-metatarseo* destro sgraziatamente mancante della sua estremità distale, che rimase però improntata sulla roccia. L'osso intiero ha misurato per lo meno 70 mm. di lunghezza (lo stesso osso nell'esemplare che ho dinanzi di *Anser segetum* ne misura 78); è visibile dalla sua faccia posteriore e su di essa notiamo molto meno svolte che non nella specie di confronto le lamine posteriori costituenti il tallone. Forse questo minore sviluppo non fu reale, ma devesi ora ad una corrosione posteriore subita da tali parti. Le lamine ben visibili sono in numero di tre scemanti di lunghezza e di sporgenza dallo interno allo esterno, la più esterna però alquanto corrosa e più spessa si mostra come composta di due elementi paralleli, ciò che fa credere che il tallone fosse originariamente composto di quattro lamine (come nel genere *Anser*) e che le due esterne si confondano in una per lo stato presente di difetto della porzione più sporgente.

Quantunque l'osso sia leggermente schiacciato nel senso antero-posteriore, notasi tuttavia in esso il poco sviluppo di diametro trasversale della porzione prossimale, andando in ciò d'accordo con quanto si osserva nelle corrispondenti parti dell'*Anser segetum*. La superficie articolare per la tibia non è visibile, e troppo incerto e pericoloso sarebbe un tentativo per iscoprirla.

Sul corpo dell'osso noi notiamo due creste scorrenti longitudinalmente per gran parte della sua lunghezza; la esterna, nascente sulla faccia esterna dell'osso presso la sommità prossimale dell'osso, e portantesi al limite fra la faccia esterna e la posteriore poco sotto al tallone, è dapprima la più sporgente, si perde poi quasi tutto ad un tratto dopo avere oltrepassata la metà lunghezza dell'osso a differenza di quanto avviene per la corrispondente parte dell'*Anser segetum*, dove noi vediamo tale sporgenza scemare bensì, ma conservarsi fino alla origine dello spigolo postero esterno della troclea esterna.

La cresta interna nasce pressochè al termine della lamella interna del tallone, corre, meno sentita che la precedente per tutta la lunghezza conservata dell'osso e costituisce lo spigolo sentito di divisione tra la faccia interna e la posteriore dell'osso stesso; in ciò noi abbiamo nuova differenza dall'*Anser segetum*, dove tal cresta nascendo allo stesso modo va rapidissimamente scemando e si perde quasi completamente prima della metà lunghezza dell'osso che, nella sua metà distale, ha la faccia interna passante con una sola curva nella posteriore.

La porzione articolare distale dell'osso, mancante ma improntata sulla roccia, come fu detto, è notevole per la sua grande ristrettezza, ricordando in ciò molto bene l'*Anser segetum;* come in quella specie così in questo esemplare la troclea del dito esterno discende quasi allo stesso livello che quella del dito medio. La troclea del dito interno non è improntata che pel suo margine antero-esterno, possiamo però arguirne che essa si arrestava di quasi quattro millimetri più in su della mediana e che era meno rigettata allo indietro che non nello *Anser segetum* (se qui la deformazione e la pressione non modificarono alquanto l'assoluta posizione primitiva). Ciascuna delle troclee è poi notevolmente ristretta da lato a lato, molto di più che nella specie di confronto. Non son visibili, nel presente stato di conservazione, nè i forami superiore ed inferiore, nè la fossetta di adesione pel quarto metatarseo.

In complesso quest'osso importantissimo nella classificazione degli uccelli e che per somma ventura ci è stato conservato, si mostra nei caratteri essenziali siccome spettante certamente ad un *Palmipede* vicino agli *Anseridi;* negli accessori caratteri si mostra assai differente dall'*Anser segetum* per la diversità di sviluppo delle lamelle ossee costituenti il tallone e delle creste limitanti la faccia posteriore, mentre gli somiglia nella posizione relativa delle tre piccole troclee inferiori; allò incontro si mostra simile alla *Bernicla magellanica* ed all'*Anser albifrons* nei due caratteri pei quali si distingueva dall'*Anser segetum* e differisce da quelle per quello che la rendeva analogo a quest'ultima specie.

Finalmente le dimensioni di quest'osso n° 6, alquanto superiori a quelle del corrispondente osso dell'*Anser segetum*, sono eguali a quelle dell'*Anser albifrons* (1).

L'osso n° 7, misurante 28 mm. di lunghezza (compresavi la parte dell'osso mancante e solo improntata sulla roccia), e 4 di larghezza e collocato in modo da aver una faccietta articolare alla estremità contro al numero da me apposto e una troclea alla estremità opposta, è facilmente riconoscibile per una *Falange*, probabilmente la seconda del dito medio.

L'osso n° 8 misura 34 mm. di lunghezza ed eziandio 4 mm. di larghezza; è quasi completo ed anch'esso mostra, sull'estremità accostata all'indicazione 8, una faccietta articolare ed una piccola troclea sulla estremità opposta; anche questo è facilmente riconoscibile per una *Falange* di un dito del piede e probabilmente per la prima del dito medio.

A proposito delle ossa n° 7 ed 8 debbo far notare la estrema lunghezza ed esiguità loro; caratteri questi che mal si accoppiano colla apparente robustezza del

---

(1) Misurate sulla tavola 12 dell'opera dell'A. Milne Edwards; *Recherches Anatomiques et Paléontologiques pour servir à l'histoire des oiseaux fossiles de la France*, 1867-71. Paris, 4°.

tarso metatarseo descritto e che male vanno d'accordo colla robustezza delle parti loro corrispondenti nelle diverse specie di *Anser* (in ampio senso) come nelle diverse specie di *Carbo*, trovano molto più facilmente punti di rassomiglianza nelle falangi delle lunghe ed esili dita delle *Gralle*.

L'osso n° 9 misura da capo a capo 172 mm. di lunghezza; il corpo dell'osso allo stato presente offre 5 mm. di larghezza massima e la sua estremità prossimale, inalterata, mm. 6 pure di larghezza massima. È molto facilmente riconoscibile pel *Radio* destro, la di cui estremità distale guasta e rotta dal corpo rimase però in opposizione al restante dell'osso e su di un piano di due millimetri superiore a quello su cui esso giace: inoltre il corpo dell'osso, nel suo terzo distale, è incrociato e ricoperto dall'osso n° 10 che lo maschera per questa parte. Il restante del corpo dell'osso fu sfondato dalla pressione degli strati superiori in via di formazione mentre era ancor meno resistente, per modo che la sua forma originaria cilindroidea e il po' di curva che esso poteva avere, andarono perdute, ed ora la lamina ossea in vista è quasi a contatto colla opposta ed è anzi segnata per lo lungo da un solco che deve la sua origine alla causa predetta; potei mettere quasi completamente a nudo la porzione prossimale dell'osso compresavi pure la faccia articolare e non nego che dovetti rimanere stupito della piccolezza dell'una e dell'altra.

Se il tarso metatarseo che abbiamo pur ora esaminato ci indicava chiaramente che noi avevamo a che fare con un *Palmipede* prossimo agli *Anseridi*, l'esame delle ossa falangee ci obbligava invece a pensare piuttosto al genere *Carbo* ed alle *Gralle*.

Alla stessa conclusione ci condurrebbe ora eziandio l'esame del radio, la lunghezza sua e la sua esilità sono caratteri che ci fanno tener lontana l'ala dell'Ornitolite di Ceva dal tipo degli *Anseridi* e ce lo farebbero ravvicinare piuttosto al genere *Carbo* e più specialmente al *Carbo cormoranus* col quale concorderebbe inoltre pel modo di curvatura del suo terzo prossimale; con tutto ciò però la piccolezza della testa articolare prossimale e della Fossetta Omerale sono caratteri tali che non incontriamo generalmente nei *Palmipedi* e che trovano il loro riscontro invece fra le *Gralle* e più particolarmente nel genere *Ardea*.

Mentre in questa estremità prossimale osserviamo una costante riduzione di tutte le creste ed asperità per le inserzioni muscolari, il solo Tubercolo Bicipitale si mostra appariscente ed assai sviluppato e fa in ciò nuovo contrasto coi *Palmipedi* dei generi indicati accostandosi una volta di più alle *Ardee*.

L'osso n° 10 era inizialmente un osso lungo, robusto tanto che resistette molto più che il precedente alla pressione dei sovrastanti strati; lo si riconosce a prima vista pel *Cubito* destro del quale si possono seguire dalla estremità distale 153 mm. di lunghezza, l'estremità prossimale essendo mascherata dalla estremità pure prossimale dell'osso n° 12. Quest'osso il cui corpo misura, ora così compresso e leggermente sfondato qual è, mm. 8 di larghezza massima, giace adagiato sulla sua faccia superiore ed alquanto interna e ci presenta la sua faccia inferiore ed alquanto esterna sopra la quale noi riescimmo a contare i tubercoli di inserzione di ben 23 penne remiganti ordinate su due linee parallele e cioè 13 nella più esterna e superiore e 10 nella inferiore. Si vede che altre remiganti compivano le due linee, ma le impronte loro sono mascherate o dalla roccia o da posteriori rotture. L'estremità

articolare distale, che è ora quasi completamente scoperta dalla roccia, ci lascia vedere la troclea per l'articolazione col Carpo; noi osserviamo come tal troclea sia nuovamente piccolissima in confronto colla lunghezza dell'osso ed anche colla dimensione del corpo dell'osso. L'esilità del cubito unitamente alla piccolezza della sua troclea di articolazione pel carpo ed a simili caratteri osservati sul radio concordano ancora una volta a farci ravvicinare l'Ornitolite di Ceva ai *Carbo* anzichè al genere *Anser* e ricordano pure assai vivamente la forma e la costituzione delle analoghe parti dell'ala del genere *Ardea*.

Col n° 11 ho indicata un'impronta lunga mm. 40 e larga mm. 9 lasciata dalla porzione prossimale del *Metacarpo* sinistro e dalla sua faccia interna. L'impronta è mancante corrispondentemente alla sporgenza ossea rappresentante il primo dito dell'ala; del medesimo manca così ogni traccia (meno l'osso n. 5), è invece assai ben visibile la parte corrispondente al dito secondo, il cui metacarpeo doveva essere un osso molto esile ed a pareti sottili; vediamo infatti dalla impronta che esso soggiacque alla pressione e si ruppe in più punti in senso per la maggior parte parallelo al suo maggior asse. Finalmente vediamo ancora improntata l'origine del metacarpeo del dito terzo che era un ossicino esilissimo staccantesi dal metacarpeo secondo a 16 mm. dalla sua sommità prossimale e costituente una sottile lamina schiacciata d'alto in basso (nell'ala in posizione di riposo) e lunga quasi tanto come il metacarpeo secondo. Essa è rotta però ad un centimetro e mezzo in basso dal suo punto d'individualizzazione.

I pochi caratteri che si possono seguire in questa impronta, e che non vennero esagerati dallo schiacciamento dell'osso che la produsse, concordano abbastanza dettagliatamente con quelli delle simili parti in un'ala di *Carbo cormoranus* che ho dinanzi.

Il n° 12 misurante 170 mm. di lunghezza, è facilmente riconoscibile per l'*Omero* destro adagiato sulla sua faccia interna e mostrante la esterna od anteriore e la di cui forma venne profondamente alterata dalle posteriori pressioni e fratture. Presentemente la sua estremità prossimale presenta mm. 40 di larghezza massima; il diametro del corpo dell'osso presentemente, e causa l'appiattimento molto superiore a quello iniziale, è di 8 mm., e quello della testa articolare distale (poco compressa e leggermente mascherata dalla roccia) è di 20 mm. Abbiamo visto come il radio di questo esemplare misurasse 172 mm. di lunghezza, una lunghezza cioè di soli 2 mm. superiore a quella dell'omero.

Noi troviamo, fra i *Lamellirostri*, nel genere *Anser* l'avambraccio più corto del braccio; fra i *Totipalmi* nel genere *Phalacrocorax* l'avambraccio più lungo del braccio ma di poco più di quel che noi vediamo succedere per l'Ornitolite di Ceva, nei *Longipenni* poi col genere *Larus* la lunghezza dell'avambraccio supera di gran lunga quella del braccio. Per questo rapporto noi dovremmo ravvicinare di più il nostro fossile al genere *Phalacrocorax*, se la lunghezza del corpo dell'omero, il suo pochissimo curvamento e la notevole brevità della estremità articolare prossimale in confronto colla lunghezza dell'osso stesso non lo facessero ravvicinare piuttosto ai *Laridi* coi quali ha pur di comune, per quanto mi è dato di vedere attraverso le notevoli deformazioni subite dalla testa, la forma e posizione della faccia articolare pel Coracoide mentre ne differisce per la mancanza alla estremità distale della Apofisi Sopra-epicondiliana.

Opino finalmente che nel caso presente debbasi alle sole pressioni e deformazioni posteriori la quasi nessuna sporgenza del Trocantere esterno e la predominanza invece del Trocantere e della Cresta interni.

Col n° 13 ho designata una *Vertebra*, probabilmente una delle ultime *cervicali* che potei scoprire nel preparare la roccia : essa è molto guasta, deformata e mancante e non ci può molto servire per chiarirci sulle analogie dell'animale cui appartenne.

Col n° 14 è indicato un frammento osseo probabilmente della estremità distale del *Tarso-metatarseo* sinistro. Me lo fa suppor tale lo sdoppiamento che esso pare subire ad un dato punto della sua lunghezza ed il fatto che uno dei rami originati, che è rotto avanti la sua estremità, lasciò nella roccia una impronta che par quella di una *Troclea digitale.* Se veramente quest'osso è un tarso metatarseo, noi lo avremmo visibile per la sua faccia anteriore e per un 25 mm. della sua lunghezza a partire dalla estremità distale.

Il n° 15 ci presenta un frammento lungo 32 mm. ed un po' ricurvo di una *Costa sternale.*

Similmente il n° 16 ci presenta un altro frammento di una delle ultime *Coste sternali*, lungo 35 mm., compresavi la parte soltanto improntata nella roccia.

L'osso n° 17 che, come molti altri non venne alla luce che dopo assiduo lavoro, è un frammento lungo 42 mm., corroso da una estremità presso la quale è pure attraversato dallo ossicino n° 16, ed assai schiacciato dall'altra e del quale non riescii a stabilire la relazione colle restanti parti dello scheletro, che dopo averlo isolato completamente dalla roccia e visitatolo ancora sulla faccia à quella adiacente. Riconobbi allora non trattarsi che della estremità distale del *Radio sinistro* veduto dalla sua faccia posteriore o superiore. Il modo tronco di terminarsi di quest'osso alla sua estremità distale o carpale male si accorda con quello che vediamo accadere nel genere *Phalacrocorax* e troverebbe maggiore analogia con ciò che si osserva nel genere *Anser.* A differenza però da quello osservo, nel fossile di Ceva un maggiore sviluppo dei tubercoli limitanti dalle due parti la fossetta pel passaggio dei tendini estensori della mano.

Se nel *Radio* n° 9 non potemmo ben vedere la porzione distale per essere questa mascherata dàl cubito ed in parte rotta, noi abbiamo un compenso vedendo la stessa parte nell'osso simmetrico n° 17 : noi possiamo qui scorgere come la porzione distale fosse, siccome avviene nel maggior numero degli uccelli, incurvata per andare a raggiungere l'articolazione carpale malgrado la divergenza del corpo del cubito quello del radio e malgrado l'ingrossamento articolare della estremità del primo.

Col n° 18 segnai una *Costa vertebrale* destra od almeno la sua porzione distale ancora munita del suo *processo ricorrente* molto ben sviluppato. È probabile si tratti qui della seconda costa , la sua forma però non ci offre nulla di caratteristico per la classificazione del fossile, il frammento di costa è lungo 36 mm. e largo 3,5 mm. la lunghezza del processo ricorrente , compresavi la parte mancante e soltanto improntata , è di 16,5 mm. , la sua larghezza al punto di massima espansione , di 4,5 mm.

Il n° 19 indica una porzione prossimale di una *Falange* di estremità inferiore: è lunga 12 mm. e per la massima parte al puro stato di impronta sulla roccia.

Col n. 20 designiamo un nuovo frammento, lungo pochi mm., di una *costa sternale* rotta, distorta e mascherata in due punti dalla costa vertebrale destra di cui facemmo cenno al n° 18.

Finalmente in basso della estremità prossimale dell'omero di cui facemmo parola sotto il n° 12 si ravvisa ancora una piastrellina ossea della quale nemmanco si può dire che cosa ella sia e se abbia appartenuto allo scheletro di cui è ora parola. Essa non meritava quindi di essere specialmente contrassegnata con un numero, e solo ora ne parlo per scarico di esattezza nella enumerazione.

In conclusione fra le venti ossa che abbiamo sin qui enumerate ne abbiamo alcune che sono di un reale ed importante valore per la determinazione della famiglia cui appartenne l'animale che ne era dotato. Primo fra tutti è il Tarso-metatarseo o Canone che dir si voglia. La robustezza sua, la forma del suo tallone e la disposizione delle sue troclee digitali ci fanno classificare l'animale di Ceva fra i *Palmipedi lamellirostri* e particolarmente vicino agli *Anseridi*, mentre la lunghezza ed esilità delle falangi ci fanno pensare piuttosto ai *Totipalmi* e particolarmente ai *Cormorani*. Se poi noi passiamo a considerare le ossa dell'ala noi saremmo dubbiosi non più fra gli *Anseridi* e i *Graculidi*, ma bensì fra i *Graculidi* ed i *Laridi* cioè fra *Totipalmi* e *Longipenni*. Noi siamo per conseguenza dinanzi ad un tipo che, essendo già un vero *Palmipede*, da troppo poco tempo ancora si è differenziato siccome *Lamellirostre* e (ce lo dice il canone) conserva ancora molti caratteri comuni coi *Totipalmi* e colle *Gralle* per le falangi dei piedi, coi *Totipalmi* e coi *Longipenni* per la conformazione e sviluppo delle singole parti dell'ala. Noi abbiamo insomma a che fare con un tipo alquanto complessivo.

Da quanto precede rimane dimostrata l'utilità di creare per l'Ornitolite di Ceva un nuovo genere ed una nuova specie. A tale scopo io proporrei il nome di *Chenornis graculoides*.

III.

L'Ornitolite di Monte Bamboli.

Anas lignitifila SALVAD.

Accennai già in principio di questo mio lavoro come nelle ligniti di Monte Bamboli siasi rinvenuto da parecchi anni un primo ornitolite e come esso sia stato studiato dal Prof. Salvadori (1).

In tale occasione il prezioso fossile venne disegnato in grandezza naturale nella sesta tavola accompagnante il lavoro, alla figura settima. Nel testo il fossile veniva comparato agli *Anatidi* ed agli *Alcidi*, ed in conclusione il Valente Ornitologo esprimeva la sua opinione che, senza escludere che si potesse trattare di un *Anatide*, inclinava tuttavia a credere che il medesimo fosse a considerarsi siccome una specie di

(1) In GASTALDI, Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, 2ª ser., tom. XXIV, 4°, pag. 193-236 (pag. 225), tav. III-VIII (tav. VIII, fig. 7). Torino, 1868.

Alcìde. Siccome però in tale descrizione, benchè munita di figura, non conchiudeva colla proposta di un nome, così ho ora interpellato il signor Professore sù quello che intendeva di dargli per lo avvenire. Il Salvadori che, anche dopo la descrizione fattane, si interessò ripetutamente e vivamente della giusta determinazione del fossile di Monte Bamboli e che a tale scopo lo portò seco a Parigi ed a Londra per farlo vedere ai più valenti ornitologi di quelle città e per compararlo con un materiale scheletrico molto più copioso di quello che non sia dato disporre in Italia, mi rispose che i suoi studi ulteriori lo avevano persuaso trattarsi di un *Anatide* anzichè di un *Alcìde*, come prima aveva detto, e che per conseguenza il fossile di Monte Bamboli doveva venir riferito al genere *Anas*.

In suo nome adunque e colla di lui autorizzazione propongo per il fossile descritto dal Salvadori in Gastaldi: *Intorno ad alcuni fossili del Piemonte e della Toscana* e disegnato da quest'ultimo, il nome di *Anas lignitifila*, Salvad.

IV.

L'Ornitolite di Peschiera.

Grus turfa Portis.

Tav. II, fig. 1-13.

Or è poco tempo il sig. Ingegnere E. Nicolis visitando la torbiera di Pro Foschin al Sud di Peschiera, ne raccoglieva una serie di ossa colà state trovate dai lavoratori. Tali ossa mi furono in questa primavera gentilmente comunicate in parte (e la massima) dallo stesso sig. Nicolis ed in parte dal sig. Arciprete A. Parazzi al quale erano state donate dal Nicolis. A parte alcune ossa di quadrupede di cui farò cenno in seguito, mi trovai ricco di una ventina di ossa aventi appartenuto ad uno stesso individuo, ad un grosso uccello.

Fra queste venti ossa debbo enumerare:

1° Il tarso metatarseo sinistro quasi completo, non essendo che leggermente guasto in corrispondenza della faccia articolare superiore e del tallone;

2° Le due tibie, la sinistra completa, la destra mancante solo del condilo interno dell'articolazione inferiore;

3° Le due fibule complete;

4° I due femori completi;

5° Porzione del Pelvi mostrante la metà inferiore dell'Acetabolo sinistro con porzione insignificante dell'osso anteriore e delle posteriori;

6° I due Metacarpali principali completi;

7° I due Radii completi;

8° I due Cubiti completi;

9° L'Omero sinistro quasi completo e non difettoso che in corrispondenza della cresta pettorale;

10° Il Coracoide sinistro completo;

11° Le due Scapole, entrambe difettose alla loro estremità distale e la sinistra più completa della destra;

12° Una Vertebra Cervicale corrosa;

13° Una Vertebra Dorsale mancante del suo terzo posteriore e dell'Arco Neurale.

L'esame delle ossa delle gambe mi dimostrò trattarsi indubbiamente di una Gralla della statura di una *Grù*, colla quale presi tosto a compararla senza però perdere mai di vista gli scheletri del *Fenicottero roseo*, dell'*Ardea cinerea* e della *Cicogna bianca* gentilmente favoritimi dal Museo di Anatomia comparata di Torino. Nella annessa tavola poi feci riprodurre, per motivi facili a comprendersi, tutte le ossa sinistre che mi trovavo possedere oltre alle due uniche vertebre presenti ed a due altri oggettini di cui parlerò poi.

Il *Tarso-metatarseo* (fig. 1) sinistro misura:

		per lo scheletro di Peschiera	per lo scheletro di Grù Cinerea del Museo di Anat. comp.
Lunghezza estrema.	mm.	272	263
Larghezza dell'estremità superiore	»	22	27, 5
Larghezza dell'estremità inferiore	»	23	23
Larghezza del corpo dell'osso .	»	9	10
Spessore del corpo dell'osso .	»	9	9

dalle suddette misure ne risulta pel *Canone* di Peschiera in confronto del vivente, una lunghezza alquanto maggiore, congiunta con una larghezza della estremità superiore ed un calibro sensibilmente minore del corpo dell'osso, mentre egualmente dilatata è la estremità inferiore.

Seguitando il confronto trovo nel Canone di Peschiera più fortemente sviluppato e sporgente *il Tallone* (almeno per ciò che ne è visibile), ma fatto esattamente sul piano di quello della Grù e ben sviluppato pure il foro risultante dalla unione allo indietro delle due lamine esterne del Tallone stesso. Trovo che le due metà della Faccia articolare per la Tibia sono, conseguentemente alla maggior ristrettezza della intiera estremità superiore, più strette e profonde che nella Grù cinerea, come osservo pure una maggior sottigliezza dallo avanti allo indietro ed una maggiore inclinazione allo avanti della Tuberosità Intercondiloidea.

Osservo che il corpo dell'osso è a vista sensibilmente più svelto e leggiero che nella Grù cinerea e che la Grondaia longitudinale anteriore è molto più pronunziata e profonda che nella specie di confronto, senza contare che essa si allunga molto più in basso, così che l'intiera lunghezza dell'osso ne appare affetta.

Sulla faccia posteriore poi, osservo egualmente marcata nelle due specie la Cresta longitudinale esterna e la Grondaia mediana; quest'ultima si perde più in alto nella specie di Peschiera che nella *Grù cinerea*.

Il Foro inferiore appare più ampio nell'uccello di Peschiera e le troclee digitali, che hanno l'identica posizione che nella *Grù*, appaiono più strette da lato a lato.

Per la *Tibia* (fig. 2) troviamo le seguenti dimensioni relative in millimetri:

	Ornitolite di Peschiera	Grù cinerea vivente.
Lunghezza massima dell'osso . . .	309	303
Larghezza dell'estremità superiore . .	31	29
Larghezza dell'estremità inferiore . .	20	21, 7
Larghezza del corpo dell'osso . . .	11, 2	12, 7
Spessore del corpo dell'osso . . .	9, 2	11, 8
Spessore della testa dell'osso . . .	30 (1)	36
Lunghezza dalla estremità inferiore alla cresta peroniera	231	223
Lunghezza della cresta peroniera . .	39	37

La *Tibia* dell'ornitolite di Peschiera presenta alla sua estremità superiore le stesse Creste ed egualmente disposte che per la *Grù* ordinaria; solo la cresta esterna appare alquanto più distaccata dal corpo dell'osso. Questo è alquanto ritorto sul proprio asse e sensibilmente più sottile che nella specie di confronto. La sua faccia anteriore è ancor meno convessa che in quella specie e ne è un po' più sentita la Cresta longitudinale esterna inferiore. Sensibilissima è poi la maggiore strettezza della estremità inferiore, carattere questo che va d'accordo con quanto già riscontrammo nella estremità superiore del Tarso-metatarseo e che si fa sentire tanto sui Condili quanto nella Gola intercondiloidea.

Un'occhiata alla tabella comparativa delle dimensioni ci dimostra poi come: a parte la maggior lunghezza della intiera tibia di Peschiera, la Cresta peroniera ne sia collocata più in alto e sia più lunga che nella *Grù cinerea*, ciò che porta di naturale conseguenza una minore lunghezza d'intervallo fra la sommità dell'osso e l'origine superiore della Cresta peroniera stessa.

Le *Fibule* (fig. 3) che per l'ornitolite di Peschiera sono entrambe isolate e quasi completamente conservate misurano (la sinistra) mm. 164 di lunghezza, mentre nello scheletro che ho dinanzi della *Gru cinerea* vivente lo stesso osso è visibile per 180 mm. di lunghezza. Dimensione pari e maggiore raggiungevano le *intiere* Fibule dell'originale di Peschiera se giudichiamo dalle impronte di loro rottura visibili sulle Tibie.

La Fibula di Peschiera comparata con quella della *Grù cinerea,* mostra la sua estremità superiore men spessa dallo avanti allo indietro e più stretta da fianco a fianco, ma concordante assolutamente nella forma; così pure affatto eguale è nelle due la traccia di torsione sulla faccia esterna del corpo dell'osso, ma questo si mostra ancora più esile nell'Ornitolite di Peschiera.

Pel *Femore* (fig. 4), noi troviamo le seguenti dimensioni comparative:

	Ornitolite di Peschiera	Scheletro di Grù cinerea.
Lunghezza totale dell'osso . . .	mm. 131	139
Larghezza della estremità superiore	» 27	27
Larghezza della estremità inferiore	» 26	27, 4
Larghezza del corpo dell'osso . .	» 12, 6	13, 1
Spessore del corpo dell'osso . .	» 11, 8	12, 5

(1) La cresta anteriore vi è alquanto logora.

Il *Femore* di Peschiera è molto più simile all'osso omologo della *Grù cinerea* che non le ossa predette, tuttavia se ne distingue per minori dimensioni in generale e specialmente della estremità inferiore. Mentre le altre ossa si mostravano più esili ma più lunghe delle omologhe della *Grù cinerea*, il Femore si dimostra leggermente più corto, mentre il collo è più sentito e leggermente più lungo, ciò che porta alla conclusione che la larghezza assoluta della estremità superiore del Femore nelle due specie è precisamente eguale.

La Gola intercondiloidea della estremità inferiore del Femore appare nella Ornitolite di Peschiera un po' più larga ed altrettanto profonda che nella *Grù ordinaria* e più stretti da fianco a fianco ne sono i Condili, in conclusione la somma di queste tre parti è minore nel Femore di Peschiera che non in quello della *Grù cinerea.*

Il corpo dell'osso appare poi men ricurvo nel Femore di Peschiera.

La porzione conservataci del *Pelvi* (fig. 5) è troppo insignificante per poterne trarre utili comparazioni. Solo parvemi osservare dimensioni lievemente più ampie pel Foro Otturatore.

Il *Coracoide*, che è completissimo, ci offre le seguenti dimensioni:

		Ornitolite di Peschiera	Grù cinerea vivente.
Lunghezza dell'osso . . .	mm	82, 5	92, 5
Larghezza della estremità sternale	»	39, 6	43
Larghezza dell'osso sotto la fossetta scapolare. . . .	»	17	20
Larghezza dell'osso al livello della faccetta glenoidale. . .	»	24	26.

Il *Coracoide* (fig. 6) di Peschiera ci offre dimensioni tutte minori che non il corrispondente osso della vivente *Grù ordinaria*, mentre la forma generale e quella delle singole parti ben si accordano con quelle della stessa *Grù;* noi notiamo però una maggiore ristrettezza della Testa del Coracoide, la quale mostra inoltre la sua faccia anteriore limitata da un perimetro più rettilineo: segnaliamo invece un relativamente maggiore sviluppo nell'Ornitolite di Peschiera dell'Apofisi sottoclavicolare ed una maggiore ampiezza del Foro dello stesso nome.

La *Scapola* (fig. 7) è mancante della sua porzione distale. La parte conservataci ha una lunghezza di mm. 82 in linea retta; non credo probabile che intiera essa raggiungesse la dimensione del corrispondente osso della *Grù cinerea* in 123 mm., la *Scapola* di Peschiera si mostra leggermente più ricurva di quella della specie di confronto, il corpo dell'osso ne è pure più esiguo; la Faccetta Glenoidale si mostra con bordo più tondeggiante e più insenato anteriormente ma, in complesso, di superficie minore: alquanto meno svolta ne è pure la Tuberosità furculare.

L'*Omero* (rappresentato fig. 8), che come già dicemmo è alquanto difettoso in corrispondenza della *Cresta pettorale*, ci dà le seguenti dimensioni comparative:

	Ornitolite di Peschiera		Grù cinerea vivente.	
Lunghezza massima dell'osso .	236	= 100	100	= 254
Larghezza della testa . . .	32 (1)	= 13, 5	13, 2	= 33, 6
Larghezza della estremità inferiore	34	= 14, 4	14, 5	= 37
Spessore massimo della estremità inferiore	19	= 8	8	= 20, 4
Larghezza del corpo dell'osso .	16, 4	= 6, 9	7, 7	= 19, 7
Spessore del corpo dell'osso .	14	= 5, 9	6	= 15, 5.

L'*Omero* di Peschiera è sensibilmente più corto di quello della *Grù ordinaria*, anche le altre sue dimensioni sono, proporzionalmente alla lunghezza, minori che nel-l'Omero di quella. Nell'Omero di Peschiera si osserva però una più sentita curvatura del corpo dell'osso ed una sensibile minor larghezza comparativa del medesimo , ciò che risulta del resto dalle dimensioni date. I Condili e le Creste d'inserzione muscolare sono sviluppatissime e l'osso ha un aspetto di forza superiore a quello della *Grù ordinaria o cinerea*, per certo ha esso appartenuto ad un individuo robusto, avente acquistato tutto lo sviluppo consentaneo alla sua specie.

Cubito (fig. 9).

	Ornitolite di Peschiera	Grù cinerea vivente.
Lunghezza massima dell'osso . . .	272	288
Larghezza della estremità superiore .	26, 8	29, 4
Larghezza della estremità inferiore .	17, 5	21, 4
Larghezza del corpo dell'osso . . .	10, 2	13.

Il *Cubito* di Peschiera si distingue per gli stessi caratteri che l'Omero, minor lunghezza cioè e minori dimensioni proporzionali, da quello della *Grù cinerea.* Anche in esso però son molto più sentite le creste e le impressioni muscolari ed i tubercoli su cui erano impiantate le remiganti sono molto più grossi e sporgenti.

Radio (fig. 10).

	Ornitolite di Peschiera	Grù cinerea vivente.
Lunghezza massima dell'osso . . .	262	275
Larghezza della testa superiore . .	10, 7	12, 8
Larghezza della testa inferiore . .	13, 6	15
Larghezza del corpo dell'osso . . .	8, 3	9, 4.

Il *Radio* presenta gli stessi caratteri del Cubito: riduzione nelle dimensioni generali e maggiore esagerazione dei rilievi ed impressioni per l'inserzione dei muscoli.

Mancano le *Ossa Carpali.*

---

(1) Essendo corrosi il Trocantere Interno e la Cresta Pettorale, non posso dare che dubitativamente questa dimensione.

Metacarpale principale (fig. 11).

	Ornitolite di Peschiera	Grù cinerea vivente
Lunghezza massima dell'osso.	119	124,6
Larghezza dell' estremità superiore	23	25,5
Larghezza dell' estremità inferiore.	15	18,2
Larghezza del gran metacarpale.	7	8
Lunghezza dello spazio intermetacarpale. . . .	164	167,5
Spessore massimo dell' estremità superiore . . .	14	13
Spessore massimo dell' estremità inferiore . . .	11,4	12 .

Le differenze esistenti fra il *Metacarpale* dell' Ornitolite di Peschiera e quello della *Grù ordinaria* risultano abbastanza bene dalla tabella comparativa delle dimensioni. Il Metacarpale di Peschiera è più corto ed in generale più piccolo, ma le due ossa che lo compongono sono maggiormente staccate fra di loro, quindi lo spazio intermetacarpeo relativamente più lungo; le Creste sono maggiormente sviluppate quindi le due Teste relativamente più spesse. Il Metacarpale Piccolo poi pare relativamente più sottile. La forma però dell'osso e delle singole sue parti è affatto eguale a quella delle corrispondenti nel Metacarpale della *Grù ordinaria*.

Alla fig. 12 poi ho fatto rappresentare una *Vertebra cervicale* assai guasta e che ritengo essere la quinta. Per quanto se ne discerne, essa non presenta altra differenza dalla corrispondente della *Grù cinerea* che di essere alquanto minore in tutte le sue dimensioni.

Similmente, alla fig. 13 è riprodotta una *Vertebra dorsale* molto guasta e mancante, che ritengo essere la penultima; confrontata colla corrispondente della ordinaria *Grù*, ne trovo assai più piccola la faccia articolare anteriore, più svolte invece le Creste sulla metà posteriore della faccia inferiore del corpo. Anche il corpo della vertebra presenta dimensioni lievemente più piccole.

In conclusione, fra le parti che abbiamo passato in rivista, noi abbiamo avuto quelle che servono maggiormente al Paleontologo che si occupi degli avanzi di Uccelli, cioè: le ossa delle gambe e sovrattutto il *Canone*, le ossa delle ali e sovrattutto l'*Omero* ed il *Metacarpo*. Le ossa tutte portano caratteri tali da non poter esitare un istante a ritenerle come aventi appartenuto ad una specie di *Grù*, e se noi le avessimo trovate ciascune isolate, noi le avremmo pure classificate nella ordinaria specie europea: *Grus cinerea*, ritenendo le differenze che ciascuno presenta dal corrispondente di quella siccome puramente individuali. Per contro, l'aver trovate le ossa più importanti delle gambe ed il ravvisare in tutte sempre gli stessi caratteri di maggiore allungamento e di minor robustezza ci fa arguire ad una specie di *Grù* più alta su gambe ed avente un corpo più piccolo della *Grù cinerea*. Di questo abbiamo conferma nelle dimensioni delle vertebre, che, quantunque appartenenti ad individuo affatto adulto, sono lievemente più piccole che in quella. La minor lunghezza poi della unica *Vertebra cervicale* esistente, congiunta alla maggior altezza sulle gambe, ci fa supporre che l'animale di cui essa faceva parte, dovesse avere od un numero maggiore di *Vertebre cervicali?* od un collo relativamente più corto e che per conseguenza dovesse abbassarsi di più per prendere il cibo. Finalmente le ossa delle ali meno svolte che nella *Grus cinerea* ci fanno venire alla stessa conclusione tratta dai caratteri delle ossa delle gambe,

cioè che l'animale che ne doveva esser portato era di mole alquanto minore ed oltracciò forse minor volatore, inquantochè il maggiore sviluppo delle creste ed impressioni per l'inserzione dei muscoli ci fanno ammettere che le masse muscolari destinate al meccanismo del volo dovessero essere di maggior mole per reggere al maggior sforzo e quindi per circolo vizioso l'animale ne dovesse esser reso più pesante conseguentemente al minor sviluppo dei bracci di leva.

La *Grù* della Torbiera di Peschiera era dunque in totale più piccola della *Grus cinerea*, e, a collo eretto, più bassa di quella, ma intanto era portata su gambe più lunghe di quella e, nel volo, da ali più corte; era, nella facoltà del volare, lievemente inferiore a quella, le era pure inferiore nella facoltà di procacciarsi il cibo avendo un collo più corto, mentre era più alta sulle gambe.

Nella grotta des Eyzies (Dordogne), il signor Lartet ha raccolta una porzione inferiore di *Tibia* di una *Grù* che si distingue dalla *Cinerea* e persino da quella di Australia per le sue dimensioni maggiori. Di questo pezzo il signor Milne Edwards ha fatto il tipo di particolare specie che ha denominato *Grus primigenia.*

È questa, per caso abbastanza strano, l'unica *Grù* (1) stata segnalata in terreni posteriori ai terziari in Europa, mentre in quelli non ne abbiamo che tre: la *Grus excelsa* e la *Grus problematica* nei terreni miocenici inferiori dell'Allier e la *Grus Penthelici* negli strati miocenici superiori o pliocenici inferiori di Pikermi (2).

Le dimensioni assolute e relative, sufficienti a far distinguere la *Grù* di Peschiera dalla *cinerea* e dalle altre specie viventi, sono, a più forte ragione, valevoli per farla distinguere dalla *Grus primigenia* Milne Edwards; non conoscendo poi, all'infuori delle terziarie, altre specie fossili di questo genere, sono costretto a considerare la *Grù* di Peschiera come rappresentante una nuova specie per la quale propongo il nome di *Grus turfa.*

È egli più probabile che la *Grus cinerea* sia la figlia della *Grus turfa* o della *primigenia* o di una terza specie della quale non abbiamo ancora indizi o che altramente modificata sia ancora vivente? È questione questa che per ora credo meglio lasciare insoluta.

Se l'Uomo preistorico vide e conobbe in Francia la *Grus primigenia* e se si servì delle sue ossa, siccome rilevo dall'opera del Milne Edwards (3), altrettanto si può ben dire della *Grus turfa* in Italia. Poichè nella stessa torbiera donde venne ricavato questo interessantissimo fossile, vennero pure trovate le due magnifiche punte di freccie di diverso modello, che ho fatto riprodurre (fig. 14 e 15) e che non vi ha dubbio possibile che non sieno state fatte dall'uomo.

---

(1) Mentre il Rutimeyer, nelle due sue principali memorie sulle Palafitte: « *Untersuchung der Thierreste aus den Pfahlbauten der Schweiz* » e « *Die Fauna der Pfahlbauten* » non enumera fra gli uccelli rinvenuti nelle palafitte svizzere la *Grù*, trovo che nella seconda edizione francese dell'opera del Lubbock: *L'Homme préhistorique*, edita nel 1876 sulla terza edizione inglese, vien segnalata, in base forse ad ulteriori scoperte, la *Grus cinerea* a Robenhausen. Non si è detto però quali parti dello scheletro ne sieno state scoperte ed in quale stato.

(2) Nel nuovissimo trattato dell'Hoernes (R.): *Elemente der Palaeozoologie*, 8, Leibzig, 1884, pag. 511, viene data la famiglia dei Gruidi come finora senza rappresentanti allo stato fossile!

(3) Opera citata, vol. II, pag. 33, tav. LXXVI, fig. 8, 9, 10, 11.

Di più, il bel Radio che ho presentato nella fig. 10 mostra, sulla faccia opposta a quella su cui è rappresentato, circa a metà della sua lunghezza, due piccoli tagli trasversali, un po' obliqui, fatti con strumento tagliente sull'osso ancora fresco, tantochè la lamina ossea superficiale ne è ancora sollevata.

Identico fatto si osserva sulla Tibia disegnata fig. 2, ed ancora sulla faccia opposta a quella che venne rappresentata. Anche qui, poco sopra metà lunghezza, due intagli paralleli, fatti alla distanza di due millimetri l'un dall'altro con uno strumento tagliente sull'osso fresco tantochè la lamina compatta superficiale è fra i due ancora assai sollevata.

Mentre, come vengo di dire, queste ossa presentano segni non dubbii che l'animale in discorso sia caduto in mano dell' uomo, rimane a spiegarsi il come ed il perchè l'uomo non lo abbia voluto utilizzare.

Infatti, se l'uomo avesse mangiate le carni di questo individuo, noi non avremmo trovate assieme tante parti del suo scheletro (e ne avremmo probabilmente molte di più se chi primo le scoperse non fosse stato un cavatore di torba) e se l'uomo ne avesse utilizzate le ossa, chè le presenti gli sarebbero state preziosissime per la consistenza ed esilità loro, noi non le avremmo trovate così intatte in tutte le loro parti... In vista del presente fatto si potrebbero fare due supposizioni. La prima che l'individuo di Peschiera sia bensì stato cacciato e ferito dall'uomo, ma non ucciso e che le ali sue robuste lo abbiano trasportato alquanto oltre per morir poi miseramente in mezzo alla torbiera, incidente questo che succede abbastanza frequente anche oggidì con migliori mezzi di caccia. La seconda che la *Grù* fosse protetta durante il periodo neolitico in Italia da tradizioni popolari analoghe a quelle che oggidì in Svizzera e nei paesi al di là delle Alpi dove nidifica, proteggono la cicogna e che un qualche individuo, ucciso per sbaglio dagli abitanti della torbiera, sia stato intatto gettato all'acqua, in espiazione del fallo commesso.

Assieme agli avanzi di *Grus turfa* vennero trovati nella stessa torbiera resti di più individui di *Cervus elaphus*, fra i quali uno con denti da latte e corna di un altro che aveva messe fuori le terze difese; sui pugnali di queste ho ravvisato ancora altre traccie di strumenti taglienti fatte sull'osso fresco.

Il laghetto intermorenico di Pro Foschin fu dunque, anteriormente alla sua torbificazione, abitato dall'Uomo Neolitico, il quale, molto probabilmente, vi costruì delle palafitte e possedette armi di selce. Suoi contemporanei e sue vittime furono colà fra altri animali di cui non abbiamo ancora la lista definitiva, la *Grus turfa* ed il *Cervus Elaphus.*

Ricerche accurate nei laghi e nelle torbiere della Lombardia e del Veneto non tarderanno, spero, a farci conoscere, accanto agli avanzi della industria umana nelle sue fasi successive, anche reliquie sufficienti a stabilirne la Fauna Ornitica contemporanea; sono intanto lieto di constatare come alcune ossa, specialmente Metacarpali, di uccelli già sieno state trovate nel lago di Varese ed il bel saggio della collezione Ponti, che nella Sezione Antropologica della nostra Esposizione Generale ci dà una così completa idea dei tesori trovati colà, mostra appunto parecchie di queste ossa (1).

---

(1) Nella stessa sezione notiamo pure ossa di Gralle e di Gallinacei diversi state trovate in compagnia di vertebrati di altri ordini in qualcuna delle Terramare dei dintorni di Viadana ed esposte

V.

Traccie di Uccelli.

1. — *Le impronte di penne del Bolca.*

Ho ricordato, in principio di questo mio lavoro, come il Faujas di Saint-Fond abbia menzionate e disegnate impronte di penne trovate verso il principio del secolo nel Calcare Eocenico ad ittioliti di Monte Bolca e conservate ora nel Museo di Parigi. Aggiungerò ora che le medesime non furono le ultime colà trovate.

Da gentili informazioni epistolari inviatemi dal signor Comm. A. De Zigno mi risulta che penne successivamente rinvenute si trovano ora conservate nel Museo della R. Università di Padova e due altre nella collezione privata dello stesso signor Barone A. De Zigno in quella stessa città, mentre altre parecchie trovansi ancora a Verona in mano a varii proprietarii. Trattandosi di parti di organismo variabili molto su di uno stesso individuo e dalle quali sarebbe forse pericoloso il voler trarre argomenti per discutere le analogie dell'animale che le nutrì, mi astengo da descrizione qualsiasi e mi limito ad una semplice menzione.

2. — *L' Orniticnite di Argentera.*

Ricordo qui semplicemente come nel 1879 io abbia descritto e figurato col nome di *Ornitichnites Argenterae*, un'impronta da me rinvenuta nelle arenarie eoceniche superiori di Argentera e che considerai siccome lasciata dal piè di un uccello. L'originale fu in seguito da me lasciato nell'Istituto Geologico di Bologna.

---

dal benemerito Arciprete Antonio PARAZZI, direttore del Museo civico Viadanese, al quale spetta il merito di averle scoperte e, riconosciutane l'importanza e la natura, di avercele conservate.

Anche nelle Terramare del Modenese e del Reggiano accanto ad avanzi dell'umana industria si trovano reliquie di Uccelli, dei quali in parte già furono determinate le specie. Così, nella stessa Sezione Antropologica (classe VI Preistorica), alla Esposizione Generale Italiana di quest'anno figurano parecchie ossa ornitiche specialmente di Gallinacei raccolte dal Prof. Carlo BONI nella Terramare di Montale e conservate nel Museo civico di Modena.

Ricorderò anzi a questo proposito come lo STROBEL già abbia dato, nel IX volume del *Bullettino di Paletnologia*, fasc. I e II, la lista degli uccelli, fino al 1883, trovati nelle Mariere dell'Alta Italia. Essa consta dei dieci numeri seguenti:

1. *Otus vulgaris* Fleming a Gorzano.
2. *Frugilegus segetum* auct. (Corvus frugilegus L. Corvus frugivorus Coppi) a Gorzano.
3. *Gallus domesticus* L. a S. Ambrogio, Gorzano (Fide Boni), Bismantova, Parma, Castellozzo di Fontanellato, Bozzoletto.
4. *Ciconia alba*, Will. a Montale.
5. *Ardea cinerea*, L. a S. Ambrogio.
6. Gen et sp.? trampoliere indeterminato a Montale.
7. *Anser segetum*, Gacel. a S. Ambrogio, Possioncella Levi presso Viadana.
8. *Anas boschas* L. a Montale, Colombarola, Parma.
9. *Anas* sp. a Cogozzo presso Viadana.
10. Gen et sp.? Palmipede indeterminato a Ronchi presso Viadana.

Speriamo adunque di poter presto fare un completo catalogo, accompagnato ove occorra da illustrazioni delle nuove forme, di tutte le specie di Uccelli sin qui rinvenute nei giacimenti post-terziarii italiani.

3. — *Gli Ornitichniti di Verrua* (*collina di Torino*).

Mentre nello scorso autunno percorrevo la Collina di Torino per farne la carta geologica, m' imbattei qualche volta in lastre di calcare mostranti, sulla superficie di stratificazione, impronte che è qui, se non altro, il caso di ricordare.

La prima che mi colpì è una lastra di circa un metro e 20 centim. di lunghezza per 90 centim. di altezza e 20 centim. di spessore proveniente da una delle numerose cave di Alberese che si trovano nella zona eocenica ad argille scagliose corrente al sud di Lavriano e Brusasco fin presso al castello di Verrua Savoia. Si trova nel comune stesso di Verrua Savoia e dentro all'abitato del Valentino appoggiata ad un fabbricato ed esposta alle intemperie e a tante altre vicende. Sulla sua superficie si scorgono ben marcate una diecina almeno di impronte che ho così alla sfuggita attribuite a piedi di uccelli che abbian passeggiato sull'antico limo calcareo-sabbioso consolidatosi di poi in roccia molto resistente. Le impronte più belle mostrano ben chiare tre dita per ciascuna, il mediano più lungo e colle traccie di quattro falangi fra cui la terminale aguzza come fosse stata terminata da un'unghia piuttosto corta ed ottusa e i due laterali più brevi, con minor numero di falangi distinguibili e fra le quali l'anteriore aguzza allo stesso modo che pel mediano. Il dito più lungo misura circa 7 centim. di lunghezza per uno di larghezza; le altre due, subeguali, raggiungono 5 centim. circa di lunghezza e sono più strette: la profondità di ciascuna impronta è variabile fra i 5 e i 7 millim. Può darsi ripeto che tali impronte possano essere state causate da Uccelli che abbiano passeggiato su di un lido ricoperto da un limo calcare arenoso e che siano state ricoperte e salvate di poi da altro strato dello stesso limo che vi sia sovrapposto; con tuttociò non reputo sia il caso di dilungarmi sovra di esse di più per non dare loro più importanza del convenevole.

Altra lastra dello stesso genere, della stessa provenienza, e colle stesse impronte che la precedente, ma più piccola, vidi io abbandonata sulla strada in faccia all'abitato di Camorano. La medesima è ora irremissibilmente perduta. Nella settimana tra il 23 ed il 30 marzo 1884 venne adoperata come materiale da costruzione nella volta di un ponticello della strada comunale che in Verrua Savoia unisce l' abitato di Sulpiano e Camorano a quello di Ronzo e Valentino in corrispondenza del risvolto di strada presso la cascina Bila. Alla prima lastra da me ricordata poi, è minacciata analoga sorte: la si reputò adatta a farne una soglia anteriore di forno; tale sarà probabilmente il modo suo di sparire.

Se io ricordai in questo lavoro tali impronte gli è soltanto perchè non volevo trascurare di ricordarvi tutto quello che a mia conoscenza ha relazione con Uccelli o loro traccie trovate in Italia e perchè nessuna impossibilità si oppone a ciò che, mentre nella seconda metà dell'Eocene alcuni Uccelli lasciaron penne nel calcare del Bolca, altri lasciarono ossa in quello di monte Zuello ed altri forse passeggiarono sui lidi sabbiosi che diedero poi luogo alle arenarie di Argentera; alcuni individui di questa classe abbiano potuto manifestarsi pure, passeggiando sui lidi fangosi che durante tal epoca esistevano in territorio di Verrua Savoia.

VI.

Avanzi fossili ornitici anteriormente noti.

Ricerche bibliografiche mi mettono in grado di aggiungere, sulla fauna ornitolitologica italiana, le seguenti notizie.

1° Nel pliocene di Val d'Arno, secondo il Cuvier ed il Gervais, si sarebbero incontrati avanzi di Uccelli dei quali non furono peranco determinate le specie (1).

2° La caverna di Verezzi in Liguria fornì al Ramorino abbastanza copiosamente le ossa di Uccelli. Il Milne Edwards che le studiò ne dà la lista seguente:

Falco cenchris	*Corvus pica*
Falco tinnunculus	*Pyrrhocorax alpinus*
Strix bubo	*Columba oenas*
Athene passerina	*Tetrao albus*
Fringilla cannabina	*Tetrao urogallus*
Loxia pyrrhula	*Coturnix communis*
Turdus viscivorus	*Rallus crex.*
Turdus migratorius	

3° Dai trattati di Paleontologia di Giebel e di Pictet rilevo le due seguenti specie come anteriormente conosciute nelle breccie ossifere di Nizza

Turdus bresciensis *Larus priscus.*

4° Il La Marmora, nel suo *Voyage en Sardaigne* (2), dà la seguente lista degli Uccelli da lui trovati nella breccia ossifera di Monreale de Bonaria e determinati da Cesare Studiati (pag. 698-704, 777-778).

Rapace de la taille du Falco albicilla
id. id. id. tinnunculoides
id. plus gros que le F. peregrinus
id. nocturne, espèce de Strix
id. id. de la taille d'une Chouette
Autre rapace nocturne?
Autre de la taille d'une Chouette
Gros Corbeau?
Passereau à peu près gros comme un Merle
Autre passereau
id. id. de la taille d'un gros Merle
Gallinacé de la taille d'un Pigeon
id. de la taille d'une Poularde
id. id. id.

(1) Sono conservati nel Museo di Firenze, il quale deve inoltre possedere altri Ornitoliti miocenici.

(2) A. De La Marmora, *Voyage en Sardaigne ou description statistique, physique et politique de cette île.* Turin, Bocca, 1857, tom. II.

Oiseau puissant dans le vol, de la taille d'un Cygne
Oiseau pas bien fort dans le vol, de la taille d'une Poularde
Palmipède, grande Fuligula?
id. de la taille d'une Sarcelle
id. de la taille d'une grosse Fuligula.

Il Milne Edwards (*Rech. anat. et Pal. sur les Oiseaux fossiles*, tome II, pag. 598) vi aggiunge inoltre per personali ricerche l'*Upupa epops* ed il *Tetrao albus*.

5° Per le stesse Breccie sarde si aveva invece, anteriormente al viaggio del La Marmora e dietro le ricerche del Wagner e del Nitzch, la lista seguente, che estraggo dai trattati di Paleontologia del Giebel e del Pictet:

Vultur fossilis	*Corvus fossilis*
Aquila fossilis	*Corvus cornix fossilis*
Strix sp. nictaea?	*Picus sp. martius?*
Turdus bresciensis	*Tantalus bresciensis*
Fringilla trochanteria	*Anas prop. A. tadorna et A. boscas.*

6° Finalmente, per ciò che ha riguardo all' Isola Pianosa, nella lista di vertebrati delle breccie data dal Rutimeyer in Gastaldi *Intorno ad alcuni fossili del Piemonte e della Toscana*, trovo registrata unicamente un'Aquila (pag. 28 dell'estratto) della grandezza dell'Aquila fulva. Ritengo però impossibile che fra i materiali già stati esportati e quelli ancora in posto in quell'isola non si abbiano a trovare gli elementi per costituire una lista di uccelli almen tanto ricca quanto per la Sardegna o la nostra costa Ligure.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. 1. Estremità inferiore della tibia di *Palaeogrus princeps* veduta anteriormente — Gr. Nat.
» 2. La stessa veduta posteriormente.
» 3. La stessa veduta di fianco.
» 4. La stessa veduta dalla faccia inferiore.
» 5. Lastra di marna portante le ossa di *Chenorois graculoides* — Gr. Nat.

1. Falange del piede.
2. Porzione della fibula sinistra.
3. Falange del piede.
4. Porzione della tibia sinistra.
5. Falange ungueale dell'ala.
6. Tarso-metatarseo.
7. Falange del piede.
8. Falange del piede.
9. Radio destro.
10. Cubito destro.
11. Impronta della porzione prossimale del metacarpo destro.
12. Omero destro.
13. Vertebra cervicale.
14. Estremità distale del tarso-metatarseo sinistro.
15. Frammento di costa sternale.
16. Porzione di costa sternale.
17. Estremità distale del radio sinistro.
18. Porzione di costa vertebrale destra.
19. Falange del piede.
20. Porzione di costa sternale.

Tavola II.

Grus turfa Portis

Gr. $\frac{2}{3}$ del vero.

Fig. 1. Tarso-metatarseo.
» 2. Tibia.
» 3. Fibula.
» 4. Femore.
» 5. Porzione del pelvi (Fig. 1-5 lato sinistro dell'animale).
» 6. Coracoide.
» 7. Scapola.

Fig. 8. Omero.
» 9. Cubito.
» 10. Radio.
» 11. Carpo (Fig. 6-11 Ala sinistra).
» 12. Vertebra cervicale
» 13. Vertebra dorsale.
» 14-15. Cuspidi di lancie trovate assieme alla *Grus turfa*.

Fig. 1

Fig. 3

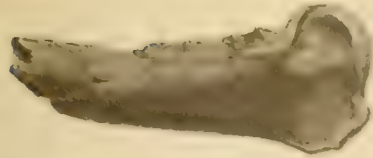



Fig. 2

Fig. 4

Fig. 5

Torino, Fotolit. F.lli Doyen

Fig. 1.4. Palaeogrus princeps – Portis
Fig 5. Chenornis graculoides – Portis

Fig. 1-13, Grus turfa — Portis

SULLA CONDUCIBILITÀ ELETTRICA DELLE SOLUZIONI ALCOOLICHE DI ALCUNI CLORURI

STUDIO SPERIMENTALE

DEL

Dottor GIUSEPPE VICENTINI

Approvato nell'adunanza 25 Maggio 1884

La conducibilità elettrica delle soluzioni acquose di molti sali ha formato oggetto di accuratissimi studi, specialmente dopo che coll'uso delle correnti alternate la determinazione della resistenza degli elettroliti si può fare colla stessa facilità e precisione di quella dei conduttori metallici.

La conoscenza della conducibilità elettrica dei sali disciolti nell'acqua e delle leggi che la governano è d'una reale importanza dal punto di vista delle molte deduzioni teoriche che se ne possono cavare, tanto nel campo dei fenomeni elettrolitici, quanto in quello delle ipotesi sulla costituzione molecolare dei corpi. Le molte ricerche fatte su tale argomento hanno già servito a stabilire nettamente l'influenza che esercitano sulla conducibilità elettrica delle soluzioni acquose, la natura chimica dei corpi disciolti, il vario grado di concentrazione e le variazioni di temperatura ; ed il Kohlrausch (1) in base ai risultati delle proprie esperienze e di quelle di altri, ha mostrato come per i sali studiati, noti che sieno i numeri di trasporto degli ioni per determinate loro soluzioni, si possa a priori calcolare con grande approssimazione il valore della conducibilità di esse.

Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni dei sali nell'alcool etilico non si sono fatte ancora grandi ricerche; non sono a mia conoscenza che una serie di esperienze di G. Guglielmo (2) dirette allo studio della conducibilità delle soluzioni di KOH in alcool assoluto ed alcune altre serie più estese di esperienze fatte da R. Lenz (3) e da C. Stephan (4), su soluzioni di vari sali in mescolanze di acqua ed alcool.

---

(1) F. Kohlrausch, *Wiedemann's Annalen*, Bd. VI, H. n. 2, 1879.

(2) G. Guglielmo, *Sull'uso dell'Elettrometro nella misura della resistenza dei liquidi*, ecc. Atti della R. Acc. Scienze. Torino, V. XVII, aprile, 1882.

(3) R. Lenz, *Mémoires de l'Ac. Imp. des Sciences de St-Pétersbourg*. S. VII, t. XXX, n. 9, 1882.

(4) C. Stephan, *Wiedemann's Annalen*; Bd. XVII, H. n. 12, 1882.

Mi proposi perciò di studiare la conducibilità elettrica delle soluzioni di varie sostanze nell'alcool assoluto. In questa prima nota comunico i risultati relativi ad un certo numero di cloruri. Per la poca solubilità posseduta in genere dai sali in questo liquido, ho dovuto limitare le ricerche a soluzioni molto diluite. Ciò però non menoma l'interesse che potessero avere i risultati finali, valendo per le soluzioni diluite le leggi generali che governano tutta la categoria dei fenomeni che vanno studiati assieme a quello della resistenza degli elettroliti.

In generale è ammesso che il potere conduttivo delle soluzioni sia dovuto ai corpi che esse contengono e che la conducibilità del solvente sia nulla di fronte a quella delle soluzioni stesse; il passaggio della corrente attraverso ad esse sarebbe dovuto al fenomeno della elettrolisi dei corpi disciolti, servendo gli ioni al trasporto della elettricità da un punto all'altro del liquido. Sotto questo punto di vista la resistenza opposta dagli elettroliti al passaggio della corrente è la conseguenza dell' attrito che gli ioni soffrono nel mezzo in cui si muovono, vale a dire contro le molecole del solvente e quelle del sale disciolto. La conducibilità elettrica di una soluzione salina dipende quindi intimamente dalla natura degli ioni che si formano per effetto della elettrolisi, da quella del solvente e del corpo disciolto, nonchè dal grado di concentrazione della soluzione.

Il fatto constatato in generale per le soluzioni acquose di molte sostanze, che a un determinato grado di concentrazione, diverso per i differenti sali, raggiungono un massimo di conducibilità, mostra che il graduale aumento della conducibilità dell'elettrolito per il numero ognor crescente degli ioni che prendono parte al trasporto della elettricità, viene ad un certo punto superato dal rapido accrescimento dell'attrito ch'essi incontrano per la maggior quantità di sale disciolto.

A prima vista potrebbe sembrare che per corrispondenti soluzioni saline in liquidi diversi, dovessero esistere delle relazioni abbastanza semplici fra la conducibilità elettrica e la natura del solvente; quando si pensi però che i solventi possono agire in modo diverso sulle sostanze disciolte, sia producendo una semplice disaggregazione delle molecole, sia entrando pur essi in intima connessione colle stesse, formando speciali e più o meno complicati aggruppamenti molecolari, si arguisce già a priori come difficilmente possa verificarsi qualche relazione semplice fra la conducibilità delle soluzioni di diversi sali, fatte in identiche condizioni, con differenti solventi.

La condizione più opportuna per uno studio comparato della conducibilità elettrica dei vari elettroliti è quella di una grande diluizione delle soluzioni, perchè allora le ricerche sono limitate a liquidi di cui alcune proprietà fisiche, quali la densità e la fluidità, sono pressochè identiche. Uno studio accurato di R. Lenz (1) sulle soluzioni acquose diluitissime di molti sali, ha portato a conclusioni abbastanza generali, e più recentemente esperienze di Bouty (2) limitate a soluzioni estremamente diluite, avrebbero condotto a constatare leggi della massima semplicità e di grande importanza.

---

(1) R. LENZ, *Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St-Pétersbourg.* S. VII, t. XXVI, n. 3, 1878.

(2) E. BOUTY, Paris, *Académie des Sciences,* séances 21 janv., 11 févr., 13 mars 1884.

Le esperienze che riporto nella presente nota si riferiscono a 35 soluzioni nell'alcool assoluto di vari cloruri, e servono già alla deduzione di alcune conclusioni d'ordine generale sulla conducibilità elettrica delle soluzioni alcooliche.

Metodo seguito nelle esperienze.

Per determinare la resistenza elettrica delle soluzioni alcooliche da me studiate ho seguito il metodo dapprima usato da Kohlrausch, consistente nell' impiego della solita disposizione del ponte di Wheatstone coll'uso di correnti alternate prodotte da un piccolo rocchetto d'induzione a nucleo massiccio.

Non ho però usato l'ordinario elettrodinamometro di Weber, ma ricorsi a quello più semplice e di più facile maneggio proposto dal Bellati (1) per lo studio di deboli correnti alternate ed il cui principio richiamo qui colle parole stesse dell'autore.

« Si immagini che l'ago magnetico di un galvanometro a riflessione venga sostituito da un pezzetto di filo di ferro il quale possa oscillare in piano orizzontale e nella sua posizione di equilibrio sia normale al meridiano magnetico. In tali condizioni quel piccolo filo di ferro è sottratto all'influenza magnetica terrestre, e se esso è di buona qualità e fu ben ricotto, non presenta alcuna traccia di polarizzazione magnetica. Si immagini poi che il piano delle spire del filo avvolto sul telaio formi un angolo di 45° col meridiano magnetico e che si faccia passare nel filo di rame una corrente: qualunque ne sia la direzione, essa ne magnetizza temporaneamente l'asticciuola di ferro e tende a portarla in direzione normale al piano delle spire; quindi anche se le correnti sono alternate la deviazione del filo di ferro ha sempre luogo nel medesimo senso come avviene per il rocchetto mobile di un elettrodinamometro comune.

« La semplicità di questo apparecchio proviene dall'aver soppresso il rocchetto interno dei soliti elettrodinamometri ed il complicato sistema di sospensione che l'accompagna. L'ufficio del rocchetto interno è invece fatto dalla breve asticciuola di ferro dolce che può venire sospesa per mezzo di un unico filo di poca torsione o di un doppio filo a sistema bifilare. La leggerezza di tutta la parte mobile contribuisce a rendere lo strumento assai pronto e sensibile ».

Dopo vari tentativi per costruire un apparecchio di questo genere, dotato di sensibilità adatta alla qualità delle mie esperienze, ho trovato comodo sostituire al sistema astatico, di un ordinario galvanometro del Nobili, un fascetto di nove fili di ferro aventi il diametro di 0,7 mm. e la lunghezza di 35 mm., che ho scelti fra il miglior ferro dolce che mi fu dato trovare, arroventato ripetutamente e lasciato raffreddare colla maggior lentezza. Questo fascetto è portato da un filo di rame sottilissimo, al quale è unito rigidamente un piccolissimo ago calamitato; il fascetto e l'ago sono entrambi orizzontali e giacciono in piani verticali perpendicolari l'uno all'altro. Tutto il sistema è sospeso mediante un filo di bozzolo, ed il piccolo ago magnetico è destinato a tenere il fascetto di fili di ferro costantemente in piano normale a quello del meridiano magnetico; è però molto discosto dal telaio, in modo da non

(1) M. Bellati, *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, T. I, S. VI. febb. 1883.

sentire l'influenza delle correnti che ne devono attraversare il filo. Nel piano verticale del fascetto di fili di ferro è inoltre fissato un lungo, sottile, leggerissimo indice, che segna sopra un quadrante diviso in gradi, le oscillazioni dell'intero sistema magnetico. Il disco graduato è disposto in tal modo, sopra il telaio, che quando l'indice segna 45°, il piano dell'indice e del fascetto di fili, forma un angolo di 45° colla direzione delle spire del filo del telaio. Per tutto il tempo che l'istrumento non venne smosso dalla posizione iniziale, allo stato di riposo l'indice si mantenne costantemente in corrispondenza alla divisione di 45°, indicando per tal modo che il sistema di fili di ferro non è mai stato magnetizzato dalle correnti fatte passare attraverso al filo dell'istrumento. Il piccolissimo ago, destinato a tenere in posizione fissa ed opportuna il fascio di fili, è dotato di momento magnetico così debole, che sarebbe bastata la più lieve traccia di magnetismo residuo nel fascetto di fili di ferro dolce, se questo fosse stato assoggettato all'azione di correnti troppo intense, per vincere la forza direttrice esercitata dalla terra sull'ago, e per cambiare quindi la posizione di equilibrio del sistema. Di ciò ebbi la prova con vari fascetti impiegati nei primi tentativi.

Le correnti che faccio passare nel filo di rame di questo semplicissimo elettrodinamometro non producono mai deviazioni maggiori di 3 o 4 gradi. Facendo uso d'una slitta di Du Bois Reymond, come apparecchio d'induzione, è facile evitare il pericolo di lanciare attraverso all'elettrodinamometro correnti troppo intense. Di fatti dopo aver acquistata una certa pratica ed usando un po' di precauzione, nel corso delle esperienze non mi accadde mai di far attraversare l'apparecchio da correnti di intensità tale da lasciare qualche traccia di magnetizzazione nel fascetto di fili di ferro.

Dopo preparato questo semplice elettrodinamometro ne ho studiato il comportamento servendomi di esso per determinare delle resistenze metalliche note, di diversa grandezza. Esso ha mostrato di funzionare benissimo, dando, entro i limiti della propria sensibilità, risultati sempre concordanti fra di loro ed esatti. Poichè nella misura delle resistenze mi valgo della disposizione del ponte di Wheatstone, dovendo l'elettrodinamometro servire ad indicare quando la corrente si annulla nel reoforo in cui è inserito, funziona più che altro da elettrodinamoscopio.

Due rami del quadrilatero di Wheatstone contengono due resistenze perfettamente eguali, ciascuna del valore di 751,75 U. S., preparate dal dott. G. Guglielmo per altri suoi studi e da lui determinate accuratamente. In uno degli altri due lati del quadrilatero si trova inserita la soluzione da studiare; nell'ultimo finalmente la resistenza variabile fornita da un reostato di Siemens, costituito da una serie completa di resistenze da 0,1 a 5000 U. S. Nei casi in cui la resistenza da misurare è superiore a 5000 U. S., sostituisco ad una delle resistenze di 751,75 U. S. un'altra alquanto minore.

La condizione dell'annullamento della corrente nel ramo contenente l'elettrodinamometro la determino sempre in base a piccolissime oscillazioni (da 0°,6 a 0°,9) prodotte da due resistenze del reostato, che comprendono il valore della resistenza incognita.

Osservo le deviazioni dell'indice dell'elettrodinamometro mediante lente di ingrandimento munita di tubo con opportuni diaframmi per togliere ogni errore di parallasse nelle letture.

Le soluzioni alcooliche assoggettate alla esperienza, sono poste in tubi ad U della forma di quelli già usati dal Kohlrausch, dei quali ho determinata colla massima cura la capacità di resistenza, vale a dire la resistenza che offrirebbero se fossero pieni di mercurio a 0°. Gli elettrodi impiegati sono costituiti da dischi di argento platinato e mediante tappi di sovero vengono introdotti nel tubo fino a che i loro orli coincidono con segni tracciati con acido fluoridrico tutto all'ingiro dei due rami aperti del tubo stesso. Come Kohlrausch ha dimostrato, la platinazione degli elettrodi serve a sopprimere le ultime traccie di polarizzazione, senza bisogno di ricorrere ad elettrodi di grandissima superficie.

Per determinare la capacità di resistenza dei vasi adoperati, ho impiegato una soluzione di solfato di zinco puro, della quale ho determinato scrupolosamente la resistenza specifica. Ho preso perciò un tubo di vetro lungo 60 cm. e del diametro di oltre 16 mm. e lo ho diviso in mm. per tutta la sua lunghezza a mezzo della macchina divisoria, indi lo ho calibrato con mercurio in maniera da conoscerne il diametro in ogni suo punto. Chiuso alle estremità mediante tappi forati di gomma, possono venire spinti nel suo interno due elettrodi di zinco amalgamato, saldati ad aste metalliche circondate completamente da un cannello di vetro. Mercè questo tubo riempito colla soluzione campione di solfato di zinco e posto in apposito bagno d'acqua continuamente agitato e mantenuto a temperatura costante, ho determinato coll'impiego di correnti alternate, la resistenza R di una colonna liquida di lunghezza l e di sezione s note e quindi la conducibilità k

$$k = \frac{l}{R \cdot s}$$

della soluzione di solfato di zinco a varie temperature.

Conosciuta la conducibilità della soluzione di solfato di zinco, ho determinata la capacità di resistenza dei vasi destinati allo studio delle soluzioni alcooliche, misurando la resistenza offerta in essi dalla soluzione campione a una determinata temperatura, quando gli elettrodi si trovano nella posizione fissata come dissi più sopra.

Per un tubo (A) trovai la capacità di resistenza eguale a

$$149,5 \cdot 10^{-5} \text{ U. S.}$$

media delle tre determinazioni

149,4 149,4 149,7

per un altro (B) mi risultò eguale a

$$768,5 \cdot 10^{-7} \text{ U. S.}$$

pure media delle tre determinazioni

769,4 768,1 767,7

Questi numeri danno un'idea della approssimazione che posso ottenere col mezzo dell'elettrodinamometro impiegato.

Per fare vedere come in queste determinazioni l'effetto della polarizzazione è assolutamente trascurabile, faccio notare che il valore 149,4, che si riferisce alla

prima determinazione fatta pel vaso A, lo ho ottenuto servendomi di elettrodi di zinco amalgamato, gli altri due valori 149,4 e 149,7, impiegando gli elettrodi di argento platinato.

In queste determinazioni come nelle seguenti, l'apparecchio d'induzione è tenuto a distanza notevole dall'elettrodinamometro, sicchè non possa agire per influenza sul piccolo ago magnetico di questo.

Corpi studiati.

Le soluzioni da me assoggettate alla esperienza sono fatte con alcool assoluto proveniente dalla casa Kahlbaum di Berlino. La sua densità a 18° la ho trovata espressa da 0,79175; calcolando dalle tabelle di Mendelejeff la densità dell'alcool assoluto a 18° essa si trova eguale a 0,79116.

I sali, tutti purissimi ed anidri, sono stati procurati dalla casa Trommsdorf di Erfurt. Viene accennato in seguito al modo col quale taluno fu trattato prima di essere portato in soluzione.

Per la mancanza di dati precisi sulla solubilità dei vari sali nell'alcool assoluto, allo scopo di prepararmi alla temperatura ordinaria soluzioni più concentrate possibili, immergo sempre nell'alcool una quantità di sale eccedente e vo' agitando il liquido molto di frequente.

Nella preparazione delle soluzioni ho l'avvertenza di usare la massima celerità, per modo che l'alcool ed i sali igroscopici non abbiano a rimanere che per qualche istante al contatto dell'aria esterna, dalla quale assorbono rapidamente il vapor di acqua. I recipienti che impiego ho attenzione di lavare ripetutamente con acqua indi con alcool e li asciugo riscaldandoli ad alta temperatura e facendo arrivare nel loro interno una forte corrente di aria. Anche gli elettrodi, per ogni nuova soluzione vengono lavati e diligentemente asciugati.

I sali da me studiati sono i seguenti: $Li\,Cl$, $NH_4\,Cl$; $Ca\,Cl_2$, $Mg\,Cl_2$, $Zn\,Cl_2$, $Cd\,Cl_2$, $Cu\,Cl_2$. Le soluzioni le ho analizzate col metodo volumetrico di Gay-Lussac per alcuni sali; con quello di Volhard (1) per quelli, ai quali il primo non è applicabile.

Per ogni sale l'analisi è limitata alla prima soluzione preparata come dissi in antecedenza; le soluzioni a minor grado di concentrazione le preparo mediante pesate.

Anche nelle pesate ho sempre cura di operare in maniera che l'aria atmosferica non venga a contatto delle soluzioni per una superficie troppo estesa e per tempo troppo lungo. Trattandosi di analizzare una soluzione, tiro alla lampada i due capi di un tubo di vetro, nel quale aspiro una determinata quantità della soluzione stessa; ciò fatto saldo rapidamente una delle estremità affilate del tubo. Porto poscia il tubo sul piatto di una bilancia della quale stabilisco l'equilibrio mediante tara. Scaccio quindi una parte della soluzione che raccolgo in un vaso da precipitati di Erlenmeyer, indi riporto il tubo sulla bilancia, ristabilendone l'equilibrio mediante pesi numerati.

---

(1) I. Volhard, *J. Liebig's Annalen der Chemie.* Bd. CXC, S. 1.

Ripetendo l' operazione preparo tre porzioni di soluzione, il peso delle quali rimane esattamente determinato, e che sono pronte per essere analizzate.

Per preparare invece le soluzioni di minor grado di concentrazione opero nella seguente maniera. Metto una boccia vuota e tappata sul piatto della bilancia assieme ad un certo numero di pesi rappresentanti presso a poco la quantità di soluzione da preparare, e stabilisco l'equilibrio mediante tara. In questa boccia verso rapidamente una porzione della soluzione della quale già conosco il contenuto procentuale p di sale e per ristabilire l'equilibrio nella bilancia levo un certo numero di pesi P che corrisponde al peso della soluzione introdotta. Dopo ciò aggiungo la quantità d'alcool che reputo necessaria e di nuovo ristabilisco l'equilibrio levando dal piatto un altro numero P_1 di pesi. Preparo in tal modo una quantità $P+P_1$ di soluzione che contiene $\frac{p \cdot P}{100}$ grammi di sale ed il di cui contenuto procentuale è dato da

$$p_1 = \frac{p \cdot P}{P+P_1} \; .$$

Di ogni soluzione determino la densità a temperatura prossima ai 18°. Mi valgo all'uopo di un tubo Sprengel (1) del volume interno di circa 13 cm^3. La temperatura alla quale rimane riempito di soluzione è ottenuta con apposito bagno.

Nella preparazione di alcune soluzioni il sale resta in parte sospeso in seno all'alcool rendendolo torbidiccio. In tal caso filtro la soluzione valendomi di un imbuto, ad orlo smerigliato, coperto con lastra di vetro pure smerigliata, in modo che non vi sia comunicazione diretta fra l'alcool e l' aria ambiente. Il collo dell' imbuto lo spingo molto all'indentro nella boccia destinata a raccogliere il filtrato, avvolgendolo con bambagia che caccio fra esso ed il collo della boccia. Noto in seguito quali soluzioni ho dovuto filtrare.

La determinazione delle resistenze viene fatta nel vaso B (capacità di resistenza $768{,}5 \cdot 10^{-10}$) in causa della grandissima resistenza delle soluzioni alcooliche. Il vaso si tiene sempre in un bagno ad acqua. I tappi di sovero che lo chiudono ed attraverso ai quali passano le aste degli elettrodi, protette da cannelli di vetro, entrano a sfregamento nel tubo, gli orli del quale spalmo di cera fusa, allo scopo di impedire tanto l'evaporazione dell'alcool, quanto l'assorbimento del vapor d'acqua. Per schivare l'aumento di pressione nell' interno al crescere della temperatura, pratico però ogni volta attraverso allo strato di cera ed al sovero un foro, mediante un ago assai sottile. Le osservazioni sono fatte a tre diverse temperature comprese fra zero e trenta gradi. Il bagno è di tale grandezza da non essere influenzato troppo rapidamente dalle variazioni della temperatura ambiente; l'acqua è rimescolata continuamente mediante agitatore e la temperatura è letta di frequente con un cannocchiale, su di un termometro diviso in quinti di grado, studiato alle due temperature fisse di 0° e 100°. Nelle determinazioni a temperatura ordinaria, la temperatura del bagno varia appena di qualche centesimo di grado; per temperature più alte la variazione non oltrepassa

(1) H. Sprengel, *Poggendorff's Annalen*, B. CL, S. 459, 1873.

quasi mai il decimo di grado. Per ogni determinazione prendo la media delle varie temperature lette, ed il valore della resistenza delle soluzioni risulta sempre, per ogni temperatura, dalla media di 4 o 5 determinazioni. Nei rari casi in cui la temperatura varia di un paio di decimi di grado, faccio tre o quattro determinazioni corrispondenti all'andamento crescente di temperatura, indi altrettante nel periodo opposto. Le osservazioni alla temperatura di zero gradi sono fatte mettendo il vaso di resistenza in opportuno apparecchio, dove lo circondo con grande cura di ghiaccio frantumato, ed in esso lo lascio circa una mezz'ora prima di incominciare le osservazioni.

Risultati delle esperienze.

Nelle seguenti tabelle sono raccolti i dati relativi alle determinazioni eseguite sulle varie soluzioni alcooliche. In esse si trovano indicati: il contenuto procentuale p, cioè la quantità in grammi di sale contenuta in 100 grammi di soluzione; le densità d delle soluzioni alle temperature di t°; la resistenza R alla temperatura t_1°, espressa in U. S., ed in fine il corrispondente valore della conducibilità k dedotto in base alla espressione

$$k = \frac{c}{R}$$

c essendo la capacità di resistenza del vaso impiegato. La conducibilità è quindi riferita a quella del mercurio e nelle tabelle dò il suo valore moltiplicato per 10^{10} allo scopo di evitare l'uso di un numero troppo grande di zeri.

Cloruro di litio.

Il cloruro di litio perfettamente anidro aggiunto a varie riprese nell' alcool, si discioglie dapprincipio con grande celerità. La soluzione contenente un eccesso di sale, agitata di frequente nel corso di due giorni, si mostra torbidiccia tenendo in sospensione la parte indisciolta di sale. Filtrata colle precauzioni accennate ed analizzata col metodo di Gay-Lussac, risulta contenere il 13,597 $\%$ di sale. Ha un aspetto oleoso, quantunque la sua densità sia abbastanza piccola. Le soluzioni 1 e 2 non le ho studiate a 0^0 nel dubbio che l'abbassamento di temperatura troppo grande potesse precipitare una parte del sale disciolto.

Tabella I. — *Li Cl*

n°	p	d	t°	R	t_1°	$k_{t_1} \cdot 10^{10}$
1.	13, 597	0, 90373	18°,62			
				174, 9	16°,79	4393, 9
				141, 7	25 ,55	5423, 4
				125, 3	30 ,55	6133, 3
2.	10, 487	0, 87629	18°,07			
				171, 7	14°,23	4475, 8
				145, 0	20 ,83	5300, 0
				122, 2	28 ,14	6288, 9
3.	7, 369	0, 85275	18°,59			
				244, 1	0°,00	3148, 3
				169, 7	14 ,75	4528, 6
				132, 7	25 ,60	5791, 3
4.	5, 351	0, 83771	17°,89			
				259, 3	0°,00	2963, 7
				170, 5	18 ,37	4507, 3
				146. 2	25 ,63	5256, 5
5.	3, 404	0, 82139	18°,89			
				307, 0	0°,00	2499, 2
				208, 4	18 ,22	3687, 6
				180, 0	25 ,76	4269, 4
6.	1, 453	0, 80524	18°,87			
				479, 6	0°,00	1602, 3
				340, 1	18 ,39	2259, 6
				300, 4	25 ,49	2558, 3
7.	0, 710	0, 79878	18°,58			
				755, 2	0°,00	1017, 6
				544, 2	18 ,37	1412, 2
				482, 0	25 ,93	1594, 4
8.	0, 380	0, 79588	18°,64			
				1161, 3	0°,00	661, 8
				848, 8	18 ,00	905, 4
				751, 3	25 ,70	1022, 9
9.	0. 218	0, 79523	18°,09			
				1753, 0	0°,00	438, 8
				1262, 4	18 ,78	608, 8
				1143, 4	25 ,02	672, 1

Cloruro di Ammonio.

Il sale che ho adoperato è purissimo e se si fa volatilizzare sopra una lamina di platino non lascia nessun residuo. Sciolto però in abbondanza nell'acqua, comunica ad essa una reazione acida abbastanza sensibile. Allo scopo di allontanare ogni traccia di acidità lo ho fatto ricristallizzare sciogliendolo in acqua distillata; lo ho quindi essiccato tenendolo in un bagno ad aria a temperatura inferiore ai 60° per un paio di giorni. Dopo tale trattamento disciogliendolo nell'acqua, la soluzione non mostrava traccia sensibile di acidità. Questo sale è pochissimo solubile nell'alcool assoluto. La soluzione ottenuta, analizzata col metodo di Gay-Lussac, risulta contenere solamente 0,603 % di sale.

Tabella II. — $NH_4\ Cl$

n^o	p	d	t^o	R	t_1^o	$k_{t_1}.10^{10}$
10.	0, 603	0, 79417	18°,42			
				1913	0°,00	841, 7
				727	13 ,61	1057, 1
				616	25 ,23	1247, 6
11.	0, 373	0, 79314	18°,48			
				1304	0°,00	589, 5
				987	17 ,33	778, 6
				879	25 ,39	874, 3
12.	0, 171	0, 79211	18°,55			
				2464	0°,00	311, 9
				1890	16 ,68	406, 6
				1650	25 ,54	465, 8

Cloruro di Calcio.

Introducendo nell'alcool un eccesso di cloruro di calcio fuso, purissimo, esso in parte si discioglie, ed in parte, dopo qualche tempo, rimane sospeso nel liquido, al quale comunica un aspetto lattiginoso. Per facilitare la soluzione del sale ho tenuto il recipiente per poco tempo in acqua riscaldata presso i 40°. La soluzione, filtrata come al solito ed analizzata con ambedue i metodi di Gay-Lussac e Volhart mostra contenere il 5, 64 % di sale.

Tabella III. — $Ca\ Cl_2$

n^o	p	d	t^o	R	$t_1{}^o$	$k_{t_1} . 10^{10}$
13.	5, 64	0, 83303	18°,39			
				873, 2	0°,00	880, 3
				711, 1	15 ,13	1080, 7
				678, 8	18 ,80	1113, 5
				616, 5	25 ,68	1246, 5
14.	3, 65	0, 81904	18°,39			
				1054	0°,00	729, 1
				851, 3	16 ,60	902, 7
				767, 9	25 ,85	1000, 8
15.	2, 47	0, 81001	18°,45			
				1278	0°,00	601, 1
				1044	16 ,66	736, 2
				949	25 ,94	809, 7
16.	1, 21	0, 80081	18°,82			
				1869	0°,00	411, 2
				1527	18 ,46	503, 3
				1425	25 ,54	539, 3
17.	0, 64	0, 79694	18°,78			
				2734	0°,00	281, 1
				2326	15 ,57	330, 3
				2106	25 ,62	364, 9
18.	0, 27	0, 79423	18°,40			
				4799	0°,00	160, 1
				3942	17, 34	194, 4
				3575	25 ,75	215, 0

Cloruro di Magnesio.

Il cloruro di magnesio anidro lo ho ricavato dal cloruro cristallizzato purissimo, seguendo il solito metodo di preparazione, consistente nel trasformarlo dapprima in cloruro doppio di magnesio e ammonio; e nel fare poscia volatilizzare il cloruro d'ammonio, arroventando il cloruro doppio, in crogiuolo di platino, fino a fusione completa. Col cloruro di magnesio anidro, fuso, così ottenuto, ho preparato analogamente agli altri sali una soluzione che ho dovuto filtrare per allontanare l'eccesso di sale rimasto in sospensione. Analizzata col metodo di Volhart risulta contenere solo il 0,807 % di sale

Tabella IV. — $Mg\ Cl_2$

n°	p	d	t°	R	t_1°	$k_{t_1}.10^{10}$
19.	0, 887	0, 79978	18°,80			
				1686	0°,00	455, 8
				1391	16 ,17	552, 5
				1263	25 ,40	608, 5
20.	0, 471	0, 79631	17°,79			
				2593	0°,00	296, 4
				2055	15 ,24	374, 0
				1859	24 ,81	413, 4
21.	0, 299	0, 79444	18°,39			
				3481	0°,00	220, 1
				2781	14 ,73	276, 3
				2488	25 ,24	308, 9

Cloruro di Zinco.

Anche il cloruro di zinco fuso, purissimo, posto in eccesso nell'alcool assoluto in parte si discioglie ed in parte rimane in sospensione in modo che agitando la soluzione essa assume un aspetto lattiginoso. Ho filtrata la soluzione, che, analizzata col metodo di Volhard, risulta contenere il 7,327 $^0\!/_0$ di sale.

Tabella V. — $Zn\ Cl_2$

n°	p	d	t°	R	t_1°	$k_{t_1}.10^{10}$
22.	7, 327	0, 84991	15°,29			
				2150	0°,00	357, 4
				1643	14 ,21	467, 7
				1526	18 ,31	503, 6
				1334	25 ,89	576, 1
23.	5, 54	0, 83679	14°,76			
				2728	0°,00	281, 7
				2082	14 ,07	369, 1
				2030	15 ,65	378, 6
				1900	19 ,46	404, 5
				1723	25 ,07	446, 0
24.	4, 02	0, 82460	15°,03			
				3609	0°,00	212, 9
				2682	16 ,08	286, 5
				2510	19 ,72	306, 2
				2295	25 ,12	334, 8
25.	1, 69	0, 80884	15°,45			
				6599	0°,00	116, 5
				4895	16 ,35	157, 0
				4250	25 ,03	180, 8

Cloruro di Cadmio.

Il cloruro di cadmio anidro, introdotto nell'alcool assoluto sembra disciogliersi con grande rapidità, ma invece rimane semplicemente sospeso in esso; se la soluzione è lasciata in riposo, il sale sospeso si separa sotto forma di fiocchi in uno strato voluminoso. La soluzione è analizzata col metodo di Volhard; contiene 1,65 % di sale.

Tabella VI. — $Cd\ Cl_2$

n^o	p	d	t^o	R	t_1^o	$k_{t_1} . 10^{10}$
26.	1, 65	0, 80595	16°,61			
				8356	0°,00	92, 0
				6403	15 ,50	120, 0
				5458	25 ,69	140, 8
27.	0, 865	0, 79894	18°,17			
				13592	0°,00	56, 5
				10749	15 ,09	71, 5
				9374	24 ,52	82, 0

Cloruro Ramico. — $Cu\ Cl_2$.

Il cloruro di rame anidro, di color bruno, si discioglie nell'alcool con grandissima rapidità, anzi con sensibile aumento di temperatura e forma una soluzione di un color verde cupo a riflessi metallici; fra i sali da me finora studiati è quello che si scioglie in maggior quantità nell'alcool assoluto. Molto probabilmente il cloruro ramico disciogliendosi nell'alcool forma con esso un qualche composto molecolare di costituzione complessa. Lasciando la soluzione concentrata a temperatura un po' bassa, oppure esponendone una certa quantità in tubo d'assaggio aperto, si depongono dei magnifici gruppi di cristallini aghiformi, d'un bellissimo verde splendente, che colla lentissima loro idratazione nell'aria atmosferica, passano, dopo molto tempo, ad un colore bianco lievemente azzurrognolo.

Come è già noto, molti sali sciogliendosi nell'alcool formano con esso combinazioni molecolari complesse, come ad es.: il cloruro di zinco, quello di calcio ed altri, e taluni di questi composti furono studiati già da molto tempo da Th. Grahm (1).

La soluzione di cloruro ramico da me preparata contiene il 37,37 %. La solubilità del cloruro ramico nell'alcool assoluto supera quindi di molto quella dei cloruri antecedenti.

Le prime cinque soluzioni di questo sale non le ho studiate alla temperatura di 0° per schivare il pericolo che il sale avesse a depositarsi.

(1) Th. Graham, *Poggendorff's Annalen*, Bd. XV, S. 150.

Tabella VII. — $Cu\ Cl_2$

n°	p	d	t°	R	t_1°	$k_{t_1}.10^{10}$
28.	37, 37	1. 1956	18°,89	541, 1	15°,09	1420, 2
				452, 1	20 ,28	1699, 8
				334, 2	29 ,67	2298, 1
29.	30, 45	1, 0982	18°,18	480, 6	14°,12	1599, 1
				377, 5	22 ,35	2035, 8
				310, 0	29 ,79	2479, 0
30.	19, 973	0, 97354	18°,53	514, 1	14°,64	1494, 8
				433, 8	21 ,94	1771, 5
				365, 1	29 ,80	2104, 9
31.	12, 467	0, 89859	18°,74	704, 6	14°,96	1090, 7
				612, 5	22 ,05	1254, 7
				527, 2	29 ,94	1457, 7
32.	8, 000	0, 85834	18°,39	1021, 0	15°,35	752, 7
				903, 0	22 ,41	851, 0
				798, 6	29 ,38	962, 3
33.	4. 763	0, 83123	17°,85	2004	0°,00	383, 5
				1622	14 ,99	473. 8
				1384	25 ,70	555, 3
34.	2, 36	0, 81075	18°,52	3251	0°,00	236, 4
				2723	17 ,20	282, 2
				2465	25 ,31	311, 8
35.	0, 928	0, 80040	17°,73	6503	0°,00	118, 2
				5514	15 ,41	139, 4
				4965	25 .72	154, 8

Coi valori delle tabelle antecedenti ho costruito il seguente quadro, nel quale si trovano notate le conducibilità delle soluzioni alle tre temperature di 0°, 18° e 25°. Nella colonna segnata m sono espressi i numeri relativi delle molecole di sale contenute nell'unità di volume delle soluzioni. Questi numeri sono calcolati in base alla grandezza della molecola elettro-chimica, che si ottiene dividendo il peso della molecola chimica per il numero delle affinità vinte nella sua decomposizione per effetto della elettrolisi. Per i corpi da me studiati i valori della molecola elettro-chimica si ottengono tosto dalle seguenti formole:

$$Li\,Cl,\ NH_4\,Cl;\ \frac{1}{2}\,(Ca\,Cl_2),\ \frac{1}{2}\,(Mg\,Cl_2),\ \frac{1}{2}\,(Zn\,Cl_2),\ \frac{1}{2}\,(Cd\,Cl_2),\ \frac{1}{2}\,(Cu\,Cl_2).$$

I valori di m calcolati per la temperatura di 18° si hanno deducendo in base al contenuto procentuale p della soluzione e del suo peso specifico s alla temperatura di 18°, il numero di milligrammi di elettrolito contenuti in un centimetro cubo di soluzione e dividendo questo per il peso A della molecola elettro-chimica della sostanza, calcolato come è accennato più sopra. Vale per ciò la formola:

$$m = 10\,\frac{p\,.\,s}{A}\,.$$

Dopo le prime esperienze di Kohlrausch, la conducibilità degli elettroliti venne sempre riferita ai 18°; è per questo che riduco anche i miei risultati a questa temperatura per maggior facilità di confronto.

Nella colonna d_{18} ho registrato la densità delle soluzioni alla temperatura di 18°. Siccome sperimentalmente determino sempre la densità delle soluzioni a temperatura prossima ai 18°, così nella riduzione opero analogamente a quanto fece Kohlrausch per le soluzioni acquose, assumendo per coefficienti di dilatazione delle soluzioni (che sono in generale molto diluite) quelli dell'alcool assoluto. Mi valgo perciò dei coefficienti:

$$a = 0{,}001033$$
$$b = 0{,}00000145\,,$$

dati da Recknagel (1) per l'alcool a 99,3 nei limiti di temperatura $-39°, +27°$.

Nelle tre colonne successive k_0, k_{18}, k_{25} le conducibilità alle tre temperature di 0°, 18°, e 25°, sono al solito moltiplicate per 10^{10}.

I valori di k_0 sono dati dalla diretta esperienza; quelli corrispondenti a k_{18} e k_{25} li ho calcolati in base alle determinazioni fatte a temperature diverse, mediante la formola:

$$k_t = k_o\,(1 + \alpha\,t + \beta\,t^2).$$

Riporto infine sotto $\frac{\delta k}{k_{18}}$ i coefficienti di temperatura che ottengo dall'aumento medio della conducibilità per l'innalzamento di temperatura di 1° fra 18° e 25°, diviso per il valore della conducibilità a 18°.

(1) *Physikalisch — Chemische Tabellen von Landolt und Börnstein.*

Tabella VIII.

n^o	m	d_{18}	$k_0 \cdot 10^{10}$	$k_{18} \cdot 10^{10}$	$k_{25} \cdot 10^{10}$	$\frac{\delta k}{k_{18}}$
			Cloruro di Litio			
1	2, 894	0, 90431		4519, 9	5350, 9	0, 0263
2	2, 163	0, 87635		4938, 6	5795, 2	0, 0248
3	1, 480	0, 85329	3148, 3	4879, 8	5706, 3	0, 0242
4	1, 055	0, 83761	2963, 7	4468, 1	5182, 6	0, 0228
5	0, 659	0, 82256	2499, 2	3670, 1	4206, 4	0, 0209
6	0, 276	0, 80598	1602, 3	2244, 7	2538, 2	0, 0187
7	0. 134	0, 79927	1017, 6	1403, 8	1571, 6	0, 0170
8	0, 071	0, 79642	661, 8	905, 4	1011, 3	0, 0167
9	0, 041	0, 79530	438, 8	601, 8	671, 4	0, 0165
			Cloruro di Ammonio			
10	0, 089	0, 79450	841, 7	1127, 8	1243, 1	0, 0146
11	0, 055	0, 79355	589, 5	786, 3	869, 5	0, 0151
12	0, 025	0, 79257	311, 9	415, 1	462, 2	0, 0162
			Cloruro di Calcio			
13	1, 034	0, 83337	880, 3	1099, 6	1235, 1	0, 0141
14	0, 658	0, 81939	729, 1	917, 2	991, 6	0, 0116
15	0, 440	0, 81039	601, 1	747, 3	805, 5	0, 0111
16	0, 213	0, 80151	411, 2	500, 5	537, 5	0, 0106
17	0, 112	0, 79760	281, 1	338, 2	362, 4	0, 0102
18	0, 048	0, 79457	160, 1	196, 3	213, 0	0, 0122
			Cloruro di Magnesio			
19	0, 150	0, 80046	455, 8	536, 4	605, 8	0, 0108
20	0, 079	0, 79613	296, 4	385, 8	414, 0	0, 0105
21	0, 050	0, 79477	220, 1	287, 0	308, 1	0, 0105
			Cloruro di Zinco			
22	0, 913	0, 84747	357, 4	500, 9	567, 4	0, 0191
23	0, 679	0, 83391	281, 7	394, 4	445, 1	0, 0183
24	0, 486	0, 82203	212, 9	296, 3	334, 0	0, 0182
25	0, 252	0, 80666	116, 5	161, 3	179. 8	0, 0194
			Cloruro di Cadmio			
26	0, 145	0, 80476	92, 0	125, 1	140, 1	0, 0171
27	0, 075	0, 79908	56, 5	74, 6	82, 6	0, 0191

Segue **Tabella VIII.**

n°	m	d_{18}	$k_0 \cdot 10^{10}$	$k_{18} \cdot 10^{10}$	$k_{25} \cdot 10^{10}$	$\frac{\delta k}{k_{18}}$
			Cloruro Ramico			
28	6, 654	1, 1956		1572, 6	1926, 5	0, 0321
29	4, 977	1, 0985		1840, 8	2188, 4	0, 0270
30	2, 898	0, 97504		1618, 9	1893, 0	0, 0242
31	1, 668	0, 89931		1169, 9	1328, 3	0, 0193
32	1, 022	0, 85870		787, 8	890, 5	0, 0186
33	0, 589	0, 83110	383, 5	495, 3	549, 6	0, 0157
34	0, 285	0, 81121	325, 1	284, 7	310, 4	0, 0129
35	0, 110	0, 80016	650, 3	143, 0	153, 6	0, 0105

Nella figura I, rappresento graficamente la conducibilità delle soluzioni alla temperatura di 18°; sulle ascisse porto il numero *m* delle molecole, sulle ordinate le conducibilità.

Le curve rimangono distinte nei seguenti tre gruppi: $NH_4\,Cl$, $Li\,Cl$ — $Mg\,Cl_2$ $Ca\,Cl_2$ — $Cu\,Cl_2$, $Cd\,Cl_2$, $Zn\,Cl_2$, al primo dei quali spetta la massima conducibilità.

Per il cloruro di ammonio, in causa della piccolissima solubilità nell'alcool assoluto, ho studiato solo tre soluzioni, alla conducibilità delle quali spettano valori che cadono sensibilmente sulla curva del cloruro di litio. La curva di questi due sali alcalini si stacca in modo singolare da quella dei sali degli altri due gruppi. Dall' esame delle curve risulta che per $m = 0{,}5$ mentre la conducibilità del cloruro di calcio, il quale appartiene al 2° gruppo, è circa il doppio di quella del cloruro di zinco, appartenente all'ultimo gruppo, quella del cloruro di litio è quasi otto volte maggiore di questa.

Per i due sali più solubili nell'alcool assoluto ($Li\,Cl$, $Cu\,Cl_2$) si hanno due curve molto estese. Esse manifestano un massimo di conducibilità ad un certo grado di concentrazione, che per il cloruro di litio corrisponde presso a poco ad $m = 0{,}9$, per il cloruro di rame ad $m = 2$. Risulta inoltre ad evidenza dalle curve stesse, che anche per soluzioni moltissimo diluite la conducibilità loro non cresce proporzionalmente alla concentrazione, ma alquanto più lentamente. A simile conclusione è pure arrivato il Lenz (1) in uno studio sulla resistenza elettrica di soluzioni acquose molto diluite di numerosi sali.

Ho costruito le curve in iscala maggiore e da esse ho dedotte le conducibilità cor-

---

(1) R. Lenz, *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St-Pétersbourg*, S. VII, t. XXVI, n. 3, 1878.

rispondenti ai valori 0,1, 0,05 di m e valendomi di essi ho calcolati i due coefficienti λ e λ' della equazione

$$k_{18} = \lambda m - \lambda' m^2$$

che dà la conducibilità in funzione del numero delle molecole. Il λ, la conducibilità molecolare del corpo in soluzione alcoolica, rappresenta il limite al quale converge il valore del rapporto fra la conducibilità ed il contenuto molecolare.

Ecco i valori ottenuti:

	$\lambda . 10^8$	$\lambda' . 10^8$
$NH_4\,Cl$	170,2	484
$Li\,Cl$	167,5	530
$Mg\,Cl_2$	67,3	238
$Ca\,Cl_2$	47,2	124
$Cu\,Cl_2$	15,0	20
$Cd\,Cl_2$	11,3	18
$Zn\,Cl_2$	6,4	(?)

Il λ' del cloruro di zinco risulterebbe eguale a 0, tale valore è però incerto; questo sale essendo studiato per soluzioni meno diluite degli altri, il principio della curva non è ben definito.

Recentemente E. Bouty (1) studiando la resistenza delle soluzioni acquose diluitissime di molti sali neutri, e servendosi di un metodo elettrometrico, è giunto alla conclusione che tali soluzioni hanno la stessa conducibilità, quando contengono un peso di sale espresso dal loro equivalente chimico. Questo fatto non si verifica entro il limite della diluizione raggiunta nelle soluzioni alcooliche da me studiate.

L'influenza della temperatura sulla conducibilità delle soluzioni alcooliche, è al pari di quella delle soluzioni acquose molto grande, e come per esse diminuisce al decrescere della concentrazione fino ad un certo limite. Il limite al quale converge il coefficiente di temperatura per le soluzioni alcooliche è alquanto più piccolo di quello che si riscontra per le soluzioni acquose. Anche qui si osserva che quanto più grande è la conducibilità delle soluzioni e tanto maggiore è il coefficiente di temperatura ad esse corrispondente; così, mentre per la soluzione 1 di cloruro di litio (corrispondente ad $m = 2{,}89$) il coefficiente di temperatura è 0,0263, per la 9 ($m = 0{,}041$) è solo 0,0165. Per il cloruro ramico il coefficiente di temperatura varia da 0,0321 a 0,0105 (per $m = 6{,}64$ e $m = 0{,}110$).

Per i sette cloruri studiati, i limiti dei rispettivi coefficienti di temperatura oscillano fra valori abbastanza discosti. Tracciate le curve di tali cofficienti, in funzione della concentrazione delle soluzioni, si osserva che per i cloruri di zinco e di cadmio esse tendono sensibilmente ad uno stesso valore; analogamente per i cloruri di litio ed ammonio da una parte e per gli altri tre cloruri di magnesio, calcio e rame dall'altra.

---

(1) E. Bouty, Paris, *Académie des Sciences*, séance du 21 janvier 1884.

Una relazione frà la conducibilità delle soluzioni acquose e delle corrispondenti alcooliche, non risulta dai numeri che mi ha fornito l'esperienza. Già l'ordine col quale si aggruppano i varii cloruri da me studiati, rispetto alla grandezza della conducibilità loro, è ben diverso da quello che seguono se disciolti nell'acqua. Metto qui di fronte i valori di λ calcolati per le soluzioni acquose e per le soluzioni alcooliche dei varii sali, notando però che i λ delle soluzioni acquose vennero dedotti per le due concentrazioni $m = 1$ $m = 0,5$, quelli delle alcooliche per $m = 0,1$ $m = 0,05$.

Soluzioni acquose			Soluzioni alcooliche		
NH_4Cl	$\lambda . 10^8 =$	954	NH_4Cl	$\lambda . 10^8 =$	170,2
$CaCl_2$	»	750	$LiCl$	»	167,5
$MgCl_2$	»	719	$MgCl_2$	»	67,3
$LiCl$	»	701	$CaCl_2$	»	47,2
$ZnCl_2$	»	681	$CuCl_2$	»	15,0
$CdCl_2$	»	365	$CdCl_2$	»	11,3
			$ZnCl_2$	»	6,4

I valori di λ per le soluzioni acquose sono quelli dati da Kohlrausch (1) ad eccezione di quelli del cloruro di zinco e del cloruro di cadmio. Il λ del cloruro di zinco è dovuto al Lenz (2); quello corrispondente al cloruro di cadmio è tolto dalle esperienze di Grotrian (3).

Dall'esame di questi numeri si vede tosto come i valori della conducibilità delle soluzioni alcooliche sono molto più piccoli di quelli delle corrispondenti soluzioni acquose; ai diversi cloruri disciolti nell'acqua, spettano conducibilità molecolari dello stesso ordine di grandezza, ciò che non si verifica per le soluzioni alcooliche degli stessi. Per le soluzioni acquose non si riscontra l'eguaglianza della conducibilità molecolare dei due cloruri di litio e di ammonio sciolti nell'alcool. Mentre per le soluzioni alcooliche è più conducibile il cloruro di magnesio, anzichè quello di calcio, per le acquose ha luogo l'inverso. Nel gruppo dei metalli pesanti, il cloruro di cadmio, disciolto nell'acqua si comporta in modo anormale presentando una conducibilità molto piccola, cosa la quale ha condotto Grotrian (4) a studiare a parte questo sale allo scopo di vedere se su tal fatto abbia influenza la formula di costituzione ammessa generalmente per questo sale. Nell'alcool invece il cloruro di cadmio mostra una conducibilità prossima a quella del sale corrispondente di rame; si trova invece fare eccezione il cloruro di zinco che si mostra dotato d'una conducibilità che è la metà di quella degli altri due sali.

Il diverso grado di solubilità di cui sono forniti i diversi sali nell'alcool assoluto non ha rapporto evidente colla conducibilità molecolare. Così, ai due sali più solubili nell'alcool, il cloruro di rame e quello di litio, spettano conducibilità molecolari espresse da 15.10^{-8} e 167.10^{-8}; al cloruro di rame molto più solubile, spetta la conducibilità più piccola.

---

(1) Kohlrausch, *Wiedemann's Annalen*, Bd. VI, H. 2, S. 157, 1879.
(2) F. Kohlrausch, l. c.
(3) O. Grotrian, *Wiedemann's Annalen*, Bd. XVIII, H. 2, S. 177, 1883.
(4) O. Grotrian, l. c.

I risultamenti delle mie esperienze si possono quindi raccogliere nelle seguenti conclusioni:

1. Le soluzioni dei sali nell'alcool etilico sono molto più resistenti delle corrispondenti soluzioni acquose.

2. Anche per soluzioni diluitissime la conducibilità cresce più lentamente della concentrazione.

3. Per i sali molto solubili nell'alcool la conducibilità raggiunge un massimo per un determinato grado di concentrazione.

4. Dei cloruri studiati sono più conduttori gli alcalini; vengono poscia con conducibilità molto inferiore i cloruri delle terre alcaline, ed in fine i cloruri dei metalli pesanti.

5. Per soluzioni diluitissime, contenenti egual numero di molecole di sale, i cloruri di litio e di ammonio, hanno pressochè uguale conducibilità.

6. La conducibilità dei sali in soluzioni alcooliche, non è legata da alcuna relazione semplice con quella di corrispondenti soluzioni acquose.

7. I coefficienti di temperatura sono alquanto più piccoli di quelli che spettano alle soluzioni acquose; tendono a limiti alquanto diversi, comuni però ad alcuni gruppi.

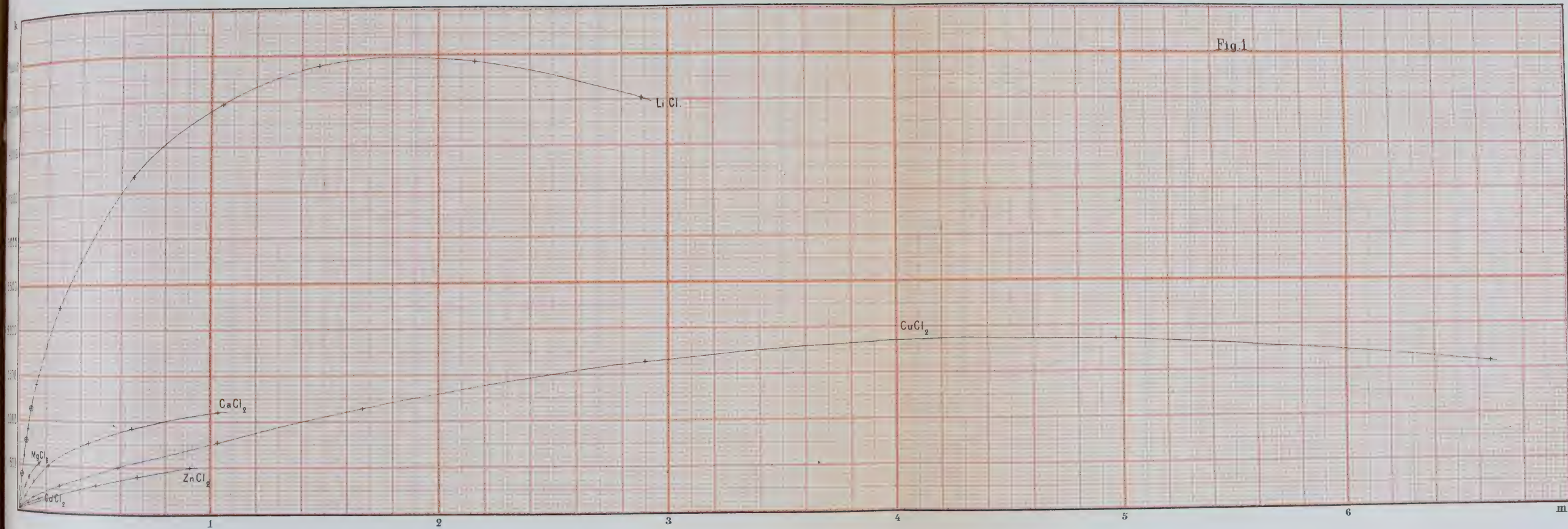
8. Non esiste alcun rapporto semplice fra la solubilità dei sali nell'alcool e la conducibilità delle loro soluzioni.

Quando avrò estese le ricerche sperimentali ad un numero maggiore di sali, potrò con maggior profitto stabilire studi di raffronto fra i diversi comportamenti dei sali disciolti nell'acqua e nell'alcool. Credo conveniente limitare per ora le conclusioni a quanto sopra; perchè le determinazioni da me eseguite si riferiscono ad un gruppo troppo speciale di combinazioni, per voler da esse cavare conseguenze d'ordine più generale.

Mi incombe l'obbligo di chiudere il presente scritto con una attestazione di riconoscenza al prof. Andrea Naccari per i consigli ed i mezzi fornitimi nel corso di questo studio sperimentale che ho eseguito nel laboratorio da lui diretto.

(Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino).

Torino, Maggio 1884.

Fig. 1
k
Li Cl.
CuCl2
CaCl2
MgCl2
ZnCl2
CdCl2
1
2
3
4
5
6
m

MONOGRAFIA

DEGLI

ANFIBI URODELI

ITALIANI

DEL

Dott. LORENZO CAMERANO

Approvata nell'adunanza del 15 Giugno 1884

I.

La presente monografia è destinata a far seguito a quella sugli Anfibi anuri italiani che io presentai nell'anno 1882 e che ebbe l'onore di essere stampata nelle Memorie di questa R. Accademia delle Scienze (1).

Io ho condotto questo lavoro collo stesso sistema e colle stesse norme relativamente al modo di considerare la nomenclatura e le divisioni tassonomiche : *genere*, *specie*, *sottospecie*, *varietà*, *variazione*, norme che io non starò qui a ripetere.

II.

Gli Anfibi urodeli sono come gli A. anuri molto variabili sia nelle forme sia nella colorazione. Essi offrono un campo buonissimo per studiare le modificazioni prodotte dalla *scelta naturale* e soprattutto gli interessantissimi fenomeni di adattamento.

Gli Anfibi urodeli, essendo più strettamente degli Anfibi anuri legati all'acqua, ed essendo provvisti di scarsissimi mezzi di locomozione, sentono meglio di altri gruppi di animali l'azione delle condizioni dei luoghi dove si trovano e quindi si modificano più profondamente degli Anfibi anuri. Essi meglio ancora degli Anfibi anuri servono a caratterizzare la fauna di una data località.

Le modificazioni principali che avvengono negli Anfibi urodeli dipendono essenzialmente dal condurre essi vita più o meno terragnola.

Fra gli Anfibi urodeli italiani abbiamo esempi bellissimi di questa sorta di

(1) Ser. II, vol. XXXV, 11 Giugno 1882 (uscita nel 1883).

modificazioni dalla *Salamandra atra*, forma, possiamo dire, quasi esclusivamente terragnola, al *Triton alpestris*, il quale prolunga, spesso per molti anni, la vita branchiale e si riproduce anche in questo stato.

Nelle forme schiettamente acquatiche, come sono quelle appartenenti al genere *Triton*, le estremità non sono molto sviluppate, mentre invece è sempre ben sviluppata la coda, la quale è compressa e presenta superiormente ed inferiormente dei rialzi membranosi destinati ad aumentare la sua superficie. Le estremità, in questo caso, funzionando soltanto da organi dirigenti si sviluppano meno.

In alcune forme, come negli *Euproctus*, il tronco si allunga notevolmente. Inoltre nelle forme acquatiche si sviluppano o sul dorso, o sulle estremità, soprattutto nelle estremità posteriori delle espansioni membranose o in forma di creste, o di palmature o di lobature, le quali concedono all'animale maggiore sicurezza e maggiore rapidità di movimenti nell'acqua; rapidità e sicurezza che sono necessarii soprattutto ai maschi nell'epoca della riproduzione.

Nelle specie che passano nell'acqua solamente il periodo degli amori e della riproduzione, le parti ora menzionate si sviluppano solamente in questo periodo e si atrofizzano durante la vita terragnola.

Nelle forme schiettamente terragnole come sono le specie dei generi *Salamandra*, *Salamandrina*, *Spelerpes*, ecc., osserviamo uno sviluppo proporzionatamente maggiore delle estremità e soprattutto delle estremità posteriori: la coda si fa più o meno cilindrica e tende a deprimersi; in generale tutto l'animale, invece di essere compresso lateralmente come nei *Triton*, si fa depresso. Gli *Spelerpes*, le *Salamandrine* presentano questa depressione in un modo molto evidente. In queste forme non abbiamo, o raramente e poco sviluppate, creste, palmature o lobature membranose.

Anche la struttura della pelle e la colorazione si modificano col predominare la vita acquatica o la vita terragnola.

Nelle forme schiettamente acquatiche le colorazioni più vivaci e luminose, *rosse*, *giallo-arancie*, *azzurro-chiare*, ecc., sono in massima parte limitate alle parti inferiori. Nelle forme terragnole schiette esse tendono a portarsi anche nelle parti superiori, come ne abbiamo esempi nel genere *Salamandra*, *Salamandrina*, ecc. Nelle forme acquatiche più schiette troviamo non raramente nelle parti superiori una colorazione verdastra più o meno spiccata. Ciò pare sia in rapporto colla natura delle acque e soprattutto col colore del fondo delle pozzanghere dove gli animali vivono. Queste colorazioni, sembra, si trovino principalmente negli animali che vivono in acque poco limpide, calde e ricche di vegetazione.

Nelle forme terragnole schiette ora l'animale si uniformizza al colore del suolo, come nello *Spelerpes fuscus* od anche nella *Salamandrina perspicillata*, ora cerca di differenziarsi da esso il più possibile, come nella *Salamandra maculosa* e nella *Salamandra atra*. In questi ultimi casi l'animale possiede, come dimostrò il Darwin (1), mezzi speciali di difesa, come sarebbe la abbondante secrezione velenosissima della pelle.

---

(1) *The descent of man.*

I costumi delle varie specie di Anfibi urodeli italiani sono in rapporto colle modificazioni sopradette e colle condizioni speciali di vita di ciascuna specie: anzi per talune forme variano da individui a individui secondo le speciali circostanze di vita di ciascuno.

La stessa specie può presentare costumi diversi, soprattutto per quanto riguarda la riproduzione, in due pozzanghere poco lontane.

Io ho già trattato a lungo questo argomento in un precedente lavoro sulla *Vita branchiale degli Anfibi* (1), ed a quello io rimando il lettore.

Negli Anfibi urodeli non sono rari i casi del perdurare negli adulti di alcuni caratteri della vita giovanile, vale a dire i fenomeni di *neotenia* o meglio di *ebososia* (2).

I più spiccati sono quelli che si osservano frequentemente nel *Triton alpestris*.

Un altro caso di *ebososia* è ad esempio quello che si osserva nelle femmine della forma italiana del *Triton cristatus*, le quali conservano spesso nello stato adulto la linea gialla longitudinale mediana del dorso che è essenzialmente carattere dei giovani.

Oltre a tutte queste cause modificatrici ve ne sono altre di cui io già feci cenno nella monografia degli Anfibi anuri, le quali in certe località agiscono nella stessa maniera sopra specie diverse ed anche sopra forme appartenenti a gruppi diversi. Queste sono cause locali che ignoriamo intieramente.

In Italia, ad esempio, noi osserviamo succedere una analoga modificazione della cresta dorsale dei maschi e della coda nel *Triton cristatus* e nel *Triton vulgaris* Perchè questo analogo modificarsi delle due specie? Quale è la causa di questo carattere *regionale?* Lo ignoriamo intieramente.

Così pure fra le varie regioni italiane la parte bassa della valle del Po e soprattutto il Veneto ci presenta la *Rana esculenta*, i *Triton cristatus* e i *Triton vulgaris* più abbondantemente e più intensamente macchiettati delle altre regioni. Anche di ciò non sappiamo la causa.

L'altitudine sul livello del mare, per quanto riguarda gli *A. urodeli* agisce modificando i costumi dell'animale coll'offrire ad essi condizioni speciali di vita, come si osserva nella *Salamandra atra*. Non ho osservato altre sorta di modificazioni, poichè raramente le specie di A. urodeli del piano si spingono molto in alto sui monti, e difficilmente quelle dei monti discendono al piano.

La *Salamandra maculata* e il *Triton alpestris* che si trovano tanto al piano che sui monti non mi hanno presentate variazioni notevoli secondo l'altitudine.

Nella descrizione delle forme e soprattutto nella valutazione dei caratteri generici e specifici è d'uopo di tener conto di tutte le cause modificatrici sopradette per poter dare un giusto valore alle differenze che le forme stesse presentano.

Negli Anfibi urodeli si hanno buoni caratteri generici e specifici, soprattutto nelle ossa del cranio.

---

(1) *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Ser. II, vol. XXXV, 1883.

(2) L. Camerano, *Intorno alla neotenia ed allo sviluppo degli Anfibi.* Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX, 1883.

Nelle ossa mascellari, nelle ossa pterigoidee, ecc., nelle arcate fronto-squamose e nelle apofisi sopra orbitarie dei frontali.

Gli altri caratteri sono di ordine inferiore.

La disposizione dei denti palatini è carattere buono soltanto per la distinzione dei gruppi; è incerto, per lo più, quando si tratta di caratterizzare le specie di uno stesso genere, poichè essa varia, molto spesso, da individuo a individuo.

In una terza categoria è d'uopo collocare i caratteri fondati sulle espansioni membranose del dorso, della coda e delle estremità.

In una quarta categoria stanno i caratteri di colorazione i quali sono molto variabili, ora essendo costantissimi in certe forme, ora invece essendo variabilissimi in certe altre.

Rispetto ai caratteri dedotti dalla colorazione mi pare tuttavia, che oggigiorno i naturalisti eccedono alquanto nel negare loro ogni valore tassonomico. Negli animali vi sono generalmente due sistemi di colorazione, uno mutabilissimo e, dirò così, *plastico;* l'altro, molto costante e difficilmente variabile. Quest'ultimo è generalmente collocato nelle parti dell'animale che sono meno in vista e che quindi sono meno soggette all'azione della scelta naturale. Io credo sarebbe cosa molto interessante e utile lo studiare le colorazioni degli animali da questo punto di vista, poichè si arriverebbe molto probabilmente a trovare buoni caratteri differenziali delle varie forme.

III.

Credo utile di mantenere anche in questo lavoro gli stessi confini della fauna italiana, già discussi nella monografia degli Anfibi anuri, e di mantenere anche la stessa divisione dell'Italia in sotto regioni o provincie zoologiche.

Io considero il territorio faunistico italiano limitato al Nord ed al Nord Ovest dalle Alpi all'Est, dalla catena del Carro o al più il golfo del Quarnero fino a Fiume.

Fanno parte del territorio faunistico italiano la Corsica, la Sardegna e Malta. Ne escludo, fino a che non si abbiano intorno ad esse più ampie cognizioni, l'isola di Pelagosa, l'isola di Pantellaria e l'isola di Lampedosa, per le ragioni dette nel lavoro precedentemente citato.

Io divido poi erpetologicamente il territorio faunistico italiano nel modo che segue:

1. Provincia continentale o settentrionale.
2. » peninsulare o meridionale.
3. » insulare Corso-Sarda.
4. » insulare Siculo-Maltese.

La fauna italiana, per ciò che riguarda gli Anfibi urodeli, è più caratterizzata che non rispetto agli Anfibi anuri, poichè essa possiede, paragonandola colle altre regioni europee, in proprio due generi: *Spelerpes* e *Salamandrina,* e inoltre ha fino ad ora esclusivamente due specie del genere *Euproctus,* di più del genere *Triton* ha sotto-specie ben definite per due forme: il *T. cristatus* e il *T. vulgaris.*

Rispetto agli Anfibi anuri la fauna italiana è meno distinta da quella del rimanente d'Europa.

Le varie specie di Anfibi urodeli si possono, per quanto se ne sa, ora distribuire in Italia, nel modo seguente: di fronte ad esso ho creduto utile di riportare anche lo specchietto della distribuzione degli Anfibi anuri.

ANFIBI URODELI ITALIANI

NOME GENERICO e SPECIFICO	PROVINCIA continentale	PROVINCIA peninsulare	PROVINCIA Corso-Sarda	PROVINCIA Siculo-Maltese
Spelerpes fuscus	+	+	+	. . .
Salamandrina perspicillata	. . .	+	. . .	. . .
Euproctus montanus	. . .	. . .	+	. . .
Id. Rusconii	. . .	. . .	+	. . .
Triton vulgaris tipo	. . .	. . .	. . .	. . .
subsp. *meridionalis*	+	+	. . .	. . .
Triton alpestris	+	+	. . .	. . .
Id. cristatus tipo	. . .	. . .	. . .	. . .
subsp. *Karelinii*	+	+	. . .	. . .
id. *longipes*	. . .	+	. . .	. . .
Salamandra maculosa	+	+	+	+
Id. atra	+	. . .	. . .	. . .
Discoglossus pictus	. . .	. . .	. . .	+
subsp. *sardus*	. .	. . .	+	. . .
Bombinator igneus	+	+	. . .	. . .
Pelobates fuscus	+	. . .	. . .	. . .
Hyla arborea tipo	+	+	. . .	+
subsp. *Savignyi*	. . .	. . .	+	. . .
Bufo viridis	+	+	+	+
Id. vulgaris	+	+	+ (1)	+
Rana esculenta tipo	+	. . .	+ (2)	. . .
subsp. *Lessonae*	+	+	. . .	+
Rana muta	+	. . .	. . .	. . .
Id. Latastii	+	+	. . .	. . .
Id. agilis	+	+	. . .	+

(1) Isola d'Elba.
(2) Riferisco a questa forma l'unico esemplare che ho potuto esaminare di Corsica.

Si vede da questi specchietti che la provincia continentale è meno ricca di A. urodeli della provincia peninsulare, mentre l'inverso accade per gli A. anuri. Essa ha in proprio soltanto la *S. atra*, forma essenzialmente alpestre.

La provincia peninsulare ha in proprio la *Salamandrina perspicillata*. Questa ultima si può considerare come forma essenzialmente appenninica, di più essa ha una forma speciale di *Triton cristatus* la subsp. *longipes*, la quale fino ad ora sarebbe soltanto del Gran Sasso d'Italia e di Bologna.

La provincia Corso-Sarda è povera di forme; ha comune colla provincia continentale la *Salamandra maculosa*; colla P. peninsulare, lo *Spelerpes fuscus*, ed ha in proprio il genere *Euproctus*, rappresentato da due specie: l'*E. montanus* della Corsica e l'*E. Rusconii* della Sardegna.

La provincia Siculo-Maltese finalmente è poverissima di A. urodeli; fino ad ora non vi si conosce con sicurezza che la *Salamandra maculosa*, la quale tuttavia vi è poco frequente. È d'uopo avvertire che la Sicilia è, rispetto agli A. urodeli, poco studiata.

IV.

Nella monografia degli Anfibi anuri io lamentava la scarsità di lavori faunistici locali che potessero fornire dati precisi sulle specie italiane, questa mancanza si osserva pure rispetto agli A. urodeli.

Io non intendo di dare qui la bibliografia completa riguardante gli Anfibi urodeli italiani, ciò io cercherò di fare più tardi in altra occasione per evitare ripetizioni inutili.

Oltre alle opere generali sulla erpetologia italiana del Bonaparte (*Iconografia della Fauna italica*, 1832-41); e del De Betta (*Fauna italiana — Rettili ed Anfibi*, Milano, Vallardi, 1874); l'Italia possiede di già una Monografia degli urodeli italiani dovuta al De Betta: *Monografia degli Anfibi urodeli italiani e più diffusamente delle specie viventi nelle provincie venete* (Mem. R. Ist. Veneto, vol. XI, 1864), la quale porta un prezioso contributo alla conoscenza degli urodeli del nostro paese.

Fra le monografie descrittive limitate a qualche provincia ricorderò principalmente:

Genè G. — *Synopsis Reptilium Sardiniae indigenorum;* Mem. Acc. Sc. di Torino, 2ª ser., vol. 1, 1859 (con tav.).

De Betta — *Erpetologia delle provincie Venete e del Tirolo meridionale;* Atti R. Acc. di Agricoltura di Verona, vol. XXXV, 1857.

I. Bedriaga — *Zur Kenntniss der Amphibien und Reptilien der Fauna*, von Corsika; Archiv. f. natur., 1883.

V. Fatio — *Faune des Vertébrés de la Suisse*, vol. III, 1872.

III. (Quest'opera contiene numerosi ragguagli intorno ad urodeli del Cantone Ticino).

Seguono poi molti lavori riguardanti i costumi, la riproduzione, l'anatomia, la fisiologia e vari catalogi nominali, che qui non cito, ma che si trovano menzionati a loro tempo nelle descrizioni delle singole specie.

Riguardo ai catalogi nominali debbo ripetere ciò che già dissi a proposito degli A. anuri, cioè che essi, se non vengono fatti con cura e con coscienza grandissima, e tenendo conto dei progressi della scienza, servono a pochissimo, anzi molte volte creano confusione.

Lo studio delle faune locali diventa veramente utile quando è fatto con molta diligenza, e quando si cerca di studiare le forme della località, dandone una descrizione sufficiente.

Molte regioni rimangono in Italia da esplorarsi rispetto agli Anfibi urodeli, e io mi auguro che questo mio lavoro venga presto modificato da numerose ricerche.

Io non enumero qui tutte le persone che contribuirono a fornirvi il materiale del mio lavoro, alle quali mando i miei vivi ringraziamenti.

Mando poi i miei migliori ringraziamenti al Capitano Giulio Bazetta, che mi cedè in istudio il ricco materiale Ossolano del museo Galletti, al Dott. I. Bedriaga, il quale volle gentilmente comunicarmi il prezioso materiale da lui raccolto in Corsica dandomi facoltà di studiarlo a mio talento, ed al Prof. Ricchiardi il quale mi comunicò l'esemplare tipico della *Salamandra corsica* del Savi che si conserva nel Regio Museo zoologico di Pisa.

Il materiale di questo lavoro risultante di oltre 800 esemplari provenienti da molte località italiane, è ora deposto nella collezione dei Vertebrati italiani del R. Museo Zoologico di Torino.

Class. AMPHIBIA

Ord. CAUDATA.

La disposizione dei gruppi principali è essenzialmente quella proposta dal Boulenger nel *Cat. Batrac. Graden. Brit. Mus.* Londra, 1882, modificata in modo da cominciare dalle forme morfologicamente inferiori.

Fam. SALAMANDRIDAE.

Subfam. PLETHODONTINAE.

Denti del palato in due serie una trasversale interrotta sui vomeri e due altre longitudinali sul paraspenoide; le vertebre sono anficeli.

Questa sottofamiglia, secondo il Boulenger (1), comprende i generi *Anaides*, *Plethodon*, *Batrachoseps*, *Spelerpes*, *Munculus*. Questi generi sono essenzialmente americani. Il solo genere Spelerpes avrebbe una specie in Europa e precisamente in Italia, lo *Spelerpes fuscus*. Non avendo potuto esaminare alcun esemplare delle numerose specie americane del genere Spelerpes non posso dire nulla sulla convenienza o meno di conservare la specie italiana unita alle prime o di farne invece un genere a parte, come la sua distribuzione geografica potrebbe far dubitare.

SPELERPES.

Spelerpes, Rafin, *Atlantic. journ.*, N. 1, p. 22 (1832).
Geotriton, Bonap., *Faun. ital.*, (1832) Tschudi, Class. Batr., p. 93, 1839.

La lingua è in forma di fungo e rotonda. Essa è sostenuta, nel mezzo circa, da un peduncolo sottile ed estensibile, in modo che essa è libera tutto allo intorno. Sul palato vi sono: ora quattro serie di denti, due sui palatini le quali convergono allo indietro e due sul parasfenoide poste in direzione trasversale; ora ve ne sono soltanto tre, due sui palatini ed una sul paraspenoide. Le dita dei piedi sono cinque.

In questo genere si comprendono modernamente diecinove specie delle quali una sola lo *S. fuscus* si trova in Europa ed in Italia, le altre specie si trovano nell'America del Nord, nell'America centrale, nel Nord dell'America meridionale e nelle Indie occidentali.

Spelerpes fuscus (Bonap.).

Geotriton fuscus — Bonap., Faun. ital. — Genè, Synops. Rept. Sard. indig. Mem. Ac. Sc. di Torino, ser. II, vol. I (1839) — Gray., Cat. Batr. Sal., p. 47 (1850) — Dum. et Bibr. Erpet. Génér., vol. IX (1854) — De Betta, Monog. Anfib. Urod. ital. Mem. Ist. Venet., vol. II, parte III (1864) — Cope, Proc. Ac. Phil., p. 102, 1869. — De Betta, Fauna ital., Rettili ed Anfibi, p. 84 (1874) — Wiedersheim, Annali del Mus. Civ. di Genova, vol. VII, p. 106 e seg. (1875) — Giglioli, Elenco dei Mammiferi, Ucc., Rett., Anf. e Pesci ital., Catal. generale della Esposizione internazionale della pesca di Berlino, Firenze, Stamp. Reale (1880).

(1) Op. cit.

Geotriton Genei — Thscudi, Classif. d. Batrach., p. 94, pl. 5, fig. 3 (1839).

Salamandra Genei — Scheleg., Fauna japonica, Amph., p. 115. — Abbild. p. 122, tav. 39, fig. 5-7 (1837) (1).

Spelerpes fuscus — Strauch Rev. d. Salamandr., p. 83 (1870) — Schneider, Erpt. Europ., p. 66 — A. Boulenger, Cat. of. Batrachia graden. of Brit. Mus., pag. 69 (1882).

a) 6 esemplari, Sardegna, Prof. Genè.
b) 40 esemplari, Genova, dal sig. Borgioli, 1884.
c) 1 esemplare, Luras (Sardegna) del Dott. Mossa, 1880.
d) 2 esemplari, Toscana, dal sig. Dott. G. Cavanna, 1883.
e) 5 esemplari, Val Casotto (Piemonte), dal sig. Dott. F. Sacco, settembre 1884.

Capo distinto dal tronco, corpo depresso e tozzo, coda subconica, grossa alla base e terminata in punta all'apice; estremità poco robuste e corte, dita delle zampe anteriori e posteriori riunite alla base da una leggierissima palmatura.

---

(1) Il Bonaparte, Ic. *Faun. Ital.*, e il Savi (*Divisione generica dei Salamandridi italiani*, nuovo giornale dei letterati, Pisa, 1838), ed il Genè (*Rept. Sard. indig.* Mem. Acc. Sc. di Torino, ser. II, vol. I, 1839) accettano fra i sinonimi del *Geotriton fuscus* la *Salamandra Savii* Gosse, citando il Cuvier (*Règne animal*, ediz. 2ª, vol. II, p. 115). Il De Betta nella sua monografia degli Anfibi urodeli italiani riferisce con qualche dubbio questa sinonimia sulla fede del Savi e del Genè, non avendo potuto consultare l'edizione seconda del Cuvier; più tardi nella *Fauna Italiana* (*Rettili ed Anfibi*) conserva senz'altro la *Salamandra Savii* Gosse come sinonimo del *Geotriton fuscus*. Ora, nel Cuvier (*Règne animal*, II edizione, vol. II), a pag. 115), si legge: « Nous avons constaté que la Sal. à trois doigts (Lacèp. II, pl. 36) n'est qu'un individu desséché et un peu mutilé de la Salamandre à lunettes (*Salamandrina perspicillata* Savi); — *aj. Sal. Savi* Gosse ». La stessa cosa colle precise parole è ripetuta nell'edizione illustrata molto più recente del *Règne animal* di Fortin, Mass e C. Si vede da ciò chiaramente che la *Salamandra Savii* Gosse è fatta dal Cuvier sinonima della *Salamandrina perspicillata* e non del *Geotriton fuscus*, specie questa che non è menomamente descritta o menzionata nel *Règne animal* di Cuvier, nè nella II edizione, vol. II, nè nell'edizione illustrata. Io credo quindi, che la confusione fattasi nella sinonimia relativa alla *Salamandra Savii* Gosse sia derivata da un errore di citazione fatto dal Bonaparte, dal Savi e dal Genè, e che quindi la *Salamandra Savii* debba essere tolta dalla sinonimia dal *Geotriton fuscus*.

Il Bonaparte stesso ha nel suo capitolo riguardante il *Geotriton fuscus* (*Iconogr. Fauna. Ital.*), rispetto alla *Salamandra Savii* Gosse, le parole seguenti: « A bandire poi qualunque scrupolo contribuisce la circostanza che, malgrado assidue ricerche, non abbiamo potuto rintracciare il quando nè il dove la pubblicasse il signor Gosse sotto il nome del Professore Savi. Nè in ciò ci ha potuto aiutare lo stesso cattedratico Pisano ».

Debbo dichiarare che io non sono stato più fortunato del Bonaparte, non essendo riuscito a trovare la descrizione del Gosse. Io non arrivo a comprendere come il Bonaparte sia potuto cadere nell'errore in quistione, poichè nel Cuvier non si fa cenno alcuno del *Geotriton fuscus*.

Rispetto al *Geotriton fuscus* farò notare ancora che la sinonimia di questa specie, data dal Bonaparte, dal Genè ed anche quella del De Betta, deve essere alquanto modificata. La *Salamandra brune* (*Salamandra fusca*) Bonnat, *Tabl. Enc. Méth. Erpét.*, p. 65, deve essere considerata come sinonimo della *Salamandra atra*, come si può arguire facilmente dalle parole della diagnosi del Bonnaterre: « S. fusca, S. tota fusca absque maculis, absque splendore. Laurenti, ibid.; Tout le corps brun et terne, sans aucune tache, *Les Alpes* ».

Anche la *Salamandra fusca* di Gesner. Aldrovandi et Laurenti dagli autori sopracitati considerata come sinonimo del *Geotriton fuscus* è piuttosto da considerarsi come sinonimo della *Salamandra atra*. L'Aldrovandi ad esempio ha a pag. 640 dei *Quadr. dig. Ovip.*, lib. I, le parole seguenti: « Duplex Salamandrae genus assignari, omnes Auctores referunt... De terrestri Gesnerus narrat, se aliquando unam in alpibus invenisse, quae tota erat fusca, absque splendore, cauda brevi; deinde lacteus succus ab ipsa percussa dimanabat, veluti in vulgari Salamandra accideri solet ».

Lingua subrotonda libera tutto all'intorno e fungiforme. I denti sono disposti in quattro serie: due anteriori dietro alle aperture interne delle narici disposte in due archi leggermente convergenti verso la parte posteriore, e due con denti più numerosi collocate nella regione posteriore del palato sul parasfenoide, le quali convergono leggermente fra loro verso la parte anteriore e divergono alquanto nella loro parte posteriore. Dita terminate da un rigonfiamento funzionante a mo di ventosa. Le parti superiori di color giallo ocraceo abbondantemente chiazzato di grigio giallastro, di bruno e di nero; le parti inferiori di color grigio nerastro reticolato o punteggiato di grigio bianchiccio. Dimensioni medie, lunghezza totale ♂ m. 0,086, ♂ m. 0,090 (1).

Il capo è abbastanza distinto dal tronco, ed è relativamente grande, soprattutto per un notevole sviluppo del suo diametro trasversale misurato un po' allo indietro degli occhi. Questo diametro è in generale un po' più sviluppato nelle femmine che non nei maschi, nei giovani (lunghezza totale m. 0,030) esso è anche più sviluppato. Il capo è superiormente piano; la distanza che vi è fra gli occhi superiormente è eguale alla distanza che separa l'apice anteriore dell'occhio dalla narice. Le guancie sono notevolmente inclinate, più negli adulti che nei giovani; il muso è sporgente; la mascella superiore oltrepassa di circa due millimetri l'inferiore; le narici sono terminali e molto discoste fra loro, la distanza che le separa è spiccatamente maggiore di quella che le separa dall'angolo anteriore degli occhi. Negli individui molto giovani le narici sono in proporzione notevolmente più grandi che non negli adulti; la bocca è grande e lo squarcio boccale giunge fino all'angolo posteriore degli occhi; gli occhi sono relativamente grandi e sporgenti, il diametro massimo dell'occhio è eguale alla distanza che corre fra l'angolo anteriore dell'occhio e le narici.

Fig. 1. Schema dei denti palatini dello *Spelerpes fuscus*

La lunghezza del capo, ora è un po' più corta della larghezza, come nelle femmine, ora è eguale ad essa, come nei maschi, in questi ultimi talvolta la lunghezza supera di un millimetro la larghezza: nei giovani le due dimensioni sono presso a che eguali fra loro. La lunghezza del capo è contenuta tre volte e mezzo circa nella lunghezza del tronco.

Il tronco è robusto, piano superiormente e leggermente incavato longitudinalmente nella linea mediana. Le estremità anteriori sono relativamente corte e piccole, ripiegate lungo i fianchi, esse oltrepassano di poco la metà dei fianchi stessi. Nei maschi e nei giovani le estremità anteriori sono proporzionatamente più sviluppate e più lunghe.

Le dita sono quattro, corte ed appiattite, non appuntite e terminate da un rigonfiamento di color rossiccio, il quale funziona come una ventosa. Le dita sono riunite alla base da una membranella la quale si prolunga alquanto lungo il margine laterale delle dita stesse. Il primo dito è il più corto, il terzo è il più lungo, il secondo ed il quarto sono eguali fra loro. Non ho osservato alcun tubercolo sulla faccia palmare. Nei giovani le dita sono proporzionatamente più corte, esse sono provviste di rigonfiamenti terminali ventosiformi come gli adulti.

---

(1) La misura massima di m. 0,085 segnata del De Betta (*Fauna ital. in Rel. Inf.*) e la misura media segnata fra i m. 0,065 e m. 0,080 sono troppo piccole.

Poco sviluppate e corte sono le estremità posteriori, ripiegate lungo i fianchi esse arrivano nelle femmine e nei maschi un poco oltre alla metà.

Ripiegando lungo i fianchi l'estremità anteriore e posteriore si vede che nelle femmine le dita dell'una arrivano coll'apice presso a poco alla base delle dita dell'altra, nei maschi arrivano talvolta fino alla fine della palma della mano o della pianta del piede.

Le dita sono cinque relativamente corte e larghe, tronche alla estremità e provvisti di un rigonfiamento inferiore ventosiforme. Esse sono riunite alla base da una membrana un po' più sviluppata che non nelle estremità anteriori. Il primo dito è il più piccolo, il secondo è più piccolo del quinto, il terzo ed il quarto sono quasi eguali fra loro e sono i più lunghi.

Non ho osservato alcun tubercolo nella faccia plantare.

La coda è subconica, grossa ed alquanto depressa alla base e più o meno appuntita alla estremità, talvolta essa è leggermente carenata nella parte inferiore verso l'apice. La sua lunghezza è alquanto variabile: ora essa è lunga come il tronco; ora è lunga come il tronco e metà del capo, e ciò nei due sessi e nei giovani. Negli individui molto giovani la coda è proporzionatamente più corta che non negli adulti.

La pelle è relativamente spessa, liscia o talvolta leggermente granulosa, mancano vere parotidi, si osservano tuttavia due inspessimenti della pelle che partono dalla estremità posteriore dell'occhio e proseguono più o meno spiccati lungo i fianchi fin presso le estremità posteriori. Questi inspessimenti presentano un maggiore sviluppo nella regione scapolare. Nei giovani questi inspessimenti sono poco spiccati. Inferiormente sia negli adulti sia nei giovani v'è una ripiegatura golare assai spiccata.

La colorazione è in complesso poco variabile. Negli adulti le parti superiori, guardate complessivamente, si presentano di color giallo ocraceo sporco. Questa colorazione è prodotta da molte chiazze di color grigio, e di color bruno di varia intensità e disegno, le quali coprono tutta la parte superiore dell'animale, la quale è fondamentalmente giallastra. Qua e là appaiono macchie irregolari di color giallo, ora sporco e chiaro, come sul capo, sul dorso e sui fianchi, ora più vivace come sulla coda.

Si notano inoltre nella regione dorsale numerose macchie di color nero intensissimo. A primo aspetto sembra che queste macchie non abbiano una disposizione regolare, ma guardando meglio si vede che esse sono disposte nel modo che mostra la figura (*a*), vale a dire: sul capo all'indietro degli occhi vi è una macchia a V più o meno decisa col vertice voltato verso il dorso. Dal vertice del V partono essenzialmente tre serie di macchie nere, una longitudinale mediana e due laterali. Queste serie si prolungano fino alla base della coda, dove si confondono fra di loro. Spesso, soprattutto negli individui di maggior mole, le macchie delle tre serie si riuniscono trasversalmente fra loro in modo che l'animale è coperto di striscie nere incomplete e trasversali. Si nota ancora una fascia più scura, interrotta da chiazze chiare grigiastre e giallastre, che parte dalla parte posteriore dell'occchio, passa sotto alla ripiegatura laterale e occupa i fianchi perdendosi verso la coda.

Mentre la colorazione generale dell'animale come ho già detto, è molto costante, è invece variabile l'intensità e la disposizione delle macchie nere sopraddette.

Sulla coda, nelle estremità, le macchie nere hanno disposizione irregolare.

Le parti inferiori sono di color bruno grigiastro intenso, la parte golare è generalmente più chiara del resto. Sulla tinta generale del fondo vi sono numerose macchiette di color grigio più chiaro ora ridotte a punti, ora più grandi, irregolari e riunite fra loro in modo da costituire una reticolatura che viene a riunirsi con graduati passaggi e sfumature colle macchie dei fianchi.

La figura data dal Bonaparte nella Iconografia della fauna italica, buona per quanto riguarda la forma dell'animale, non corrisponde granchè nella colorazione ai numerosi individui da me esaminati provenienti dalla Liguria.

Nei giovani, lunghezza m. 0,028, le parti superiori del capo, del dorso, della coda e delle estremità sono giallastre con molte macchiette nere tanto che l'animale sembra come spolverato di giallo; sul dorso e sul capo si notano ancora due linee di macchiette nere più intense e abbastanza distinte, le quali partono dalla parte posteriore degli occhi, convergono sin quasi a toccarsi nella regione scapolare, e poscia si dividono e procedendo sul dorso fin verso la regione delle estremità posteriori dove si perdono. Una terza serie di macchiette nere, ma meno distinte delle precedenti, va lungo la linea vertebrale del dorso dalla regione scapolare all'origine della coda. Le parti inferiori e laterali sono nere con qualche punto giallastro o biancastro. Il braccio è giallo chiaro, l'avambraccio e la mano sono macchiettate di nero, le estremità posteriori sono macchiettate di nero.

Giunto l'animale ad una lunghezza di circa m. 0,035 esso presenta superiormente tinte più chiare: la tinta gialla è ancora analoga a quella dello stadio precedente. La serie di macchiettature sopra menzionate sono ben spiccate e di più si osserva una macchia nera trasversale fra gli occhi. I lati del capo hanno il colore della parte superiore: dall'angolo anteriore degli occhi al muso va una sottile riga nera: il muso è nero all'apice. I fianchi sono come il dorso. Il dorso è separato dai fianchi da una linea di macchiette nere che parte dall'angolo posteriore dell'occhio e va lungo i fianchi sino alla estremità della coda. Le parti inferiori sono di color nero bruno con molte macchiette puntiformi grigiastre. La macchiettatura si è accresciuta sulle estremità.

Gli individui che misurano una lunghezza totale di m. 0,058, o m. 0,060 hanno generalmente una colorazione analoga a quella degli adulti.

Non ho osservato notevoli differenze sessuali di colorazione.

Dimensioni.

	LIGURIA									SARDEGNA	
	♀	♂	♀	♀	♂	♂	♀	juv.	juv.	♂	juv.
Lunghezza totale . . . m.	0,100	0,100	0,095	0,104	0,097	0,086	0,077	0,052	0,029	0,081	0,039
» del capo . . »	0,013	0,015	0,012	0,013	0,013	0,011	0,009	0,008	0,005	0,010	0,006
» del tronco . . »	0,044	0,043	0,041	0,046	0,041	0,037	0,034	0,021	0,015	0,036	0,017
» della coda . . »	0,043	0,044	0,042	0,045	0,043	0,038	0,034	0,023	0,011	0,035	0,016
» delle estrem. ant. »	0,016	0,018	0,016	0,018	0,017	0,015	0,012	0,008	0,006	0,014	0,007
» » » post. »	0,018	0,018	0,017	0,018	0,018	0,016	0,012	0,009	0,006	0,014	0,007

L'*habitat* sicuro dello *Spelerpes fuscus* è limitato fino ad ora essenzialmente all' Italia.

Mancano ancora i dati per stabilire con sicurezza la distribuzione geografica di questa specie in Italia. Per quanto se ne sa ora questa specie manca nella valle del Po, salvo nella sua parte superiore. Il Dott. Federico Sacco trovò nel settembre di questo stesso anno (1884) cinque individui, un maschio ed una femmina, entro ad una caverna in Val Casotto. Lo *Spelerpes fuscus* si trova in Liguria (contorni di Genova) alla Spezia e in varie località lungo gli Appennini (Abetone, Garfagnana, Montecatini, Pratolino, Fiesole, ecc.; Seravezza, Massa Carrara, Poretta, Monti Ascolari, ecc. Lo *Spelerpes fuscus* si trova pure in Sardegna.

I costumi dello *Spelerpes fuscus* sono quasi al tutto sconosciuti. Esso si trova generalmente nei luoghi umidi ed anche non molto caldi sotto i sassi fra il legno infracidito, sotto i mucchi di foglie, ecc.; il Genè dice (1) « Habitat frequens hyeme sub lapidibus in montibus circa Iglesias: in aquis numquam vidi ».

Non consta che altri dopo il Genè abbia potuto osservare molto di più intorno al modo di vita di questa specie. Il Prof. Arturo Issel mi disse di aver trovato frequentemente lo *Spelerpes fuscus* nelle caverne della Liguria, attaccato sulle pareti, il che è in rapporto colla conformazione delle sue estremità.

Nulla si conosce ancora di sicuro intorno alla riproduzione od allo sviluppo dello *Spelerpes fuscus.*

Io non ho potuto fare a questo proposito che le osservazioni seguenti:

Io ricevetti nel Marzo dell'anno corrente numerosi esemplari di *Spelerpes fuscus* dal signor Borgioli, il quale li raccolse fuori dell'acqua nei contorni di Genova in località fresche ed umide.

Di questi individui alcuni erano assai piccoli (lungh. totale m. 0,029) altri in maggior numero erano adulti. Avendo aperte parecchie femmine, che avevano il ventre turgido, osservai che esse presentavano dieci, dodici, o al più quattordici o quindici grosse uova di colore giallo-chiaro presso a poco tutte della stessa grossezza e di un diametro di circa cinque millimetri; osservai ancora che le uova erano più grosse in quelle femmine che ne avevano meno.

Altre femmine mi presentarono un numero molto maggiore di uova, ma queste erano molto più piccole.

Avendo messo in disparte alcune femmine dal ventre turgido, per studiare lo sviluppo ulteriore delle uova, esse morirono disgraziatamente dopo alcuni giorni.

Mi pare che date le condizioni speciali di vita dello *Spelerpes fuscus* in località per lo più povere di acque stagnanti e di lento corso: dato il fatto del non averlo mai trovato in acqua, dato il fatto del piccolo numero di uova e del loro grande sviluppo; dato ancora il fatto che l'animale non presenta forme e colorazioni schiettamente acquatiche, mi pare che si potrebbe supporre in esso una maniera di riproduzione e di sviluppo analoga a quella delle Salamandre terrestri; vale a dire una sorta di viviparità.

---

(1) *Synops. Rept. Sard. Indig.*

Subfam. — **SALAMANDRINAE.**

Denti palatini in due serie longitudinali mediane più o meno prolungate posteriormente: vertebre opistoceli.

Secondo il catalogo del Boulenger (1) la sotto-famiglia *Salamandrinae* comprende sei generi, vale a dire: *Salamandra*, *Chioglossa*, *Molge*, *Salamandrina* *Tylotriton*, *Pachytriton*.

Di questi sei generi hanno rappresentanti in Italia solamente i seguenti (2):

Salamandra — *Molge* — *Salamandrina*.

Per quanto riguarda i generi Salamandra e Salamandrina nulla ho da osservare.

Rispetto al genere Molge, io debbo osservare che esso mi pare troppo comprensivo; il Boulenger riunisce in questo genere le specie appartenenti ai generi:

Triton Laur. — *Euproctus* Genè
Pleurodeles Michah — *Glossoliga* Bonap.
Megapterna Savi — *Pelonectes* Latiste.

Io già dissi in un mio precedente lavoro (3), le ragioni per le quali credo che sia conveniente di non fare generi troppo comprensivi, senza tuttavia ben inteso esagerare nel senso opposto.

Nel caso attuale le 19 specie comprese nei generi sopra menzionati si possono riunire in due generi, pigliando per base della divisione la direzione del quadrato iugale e l'angolo che questa parte del cranio fa col mascellare inferiore.

Ciò facendo si vede che — *Molge montana* — *M. rusconii* — *M. aspera*, e forse anche la *M. poireti* (di cui io non ho potuto esaminare il cranio), possono costituire un gruppo generico, poichè in queste forme il quadrato iugale mentre è diretto in basso e allo infuori è pure diretto dallo avanti allo indietro in modo che si ha fra il quadrato iugale e il mascellare inferiore un angolo più o meno acuto. Ciò si scorge facilmente osservando il cranio di profilo; ma si può vedere anche molto bene esaminando il cranio superiormente (4).

L'*Euproctus rusconii* è la forma che ha questo carattere più spiccato: la *Megapterna montana* lo presenta in una maniera un po' meno spiccata, come si può vedere dalle figure qui unite. Per queste forme io conserverei il genere *Euproctus* del Genè, formato nel 1838 (5).

---

(1) *Cat. Batr. Gradent. of Brit. Mus.*, 1882.

(2) Il genere *Chioglossa* è della penisola Iberica. Il *Tylotriton* è dell'Imalaia, e il genere *Pachytriton* è della China.

(3) *Monografia degli Anfibi anuri italiani.* Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino, Ser. II, v. XXXV, 1883.

(4) Si consultino fra le altre le figure seguenti: Bedriaga, *Bert. Z. Ken. fauna Corsika Archiv. f. Naturg.*, 1883, tav. III, fig. 1 (*Megapterna montana*), fig. 15 (*Euproctus rusconii*), tav. IV, fig. 18 (*Hemitriton pirenaeus*).

(5) *Synops. rept. Sard. indig.* Mem. Acc. di Torino, ser. II, vol. I, 1839. — Questo lavoro venne letto all'Accademia il 18 Marzo 1838.

Il genere *Euproctus* avrebbe adunque le seguenti specie:

E. montanus Savi	*E. aspera* Dugés
E. Rusconii Genè	*E. poireti* Gerv. (?)

Le altre specie del genere *Molge* di Boulanger possono costituire un altro gruppo il quale avrà pure per carattere la disposizione del quadrato iugale.

Il quadrato iugale mentre è diretto in basso e allo infuori è pure diretto dall'indietro allo avanti, in modo che si ha fra il quadrato iugale ed il mascellare inferiore un angolo più o meno ottuso. Ciò si osserva molto bene nel *Triton cristatus*, e nelle altre specie affini, nel *Triton boscae*, e nel *T. hagenmülleri*, nel *T. waltii* l'angolo è meno ottuso; ma la direzione del quadrato iugale è sempre verso l'avanti.

A questo secondo genere si può conservare il nome di *Triton* del Laurenti (1768) lasciando stare il nome di *Molge* del Merrem. (1820).

Il genere *Triton* così costituito verrebbe a comprendere:

T. cristatus Laur.	*T. palmatus* Sch.
» *Blasii* de L'Isle.	» *Montandonii* Blgr.
» *marmoratus* Latr.	» *Boscae* Lataste (1).
» *alpestris* Laur.	» *Hagenmülleri* (2) Lataste
» *vittatus* Gray.	» *Waltlii* Michah. (3).
» *vulgaris* (Lin.).	

Ciascuno dei due generi ora menzionato è suscettibile di essere diviso in vari gruppi o sottogeneri come dirò meglio parlando a suo tempo dei singoli generi.

Genere **SALAMANDRINA**.

Fitzinger, Neue Classif. Rept., p. 41 — Tschudi, Batr., p. 93 — Bonaparte, Fauna Ital. e Specchio generale dei sistemi Erp. Anfib. e Ittiol. Milano 1845, p. 6 — Hallovell, Proc. Acc. Not. Scienc. of Philadelph. (1856).

La lingua è subtriangolare, e grande: essa è fissa anteriormente ed è libera ai lati e posteriormente. I denti del palato sono disposti in due serie longitudinali, l'arcata fronto-squamosa è robusta ed ossea: le dita sono quattro sia negli arti anteriori sia nei posteriori. La pelle è asciutta e finamente granulosa.

In questo genere si comprende fino ad ora una sola specie la *Salamandrina perspicillata* (Savi) che fino ad oggi venne trovata con certezza solamente in Italia.

---

(1) Nulla posso dire della *Molge pyrrhogastra*, della *M. sinensis* e della *M. viridescens*, e della *M. terrosa* non avendone potuto esaminare alcun esemplare.

(2) (3) Non è che con qualche esitanza che riunisco al genere *Triton* queste due forme e mi riservo del resto di ritornare sopra di ciò in un'altra occasione.

Salamandrina perspicillata (Savi) (1).

Salamandra terdigitata — Bonnat. Tabl. cyclop. method. Erp., p. 64, tav. 12, fig. 2 (figura pessima), 1789.

Salamandra tridactyla — Daud., Rept. VIII, p. 261 (1803).

Molge tridactylus — Merr., Syst. Amph., p 188, 11 (1820).

Salamandra perspicillata — Savi, Mem. Bibl. ital., vol. XXII, p. 228 (1821) — Nuovo Giorn. dei Letterati di Pisa, v. VII (1823) — Mem. Scient. Dec. 1, p. 163, v. VII (1828) — Cuvier, Règne anim. II, éd. v. II., p. 115 (1829).

Salamandrina perspicillata — Fitzing., Neue Class. Rept., p. 66 (1826) — Syst., Rept., Fasc. 1, p. 33 (1843) — Graven., delic. Mus. Vratislav., p. 88 (1829) — Bonap., Fauna ital., fasc. XIX, f. 95, fig. 3 (figura buona), 1837 — Tschudi, Classif. Batrach. p. 93 (1838) — Dum. et Bibr. Erp. gen., vol. IX, p. 69, tav. 94, fig. 2 e 2ª (figura mediocre) — De Betta, Monograf. Anf. Urodeli Ital., Mem. Ist. Venet., t. XI, p. 528 (1864) — Jan. Mus. Mediol., p. 54 (1857) — Strauch., Rev. di Salam., p. 53 — De Betta, Faun. Ital. Rett. ed Anf., p. 80 — Schreiber, Herp. Eur., p. 69 — Ramorino, Appunti sulla storia naturale della Salam. perspicil., Genova, 1863 — M. Lessona, Proc. Zool. Soc., p. 254 (1868) — Sulla riprod. della Salamandrina perspicillata, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. X (1874) — Wiedersh., Salamandrina perspicillata und Geotriton fuscus — Annal. Mus. Civ. di Genova, VII, p. 5, tav. 1-XVII (1875) — Gasco, Amori del Tritone alpestre, Ann. Mus. Civ. di Genova, vol. XVI, p. 41, nota (1880) — Giglioli, Elenco Mamm., Ucc., Rett. Ital., Firenze (1880), p. 16 — Boulenger, Cat. Batrach. Gradent. of British. Mus. (1882), p. 28 (2).

Seiranota condylura — Barnes in Sillimann., Amer. Journ. of scienc. XI, p. 278 (1826).

Seiranota perspicillata — Bonaparte, Amph. europ., p. 66 (1839) — Gray., Batr., Grad. Brit. Mus., p. 29 (1850).

a) Due esemplari dell'Appennino toscano — dal Prof. Savi.

b) Cinquanta esemplari del contorno di Genova — dal sig. Borgioli, 1884.

c) Venti esemplari del contorno di Genova — dai signori Prof. Issel e Gasco.

d) Sei esemplari Monte Maiella — dal Prof. Gibeili, 1884.

Capo distinto dal tronco: corpo depresso, sottile e snello; coda sottile ed allungata, subquadrangolare alla base e un po' compressa verso l'apice il quale è sottile ed acuminato; estremità proporzionatamente lunghe e ben sviluppate; dita in numero di quattro, sia nelle zampe anteriori, sia nelle zampe posteriori; le dita sono libere; le dita si terminano con una sorta di piccolo indurimento a mo' di unghia.

---

(1) Nome volgare - *Tarantolino.*

(2) Il Boulenger scrive fra i sinonimi *Seiranota perspicillata* Bonap., *Faun. Ital.* Ciò va corretto così *Seiranota perspicillata.* Bonaparte, *Amph. Europ.* Mem. Acc. di Torino, 1839. Nella Fauna italica il Bonaparte conservava ancora il genere *Salamandrina.*

— Lingua subovale, libera, salvo nella parte anteriore, denti palatini disposti in due serie longitudinali parallele nella parte anteriore e fortemente divergenti fra loro nella parte posteriore, a mo' di un ipsilon rovesciato. Parti superiori di color nero intenso uniforme: sul capo fra gli occhi vi è una striscia trasversale, ora intiera, ora divisa di color rosso sbiadito. Parti inferiori macchiate di rosso, di bianco e di nero: gola bianca anteriormente e posteriormente nera; coda inferiormente rossa.

Dimensioni medie: lunghezza totale ♂ m. 0,075, ♀ m. 0,079.

Il capo è ben distinto dal tronco e di dimensioni mediocri; il suo diametro trasversale, misurato un po' allo indietro degli occhi, è notevolmente sviluppato: esso lo è di più nei maschi che non nelle femmine e nei giovani.

Il capo è più o meno incavato nella parte anteriore e fra gli occhi, da questa depressione partono dietro gli occhi due solchi i quali si dirigono, divergendo, a due fossette ben sviluppate, poste dietro gli occhi; qualche volta le fossette e i solchi sono in maggior numero e il capo appare scanalato. Lo spazio che è fra gli occhi, superiormente, è uguale alla distanza che separa l'angolo anteriore dell'occhio dalle narici. Al davanti dell'occhio vi è un solco e poi un rigonfiamento molto sviluppato, che si estende fin quasi alle narici; le narici sono piccole e separate da una distanz eguale a quella che le separa dagli occhi.

Nei giovani le narici sono notevolmente più sviluppate che non negli adulti (1)

Le guancie sono verticali e incavate trasversalmente: il solco è più profondo nei maschi che non nelle femmine.

La bocca è grande e lo squarcio oltrepassa notevolmente l'angolo posteriore dell'occhio.

L'occhio è mediocre: il diametro massimo dell'occhio è notevolmente maggiore della distanza che è fra l'occhio e le narici.

Il capo è un po' più lungo che largo: la lunghezza del capo è contenuta tre volte circa nella lunghezza del tronco negli adulti e due volte e mezzo nei giovani.

Fig. 2. Schema dei denti palatini della *Salamandrina. perspicillata*

Il tronco è mediocremente robusto: piano superiormente e subquadrangolare; le vertebre sono sporgenti e formano come una specie di piccola cresta nodosa: le costole sono anch'esse molto sporgenti e visibili allo esterno.

Le estremità anteriori, ripiegate lungo i fianchi, giungono fino alla metà di questi e spesso l'oltrepassano di due o tre millimetri. Le dita sono quattro, libere intieramente, subcilindriche, e terminate da una sorta di indurimento cutaneo a mo di unghia. Il primo dito è il più corto; il più lungo è il terzo, dopo viene il secondo e poi il quarto. La palma è rugosa e porta due tubercoli uno piccolo assai alla base del 1° dito e l'altro più sviluppato alla base del 4°.

Le zampe posteriori sono proporzionatamente ben sviluppate e robuste, ripiegate lungo i fianchi, esse oltrepassano di due o tre millimetri la metà dei fianchi stessi. Le dita sono quattro e sono foggiate come quelle delle zampe anteriori; il dito più lungo è il terzo, il secondo ed il quarto sono a un dipresso eguali, il primo è

---

(1) Questo fatto si verifica anche nei giovani dello *Spelerpes fuscus.* Si consulti la descrizione di questa specie.

notevolmente più corto. La faccia plantare è rugosa ed ha due tubercoli, uno assai piccolo e qualche volta mancante al tutto alla base del 1° dito e l'altro un po' più sviluppato alla base del 4° dito.

La coda è sottile, alla base è subquadrangolare; verso l' apice è un po' compressa: essa è notevolmente più lunga del capo e del tronco insieme; essa è lievemente carenata al disotto.

La pelle è finamente ed egualmente granulosa per numerosissime piccole asperità che la coprono; non presenta ripiegature ed inspessimenti notevoli (1).

La colorazione delle parti superiori è molto costante. La tinta generale è bruno-nero intensissimo e vellutato. Sul capo fra gli occhi e sopra gli occhi si osservano due macchie irregolari rossiccie o giallastre di forma e di sviluppo irregolare: queste macchie si riuniscono frequentemente fra loro e danno origine ad una macchia di forma grossolanamente triangolare coll'apice rivolto verso la schiena. Talvolta vi sono altre macchie rossiccie e giallastre irregolari sulle altre parti del capo e nella regione scapolare. Sul capo degli individui che hanno soggiornato lungamente in alcool e dei quali la tinta generale del corpo vi è fatta di color bruno chiaro, si vede che dal davanti della macchia rossa vi è una striscia nerastra e allo indietro vi sono due macchie nerastre che si riuniscono in modo da formare un V. Questo sistema di macchiettatura si trova in varie forme di Anfibi urodeli, ed è del resto evidenti negli individui di Salamandrina che hanno da poco tempo compiuto la metamorfosi. Il dorso è generalmente di color nero uniforme, talvolta si osserva una serie longitudinale di piccole macchie rossiccie lungo la linea sporgente esterna delle costole, queste macchie si prolungano fino alla coda unendosi a quelle dei lati della coda stessa. La coda e le estremità sono superiormente più o meno macchiettate di rosso.

Sono stati trovati qualche esemplari nei quali le parti superiori erano abbondantemente sparse di macchie rosse. Il Dott. Giacinto Martorelli trovò nel Lucchese un esemplare colle parti superiori intieramente rosse. Questa varietà di colorazione è assai rara.

Le parti inferiori hanno colorazione assai varia. La gola è occupata per lo più da una grossa macchia nera nei due terzi posteriori; nel terzo anteriore vi è uno spazio foggiato generalmente a mezzaluna di color gialliccio, talvolta più o meno macchiettato di nero: il margine inferiore della mandibola inferiore è nero e delimita anteriormente ed ai lati lo spazio in discorso. Non sono rari gl'individui nei quali tutta la gola è nera. Il petto, l'addome sono macchiettati di rosso vivo, di grigio rossastro e di nero.

Il disegno delle macchiettature, lo sviluppo relativo delle tre tinte è oltre ad ogni dire variabile sia nei giovani sia negli adulti. Si possono stabilire a questo riguardo i seguenti gruppi principali di sistemi di colorazione:

1° Petto ed addome di color rosso vivo uniforme con poche macchie nere verso i lati.

---

(1) Si consulti a proposito della struttura della pelle di questa specie: Mario Lessona, *Contributo allo studio della pelle degli urodeli.* Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino, Ser. II, v. XXXIV, 1881.

2° Petto ed addome di color grigio rosso con grosse macchie nere.

3° Petto ed addome di color grigio rosso e di color rosso vivace con macchie nere più o meno numerose e più o meno sviluppate.

La parte inferiore delle estremità e della coda è di color rosso vivace senza macchie, salvo tuttavia la regione cloacale la quale porta due macchie nere trasversali che discendono dai fianchi e si riuniscono verso la metà della fessura cloacale; queste macchie sono molto costanti sia nei giovani sia negli adulti. I fianchi sono generalmente segnati da una striscia più chiara, rosea o giallastra; di forma e di sviluppo irregolare, interrotta da macchie nere e rosse, la quale si prolunga divisa in macchiette sui fianchi della coda fino alla metà circa di questa.

Il Ramorino (Appunti sulla Storia naturale della *Salamandrina perspicillata*, Genova 1863) cita un caso di albinismo: « l'individuo che lo presentava era più piccolo che d'ordinario; non perfettamente bianco, ma d'un bianco giallastro; privo affatto delle macchie rosse e ugualmente colorato sul dorso che alla parte inferiore.

Non ho osservato differenze sessuali costanti di colore.

Dimensioni.

	LIGURIA							APPENNINO TOSCANO Tipi di Savi		LIGURIA	
	♀	♂	♂	♀	♀	♂	♀	♀	♂	juv.	juv.
Lunghezza totale . . . m.	0,081	0,080	0,089	0,083	0,076	0,088	(1) 0,097	0,063	0,080	0,061	0,036
» del capo . . »	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008	0,010	0,007	0,008	0,007	0,005
Larghezza » . . »	0,007	0,006	0,006	0,007	0,006	0,006	0,008	0,005	0,006	0,005	0,004
Lunghezza del tronco . . »	0,026	0,025	0,028	0,026	0,025	0,027	0,032	0,020	0,026	0,020	0,013
» della coda . . »	0,046	0,046	0,052	0,048	0,043	0,053	0,055	0,036	0,046	0,034	0,018
» delle estrem. ant. »	0,012	0,010	0,010	0,010	0,009	0,011	0,012	0,009	0,010	0,008	0,005
» delle estrem. post. »	0,013	0,012	0,012	0,011	0,010	0,012	0,013	0,010	0,012	0,009	0,006

La *Salamandrina perspicillata* è, fino ad ora, specie esclusivamente italiana. Qualche autore la cita di Dalmazia (2) ma ciò deve essere meglio accertato.

In Italia, per quanto se ne sa è specie Appenninica; essa si estende dal Genovesato ad Aspromonte. Duméril e Bibron (3) dicono: « un très-bel exemplaire venant de Sardaigne par M. Boié ».

Nessuno trovò mai, in seguito, la Salamandrina perspicillata in Sardegna; io credo che il Duméril e Bibron intendessero di indicare veramente l'isola di Sardegna poichè in un altro punto della descrizione essi dicono: « La queue est fort étendue. . . .

(1) Gli individui di queste dimensioni sono, a quanto pare, rari, io ne ho osservato un solo.
(2) Boulenger, *Catal. Batr. Grad.*, 1882. Questo autore fa tuttavia la citazione dubitativamente.
(3) *Herp. gener.*, vol. IX, p. 71.

ou moins dans l'exemplaire et mieux conservé parmi ceux que le Muséum possède et qui provient de la Sardaigne ».

Nessuno, ripeto, ha in seguito trovato la *Salamandrina perspicillata* in Sardegna. È d'uopo quindi accogliere con molto dubbio questo *habitat*, tanto più che l'articolo del Duméril e Bibron, relativo a questa specie, è singolarmente pieno di errori; fra gli altri ve ne è uno veramente curioso. Duméril e Bibron dicono: « M. le Prince Bonaparte *dit que les paysans de la Tarantaise craignent ce Reptile*, *auquel ils attribuent l'antique préjugé de faire mourir les bestiaux quand ils l'avalent avec leurs aliments* ». Ora il Bonaparte non ha mai detto una *eresia* simile. Egli dice: « *I contadini la dicono Tarantolino, e la paventano con l'antico pregiudizio attribuendole la mortalità degli armenti che l'abbian mangiata.* » Come si vede il Bonaparte non ha mai pensato di parlare della Tarantasia.

La Salamandrina si trovò con sicurezza nel Genovesato, Genova, Nervi, ecc. In Toscana, Lucca, Firenze, Caramanico, Pistoia, ecc. Si trovò nei monti della Garfagnana, negli Appennini di Ascoli, sul monte Laziale, sul Vesuvio, a Tiriolo nella Calabria e ad Aspromonte sul monte Maiella.

La Salamandrina perspicillata suole vivere nei luoghi freschi ed ombrosi in vicinanza delle fontane e dei corsi d'acqua, riparandosi sotto i sassi e nelle fessure delle roccie o fra le radici degli alberi. « Giù dai pendii nudi e rocciosi (dice il Lessona (1)) che s'innalzano semicircolarmente a guisa di anfiteatro intorno alla bella città (Genova) scendono ruscelletti che si fanno torrentacci negli aquazzoni, ma consuetamente hanno appena un filo d'acqua. Lungo il corso di questi ruscelletti si trovano di tratto in tratto delle pozze con pareti e fondo rocciosi, ove l'acqua limpida quasi ristagna e lentissimamente si rinnova, albergando vegetazione e vita animale inferiore. Poco discosto da questi ruscelli stanno sotto le pietre le Salamandrine, che lungo la state, come la Salamandra nera sulle Alpi, non si lasciano vedere, appaiono meno raramente l'inverno, sono numerose fuori lungo le pioggie autunnali, e in sul principio della primavera vengono all'acqua per l'opera della riproduzione, e poi per la muta della pelle.

È opinione nel volgo delle campagne in Toscana, nelle Romagne ed anche nel Genovesato che la *Salamandrina perspicillata* sia velenosissima, non è d'uopo confutare qui questo pregiudizio. La Salamandrina ha come gli altri urodeli una secrezione cutanea sulla quale tuttavia non si sono ancora fatti esperimenti. Il Ramorino (2) dice a questo proposito: « Si disse che la Salamandrina non ha questa secrezione, ed in realtà è assai difficile di constatarla, ove non si osservi con cura, ma se ciò si faccia, si scorge che la Salamandrina tormentata od anche solo afferrata quando è libera, si copre sul dorso di un sottile velo di un umore non bianco, come nella Salamandra, ma assai più scuro, motivo per cui non fu avvertito. Si vede questa secrezione ove si usi di un artifizio che consiste nel gettare nell'acqua l'animale e quivi irritarlo ».

(1) Michele Lessona, *Nota intorno alla riproduzione della Salamandrina perspicillata.* Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. X, 1874.

(2) Op. cit., pag. 17.

La riproduzione della Salamandrina perspicillata non è ancora intieramente nota. Gli autori che se ne sono occupati principalmente sono: Giovanni Ramorino (1), Michele Lessona (2).

Il Wiedersheim, nel suo lavoro già citato sulla anatomia della Salamandrina perspicillata critica acerbamente, fuor di ragione ed *evidentemente per partito preso* la nota del Lessona senza far conoscere tuttavia per proprio conto nessun fatto nuovo relativo allo sviluppo di questa specie. Le osservazioni del Lessona vennero del resto confermate pienamente dal Gasco (3). Io credo utile di riferire alcuni brani della memoria del Ramorino, tanto più che questa è assai rara.

« Al contrario di ciò che succede per gli altri batraci indigeni, quest'animale, in Liguria almeno non ha letargo invernale. È a vero dire, più raro il trovarlo, ma si trova e più volte ne potei avere durante il mese di dicembre, essendo le campagne coperte di neve; in Liguria sono i primi fra gli anfibii che diano opera alla riproduzione e quantunque questo tempo dipenda qualche poco dal più o meno precoce accrescimento della temperatura, si può asserire che al principio di marzo son già deposte le uova, e per la metà trovansi di già dei girini ».

. . . Le femmine depongono le uova dal principio di marzo fino alla metà di aprile. I luoghi da esse prescelti sono i rivi a piccolo corso d'acqua, ed in cui si trovano dei ristagni. Quando si avvicina l'epoca da sgravarsi, esse vanno a questi e stanno per più ore al fondo. L'uscita di ogni uovo è agevolata da movimenti di torsione che l'animale fa col corpo tenendosi aggrappato ai sassi, mentre la coda viene fortemente agitata: le uova escono ad una ad una (raramente a due assieme) e ad assai lunghi intervalli; cadute al fondo vi restano attaccate pel glutine che le circonda senza che la femmina prenda alcuna cura di esse; cosicchè se ne trovano di aderenti ai sassi, ai fuscelli secchi, alle foglie, ecc., che si trovino nell'acqua. In generale però son poste nel sito più favorevole per scansare l'urto violento delle acque ingrossate: le prime Salamandrine che occupano un punto del letto nel rivo, ove vogliono deporre le uova, si collocano sotto le pietre, e attaccano le uova alla volta che queste fanno sul terreno, al riparo di ogni ingrossamento d'acqua. Quelle che vengono dopo e trovano i posti buoni occupati, le collocano alla rinfusa, come si è detto ».

Il girino della Salamandrina rassomiglia assai a quello dei tritoni. Lo sviluppo embrionale dura 21 o 22 giorni. Verso il 55° giorno della sua vita si compie la metamorfosi. A questo periodo esso misura appena la lunghezza totale di m. 0,030.

---

(1) Op. cit.
(2) Op. cit.
(3) *Sugli amori del Triton alpestris.* Annali del Mus. civ. di Genova, vol. XVI, 1880, pag. 41, *Nota.*

EUPROCTUS Genè.

Genè, Synops. Rep. Sard. indig., Mem. Acc. Sc. Tor., s. II, vol. 1, pag. 282, 18 marzo 1838.

Quadrato iugale diretto dallo avanti allo indietro e faciente col mascellare inferiore un angolo più o meno acuto, arco fronto squamoso legamentoso od osseo.

L'Italia possiede due specie di questo genere:

l'*Euproctus Rusconii.* Genè, e
l'*Euproctus montanus.* Savi.

che si possono distinguere facilmente così:

I. Arco fronto squamoso legamentoso. — Parotidi ben spiccate.
Euproctus montanus.

II. (1). Arco fronto squamoso osseo — parotidi mancanti.
Euproctus Rusconii.

Queste due forme riunite in una sola dal Bonaparte e da molti autori posteriori a lui sono invece molto distinte fra loro. Oggigiorno del resto ciò è ammesso da tutti i migliori Erpetologi. Si consulti per quanto riguarda la storia di queste due forme e le ragioni per le quali esse debbono essere considerate come specie distinte soprattutto il recente e diligentissimo lavoro del Bedriaga. *Beiträge zur Kenntniss der Amphib. u. Rep. Corsika. Arch. f. naturg.* 1883.

Le specie di questo genere sono limitate sino ad ora, una *E. montanus* (Savi) alla Corsica e l'altra l'*E. Rusconii* (Genè) alla Sardegna.

Euproctus montanus (Savi).

Molge platycephala (partim) Gravenh. — Deliciae mus. zool. vratisl. 1 Rept. Lipsiae 84 (1829). Bedriaga Zool. Anz. p. 451 (1879).

Megapterna montana. Savi. — Descrizione di alcune nuove specie di Mam. e Rett. Ital. Nuovo gior. dei letterati n° 102 Pisa (1839) — Bedriaga Zool. Anzeiger 1882, p. 45 — Amph, ecc. Rept. Corsika Arch. f. nat. pag. 127 e seg. 1883, tav. III a V.

Euproctus platycephalus (partim). Bonaparte. — Ico. faun. Ital. (1839). Gray (partim) Cat. Batr. Grad. Brit. Mus. p. 24 (1850). Gervais (partim). Ann. Sc. Nat. 3° ser. vol XX, p. 314 (1853). De Betta (partim) Monogr. Anf.

(1) In questa sezione entrerebbe anche l'*E. asper* (*Euproctus pyrenaeus* Dugès) dei Pirenei.

Urodeli Ital. M. R. Istitut. Veneto vol. XI, p. 556 (1864) — Fauna d'Italia Rett. ed Anf. p. 91 (1874) — Lataste Rev. intern. des Scienc. 42, p. 495 (1878), Bull. soc. Zool. de France, p. 304 (1878) — Giglioli B. z. Kenn. d. Wirbel. Ital. Arc. f. Natur. vol. 1, p. 93 (1879) — De Betta. Nuova serie di note erpetol. *Atti R. Istit. Venet.* Ser. V, vol. V (1879).

Euproctus Rusconii (partim). — Dum. et Bibron. Erpétol. général. vol. IX, pagina 159 (1854).

Euproctus montanus. Giglioli. — Nota sulle specie ital. del genere Euproctus — Ann. Mus. Civ. di Genova, vol. XIII (1878) p. 579 — Corsican Herpetology in Nature vol. 19, n. 475, p. 97 (1878) — Bedriaga. Zool. Anz. 1879) p. 451. — Bull. Soc. Impér. des natur. de Moscou n° 4, p, 321 (1880). Giglioli. — Elenco dei Mam. e degli Ucc. Ittiol. e Anf. e pesci italiani. Firenze (1880), p. 16. — L. Camerano. Ub. die Ital. Euproctus arten. zool. Anzeig. p. 45, (1881). Mario Lessona. Contributo allo studio della pelle degli Urodeli Mem. R. Acc. d. Sc. di Torino, Sez. II, v. XXXIV (1881). De Betta. Terza serie di note erpetologiche. Mem. R. Ist. Venet., ser. VI, vol. 1 (1883).

Pelonectes platycephalus (partim). Fitzinger. — Syst. rept. p. 33. 1 (1843).

Triton platycephalus (partim). Strauch. — Révision d. Salamand. Gattung. Mém. Acad. des Scienc. de St.-Pétersb. VIII Sér., vol. XVI (1870) (partim). — Schreiber Herpetologia europaea, p. 34 (1875).

Molge (1) *montana* Boulenger. — Cat. Batrac. Graden. Brit. Mus., p. 23 (1882).

a — 4 Esemplari Corsica dal Prof. Giglioli, 1878.

b — 4 Esemplari Corsica avuti dal Dott. I. Bedriaga, 1883.

c — Oltre 50 individui adulti, giovani e in istato di larva di Corsica avuti in comunicazione dal Dottor I. Bedriaga 1884.

Arco fronto squamoso legamentoso. Capo appiattito e poco distinto dal corpo: parotidi ben spiccate: denti palatini disposti ad Λ, tronco mediocre subcilindrico: estremità sottili, anteriormente le dita appuntite e libere: posteriormente 5 dita appiattite, appuntite e libere; la fibula presenta un rigonfiamento diretto in basso, e verso l'esterno a mo di sperone, nella femmina è poco sviluppato, nel maschio lo è molto di più e presenta talvolta un rivestimento corneo; coda ciclo-tetragona alla base, compresso nel resto; dorso senza cresta nei maschi: pelle grossolanamente granulosa. Parti superiori di color bruno più o meno intenso con macchie bruno-scure irregolari e talvolta con una linea longitudinale mediana più chiara nei maschi, di color bruno verdastro, macchiettato di bruno e con una linea mediana longitudinale gialliccia nelle femmine. Parti inferiori di color grigio rossastro e giallastro con o senza piccole e numerose macchiettature sbiadite.

Dimensioni medie, lunghezza totale ♂ m. 0,085, ♀ 0,083.

Il capo è sottile ed appiattito soprattutto verso la parte anteriore: esso è spiccatamente più lungo che largo. La distanza che è fra gli occhi superiormente è eguale

(1) *Molge. Merr.* (1820) non Gravenh. (1829).

a quello che fra le narici e che è fra l'angolo anteriore dell'occhio e le narici. Il capo è superiormente piano: la parte superiore è nettamente separata dalle guancie per mezzo di uno spigolo assai spiccato: la mandibola superiore sporge sulla inferiore di un millimetro circa; il muso è arrotondato.

La bocca è ampia e lo squarcio oltrepassa l'angolo posteriore dell'occhio di una quantità eguale a quello che è fra l'occhio e le narici.

Fig. 3. Schema dei denti palatini dell'*Euproctus montanus*

La lingua è relativamente grande e subovale. I denti palatini sono disposti in due serie longitudinali riunite fra loro per un buon tratto anteriormente e divergenti allo indietro come un λ rovesciato.

L'occhio è relativamente piccolo e poco sporgente, il suo diametro massimo trasversale è eguale alla distanza che è fra l'occhio e le narici.

La lunghezza del capo è contenuta tre volte e tre quarti circa nella lunghezza del corpo nelle femmine e tre volte circa nei maschi.

Il tronco è mediocre, subcilindrico e poco distinto dal capo.

Le estremità sono in complesso piccole: le anteriori sono di poco più corte delle posteriori, ripiegandole lungo i fianchi, le dita più lunghe delle une arrivano alla base delle dita più lunghe delle altre. Le dita delle estremità anteriori sono 4, piccole, subattrachite, appuntite e libere, il 1° dito è il più corto, il 4° è un po' più lungo poi viene il 2° e poi il 3° che è il più lungo di tutti. La faccia palmare è rugosa, ora senza tubercoli, ora con due ingrossamenti tuberculiformi, uno più grosso, alla base del 4° dito ed uno più piccolo alla base del 1°.

Nelle zampe posteriori le dita sono 5, sono più lunghe, anche un po' più appiattite delle anteriori: sono libere. Alla base delle dita si osserva tuttavia una piccolissima membranella interdigitale. Il 1° dito è il più corto, il 5° è un po' più lungo, poi viene il 2°, poi il 4°, e poi il 3° che è di poco il più lungo. Nessun tubercolo sulla faccia plantare.

Il rialzo cloacale è conico o subconico.

La coda è ciclo-tetragona alla base e fortemente compressa lateralmente nel resto: la sua forma e la sua lunghezza sono variabili, nei maschi pare più lunga e assottigliata; nella parte ciclotetragona è superiormente e inferiormente carenata.

I maschi si distinguono facilmente dalle femmine per la presenza di un grosso sperone fibulare rivestito generalmente di uno strato corneo più o meno spiccato. Nelle femmine esiste una protuberanza fibulare: ma molto meno spiccata.

La pelle è sottile e liscia e talvolta con grossi tubercoli sparsi qua e là: sul capo è frequentemente granulosa, soprattutto nella parte anteriore.

Le parotidi sono ben spiccate e lunghe un sei o sette millimetri e larghe tre o quattro.

Non vi è cresta dorsale nel maschio. Frequentemente sui fianchi e sulla coda vi sono lateralmente delle strie verticali che danno a queste parti un'apparenza di segmentazione.

La pelle delle parti inferiori è sottilissima e lascia scorgere il colore dei visceri.

Colorazione. — In quanto riguarda la colorazione io credo utile di riferire qui ciò che dice il Bedriaga nel suo esteso lavoro sugli *Euproctus* di Corsica e di Sardegna non avendo io potuto esaminare che animali conservati nell'alcool.

La Megapterna montana, per quanto ne so, si presenta in due o tre varietà di colori.

In una di queste varietà che io chiamerò Var. *marmorata*, la tinta fondamentale della parte superiore del corpo è scura o bruna olivastra. Sul tono fondamentale, specialmente nella femmina, spiccano delle macchie verdi chiare, verdi scure o d'un verde grigiastro.

Osservando più accuratamente l'animale si vede che queste macchie diversamente conformate, tendono a ordinarsi in parecchie serie trasversali e sono seminate di punticini bruni i quali non rappresentano altro che piccole verruche. Le macchie aumentano decisamente di grandezza sui lati della coda. Verso il ventre il verde di queste macchie si fa più chiaro; per lo più si riuniscono insieme e formano d'ambo i lati delle striscie longitudinali. Dalla nuca alla punta della coda si presenta una linea gialla, d'un rosso aranciato o d'un giallo bruno, la quale del resto è per lo più attraversata dalla superficie dorsale verde. Questa linea mediana, per lo più spiccata, non va fin sulla testa, ma vi è rappresentata da una striscia bruna scura che comprende la zona mediana della parte superiore della testa, divide gli archi delle parotidi, e si spiega in rami laterali verso gli occhi. Il contorno del muso è bruniccio; le guancie, di tinta fondamentale bruna-chiara, sono macchiate di verde sporco. La parte superiore delle estremità è macchiata di verde grigio sul bruno chiaro. Le dita hanno superiormente delle striscie trasversali brune-chiare e verdi grigie. Per ciò che riguarda la colorazione della superficie inferiore delle varie parti del corpo, dirò che questa colorazione è assai modificata dagli organi trasparenti sotto la pelle sottilissima. Così per esempio, la pigmentazione grigia, per lo più predominante, anteriormente è modificata dal colore del fegato nella regione della gola e sulle estremità dal rosso dei vasi sanguigni. Il ventre e specialmente le sue parti laterali, s'imperlano di un bianco di latte, e di un bianco giallognolo; in molti individui ciò accade in modo assai evidente. I punti chiari sono spesso tanto numerosi che danno al ventre una vera tinta bianchiccia o giallognola. La pupilla è ovale trasversalmente. L'iride di un giallo-arancio è screziata di bruno scuro, screziatura più spiccata anteriormente. Sulla gola e specialmente sui margini di essa, ci sono dei punti e delle macchie chiare.

Al tempo degli amori, come si capisce, tutte le colorazioni si fanno un po' più spiccate, e specialmente nel maschio. Ma, fuorchè in questo periodo il maschio ha delle colorazioni meno belle di quelle della femmina; appunto in quest'epoca nel maschio si sviluppa il tono fondamentale bruno a spese della macchiettatura verde, che ci ricorda quella del *Triton marmoratus*. Bisogna tuttavia osservare che, tanto la forma quanto il numero e la grossezza delle macchie verdi sono piuttosto notevoli e che esse si presentano talora come striscie sottili, e talora come disegni in forma di delta o di occelli. In quest'ultimo caso il verde cede ordinariamente il posto ad un tono giallo-aranciato. Questa varietà si trova a Bastelica.

Gli esemplari di Megapterna montana, osservati e raccolti nei dintorni di Bastia, sono affini alla varietà precedente per la tinta fondamentale scura e pel disegno marmoreggiato di macchie verdi. Le macchie della parte superiore del corpo sono d'un verde metallico scuro e coprono tanto la tinta fondamentale bruno-scura o nera, che questa non appare più che in forma di linee serpeggianti. Sulla parte inferiore

del corpo la tinta fondamentale è bruna o bruno-scura. In questo fondo scuro spiccano sul ventre e sui fianchi numerosi punti che diventano madreperlacei al tempo degli amori. L'iride è d'un rosso di rame, con una linea perpendicolare nera.

Questa Megapterna montana, provveduta di una breve coda e di una pelle meno ruvida, anzi perfino viscida al tocco, secondo me, dovrebbe essere distinta con una denominazione speciale di sotto specie; ma io lascerò questo ufficio a quelli che saranno in grado di esaminare un maggior numero di esemplari.

Mentre questa Megapterna montana, vivente nel Nord della Corsica presenta delle variazioni locali di forma e di colore, presso Bastelica, ed anzi nel fiume Prunelli, troviamo una terza varietà costante di colore che vive in *relazione* colla forma marmoreggiata più sopra descritta ed ha un abito assai più semplice di quella. Astrazione fatta dalla striscia mediana dorsale giallo-arancia o gialla, che si estende pure sulla coda ove però non è più ben distinta, troviamo nella parte superiore di questa varietà due tinte di bruno, un nocciuola chiaro, diffuso per lo più sulla testa, sul tronco e sulla coda e un tono giallo-bruno o bianco-grigio che si presenta da ogni parte in forma di una striscia laterale. Queste striscie laterali separano la zona dorsale scura dalle striscie bruno-scure o bruniccie, collocate verso l'infuori, che nascono ora sul margine posteriore degli occhi, ora sulla spalla e che si estendono fino alla radice delle estremità posteriori ed anche più oltre. Mentre le striscie giallo-brune o bianco-grigie dei lati della testa sono appena accennate e, nella maggior parte dei casi, si riconoscono soltanto da una macchia giallognola nella regione delle parotidi, le striscie scure più sopra nominate sono evidentissime nella regione temporale dell'animaletto e specialmente al tempo degli amori. Esaminando più attentamente questa forma si osserva una leggera traccia di macchie più chiare sulla parte superiore del tronco. Queste macchie, come vedremo più tardi, non sono altro che gli avanzi di quelle che adornano l'abito giovanile della Megapterna montana e che sono conservate in massima parte dalla varietà di colore prima descritta. Vediamo inoltre che le striscie laterali chiare sono costituite di un gran numero di macchie ordinate in serie longitudinali e confluenti fra loro. Nella terza forma di questa specie che c'interessa in questo momento, la macchiettatura, riccamente rappresentata in origine si è mantenuta meglio che non in tutte le altre regioni sui lati della coda nell' animale adulto, tuttavia appare in esso di un giallo-grigio o giallognolo, mentre gli individui giovani presentano maculature verdi. Le estremità scure superiormente o d'un bruno nocciuola chiaro sono macchiate di giallognolo. Il ventre è colorito in modo simile a quello della forma marmoreggiata. Il rigonfiamento cloacale appare parimente rosa-giallognolo come nella forma suddetta. Al tempo degli amori i colori si rischiarano considerevolmente. Il bruno scuro della parte superiore del corpo diventa bruno giallo e le striscie del tronco appaiono d'un bianco giallognolo. In un individuo maschio di Megapterna da me trovato, l'impallidirsi dei colori era tanto notevole, che l'animale appariva quasi bianco giallognolo, misto di carnicino. In un altro maschio si vedevano sul dorso dei geroglifici gialli che tuttavia scomparivano subito appena l'animale veniva messo nell' acquario.

Gli esemplari giovani, come abbiamo già detto, hanno una grande affinità colle femmine della *M. montanae marmoratae.* Ho dinanzi a me due individui d'età diversa, lunghi, uno 48 mm. e l'altro 54 mm. che non differiscono per nulla fra loro.

Il fondo nero o nero-bruniccio della parte superiore di tutte le regioni del corpo appare invece interrotto e in parte ricoperto da grosse maculature d'un verde erba, ramificate o riunite fra loro ; altre volte invece compaiono sulla superficie inferiore dei piccoli occhielli ora semplicemente verdi, ora d'un verde metallico, oppure anche delle striscie irregolari di macchie confuse fra loro, che si estendono trasversalmente sul dorso. Superiormente esistono delle macchiette giallo-dorate sugli angoli anteriori e posteriori degli occhi ; negli esemplari di color scuro queste macchie sono particolarmente distinte. Negli individui vecchi non esiste per lo più traccia alcuna di questo ornamento che dovrebbe spettare piuttosto all'abito del tempo degli amori, perchè in quasi tutti gli urodeli tritonici lo splendore argenteo o dorato appare più spiccato appunto in questo periodo.

Potei scoprire soltanto in alcune Megapterne sessualmente mature e intensamente colorite una costante punteggiatura giallo-dorata sulla regione del muso e sul margine posteriore dell' orbita , od una punteggiatura di splendore argenteo sulla gola e sul ventre. Questa mancanza di splendore metallico negli esemplari a respirazione polmonare è tanto più sorprendente , inquantochè le larve ne sono riccamente provvedute. La linea mediana dorsale è generalmente assai distinta negli individui giovani che non nei vecchi, ed appare molto risplendente d'un rosso aranciato o d'un giallo dorato.

Le larve, lunghe 45 mm., appena si trovano nell'acqua profonda diventano nere, ad eccezione della suddetta linea dorsale giallo-arancio o d'un rosso di ruggine. Ma se poniamo queste larve in un vaso basso, pieno d'acqua, il loro colore si rischiara subito e si riconosce allora che la colorazione scura non è distribuita egualmente sulla parte superiore del corpo, ma presenta piuttosto un gran numero di macchie nere, molto ravvicinate sopra un fondo color grigio d'acciaio o grigio giallognolo. Sui fianchi del corpo e specialmente sui margini delle labbra le macchie appaiono circondate da una materia colorante gialla iridescente ; sui limiti del ventre e sui lati della coda si ramificano e sono provvedute di appendici brune più o meno distinte. L'orlo della pinna caudale trasparente, presenta delle macchie grigie poco evidenti. Il ventre e la regione della gola hanno parimente delle macchie grigie di cui i contorni sono spesso confusi. La pelle inferiormente è tanto sottile, che si può distinguere il fegato , lo stomaco e gli intestini. Le piante dei piedi non hanno macchie e sono grigie chiare. Le branchie infine rosse o violacee.

La differenza tanto notevole nel colore delle larve della Megapterna montana, secondochè esse si trovano nell'acqua più o meno profonda, mi conduce ad ammettere che gli anfibi in generale diventino più scuri immergendoli nell'acqua e più specialmente nell'acqua profonda, come fanno per la privazione della luce. Per esempio le larve della Megapterna montana diventano più chiare, quanto più si avvicinano alla loro metamorfosi finale e scelgono per dimora le acque meno profonde. Il color nero si muta in bruno-nero o in bruno-olivastro ; il grigio-acciaio o il grigio-giallo cede da principio il posto al tono giallo-bruno o verdognolo che più tardi passa in verde spiegato.

Per l'occasione osserverò che le Megapterne adulte e i *Discoglossus pictus* che ebbi l'opportunità di osservare in Corsica, nell'acqua appaiono più scure che non sulla terra. Leydig nota un caso simile nella *Rana platyrinus*.

Dimensioni.

	♀	♂	♂	♀	juv.	juv.	GIOVANE colle branchie	GIOVANE colle branchie
Lunghezza totale . . . . m.	0,083	0,085	0,089	0,082	0,051	0,042	0,46	0,050
del capo . . . »	0,011	0,011	0,011	0,010	0,007	0,006	0,007	0,008
Larghezza » . . . »	0,008	0,009	0,008	0,008	0,006	0,005	0,006	0,006
Lunghezza del tronco . . »	0,035	0,034	0,034	0,035	0,021	0,016	0,016	0,019
» della coda . . »	0,037	0,040	0,044	0,038	0,023	0,020	0,023	0,023
» delle estremità ant. »	0,013	0,014	0,015	0,014	0,009	0,008	0,007	0,008
» delle estremità post. »	0,015	0,016	0,016	0,014	0,011	0,009	0,007	0,008

L' *Euproctus montanus* non venne trovato fino ad ora che in Corsica. I suoi costumi, la sua riproduzione e il suo sviluppo non sono ancora intieramente noti. Ciò che si sa in proposito lo si deve in massima parte al Bedriaga.

Avrei da osservare quanto segue sui luoghi in cui soggiorna la Megapterna montana e sulle condizioni della sua vita. La Megapterna sembra appartenere esclusivamente alla fauna della Corsica. Finora almeno non fu mai trovata nei paesi circonvicini e pare che manchi pure nella vicina Sardegna. Mi stanno dinanzi alcune memorie secondo cui nei monti dell'Ungheria settentrionale si trova una Salamandra apparentemente simile alla Megapterna montana; tuttavia io credo che delle ricerche più esatte dimostrerebbero senza dubbio che la Salamandra ungherese, sebbene possa appartenere casualmente al genere Megapterna o *Euproctus*, specificamente è diversa dalla forma corsicana. La Megapterna montana s'incontra dappertutto sulle montagne della Corsica, ma è assai più rara nelle bassure e sulle coste ove giunge isolatamente essendovi gli esemplari adulti, le larve o le uova trascinate dai torrenti di montagna. I veri luoghi in cui soggiorna sono le alte montagne e le strette gole delle valli elevate. Nelle mie escursioni in Corsica raccolsi a preferenza le Megapterne nelle catene di monti che circondano il Monte Renoso. Gli scritti di De-Betta e di altri autori ci dicono che questa Salamandra è pure stata trovata ai piedi del Monte Rotondo, nella valle Restonica, per esempio a Zincava e presso Fontanone. Quest'animale è pure assai frequente nei dintorni di Bastia, nella valle Suärta, tuttavia in tali luoghi non fu sempre trovata allo stato di larva, il che mi fa supporre che il fregolo vi sia portato in primavera o in autunno dai torrenti che scendono dai monti e che soltanto alcune larve vi compiano la loro trasformazione e rimangono in vita, visto che i serbatoi d'acqua dei dintorni di Bastia sono asciutti nel forte dell' estate. Un luogo propizio per la pesca delle larve della Megapterna montana è inoltre la val d' Orezza dove si possono prendere facilmente nel fresco torrente ombreggiato che scorre nella stretta gola la quale separa il piccolo villaggio di Stazzona da Carchetto.

Non trovai mai traccia della Megapterna montana nelle acque stagnanti. Quando gli autori italiani citano « le acque correnti e stagnanti » come soggiorno della

Megapterna, dell'*Euproctus montanus*, per acque stagnanti devonsi intendere i piccoli laghi o « pozzi » volgarmente detti, oppure quei serbatoi vicini ad un torrente della montagna, da cui possono essere alimentati, perchè la Megapterna montana evita affatto le acque veramente stagnanti, come per esempio, quelle che si trovano sulle basse coste della Corsica; tali paludi della Corsica sono ordinariamente salate ed esposte ai caldi più forti. La condizione principale d'esistenza per le Megapterne adulte come per le loro larve è dunque la fresca e limpida acqua dei monti.

Gli esemplari adulti cercano l' acqua soltanto nel periodo degli amori, ossia in primavera e in autunno, stagioni in cui non la abbandonano mai. Pare anzi che in questo periodo il loro organismo si adatti così bene alla vita acquatica, che gli animali non possono più vivere fuori dell' acqua. Quando andavo alla pesca di queste Salamandre avevo sempre la precauzione di tenere pronto un vaso pieno d'acqua o un sacchetto umido per installarvi subito gli animali presi. Il fatto che le Megapterne nel tempo degli amori muoiono subito appena si trovano sul terreno asciutto, mentre possono continuare benissimo a vivere ravvolte in panni umidi, fa supporre che in questo periodo l' aria asciutta eserciti sulla pelle un' influenza mortale, che si spiega nella diversità delle condizioni di struttura che ha la pelle di questi animali nel tempo degli amori.

Finita l'opera della riproduzione questi animali abbandonano l'acqua e diventano terragnoli. Le ricerche da me fatte allo scopo di determinare il tempo in cui incomincia la vita acquatica o terragnola di questa Salamandra mi hanno persuaso che la Megapterna è affatto soggetta alle variabilissime condizioni climateriche della Corsica, e che nelle diverse località incomincia in tempi pure diversi la sua vita acquatica o terrestre. Di regola in primavera se ne va nell'acqua, appena la neve ha incominciato a sciogliersi, cioè dalla fine di marzo al principio di maggio. Dal principio di maggio alla fine di giugno la Megapterna abbandona l' acqua per menare vita terragnola, ritirandosi sotto le radici dei castagni. In questo tempo si può trovarla per caso sradicando un albero, ma sempre in uno stato di semi-sbalordimento e in agglomerazioni di molti individui. Non posso asserire che la Megapterna abbia in tali circostanze una sorta di letargo estivo, ma è certo che i primi individui che si lasciano vedere nell'acqua paiono sempre mezzi morti di fame e che la Megapterna non si nutre affatto o pochissimo nel tempo in cui sta sulla terra. Le prime pioggie dell'autunno traggono la Megapterna fuori del suo nascondiglio. Alla metà di settembre o al principio d'ottobre la troviamo di nuovo nell'acqua. Mi fu concesso di osservare il principio del secondo periodo degli amori in due località della Corsica, e questo fu nei primi giorni di settembre a Bastelica, non lontano dal monte Renoso e in principio di ottobre nei dintorni di Bastia. A Bastelica che, relativamente ai dintorni di Bastia ha un clima nordico, questi animali alla fine di settembre avevano già terminata l' opera della riproduzione ed erano scomparsi. La caccia alla Megapterna montana è assai difficile perchè il soggiorno acquatico di questo animale avviene in tempi diversi secondo le varie località; si potrebbe girare tutta la Corsica anche nelle epoche acconcie senza trovare un esemplare adulto di questa Salamandra. Facendo la piacevole scoperta che il tempo del suo soggiornare nell'acqua non è ancora incominciato, o è già finito. Se, per caso, si arriva in qualche luogo nel momento giusto, il

più delle volte si rimane disillusi dallo scarso bottino che si fa di individui adulti specialmente se si crede che le Salamandre caudate si trovino riunite in gran copia durante il periodo degli amori. Trovai di rado più di due Megapterne insieme in uno stesso luogo o in luoghi poco discosti fra loro.

La metamorfosi della larva avviene in primavera e in autunno. Posso determinare con precisione l'epoca di trasformazione della larva in alcune località abitate dalla Megapterna; quest'epoca dipende dai rapporti climaterici delle varie località e varia in conseguenza. Dal primo settembre al 15 settembre trovai nell'alta Bastelica delle larve vicine alla trasformazione; altre che avevano già branchie trasformate ed altre infine che misuravano appena 20 mm. e dovevano passare l'inverno nell'acqua sotto il ghiaccio, il che corrisponde precisamente a ciò che abbiamo veduto per la Salamandra terragnola. Pochi giorni più tardi nei dintorni di Bastia non trovai più larve atte alla trasformazione. A Bastia, dove la primavera incomincia assai più presto che a Bastelica, e l'estate è caldissimo e dura molto tempo, la seconda epoca di trasformazione era già passata.

Euproctus Rusconii, Genè.

Molge platycephala (partim), Gravenhorst (1), Deliciae, Musei, Zool. vratislav., pag. 84 (1829).

Euproctus Rusconii, Genè, Synop. Rept. Sard., Mem. Acc. Torino, ser. II, vol. 1, p. 282, fig. 3-4 (1838) — Wiedersheim, Bemerk. z. Anat. des Eupr. Rusconii, Ann. Mus. Civ. di Genova, vol. XII, pag. 545, tav. XX (1875) — Giglioli, Nota sulle specie ital. del genere Euproctus, Ann. Mus. Civ. di Genova, vol. XIII (1878) — Corsican, Herpetology, Nature, vol. 19, n. 475 (1878) — Bedriaga, Zool. Aug. (1879) — Bull. Soc. Impér. des natur. de Moscou, n. 4, p. 321 (1880) — Giglioli, Elenco dei Mamm., Ucc. e Rett., Ittiol. Anf. e Pesci Ital., Firenze (1880), pag. 16 — L. Camerano, Ueber die italienischen, Euproctus Arten. Zool. Anz., p. 45 (1881) — Mario Lessona, Contributo allo studio della pelle degli Urodeli, Mem. R. Accad. d. Sc. di Torino, ser. II, v. XXXIV (1881) — De Betta, terza serie di Note erpetologiche, Mem. R. Ist. Venet., ser. VI, v. 1 (1883) — Bedriaga, Arch. fr. Naturg. (1883).

Euproctus Rusconii (partim) Dum. e Bibr., Erpét. générale, vol. IX, p. 159 (1854).

Euproctus platycephalus (partim), Bonaparte, Faun. ital. (1839), Gray. Catal. Batr. Gradent. Brit., Mus., p. 24 (1850) — Gervais, Ann. Sc. Nat. 3. ser., vol. XX, p. 314 (1853) — De Betta, Monogr. Anfib. Urod. ital., Mem. R. Istitut. Venet., vol. XI, p. 556 (1864), Fauna d'Ital., Rett. e Amph., p. 91 (1874) — Nuova Serie di Note erpetol., Att. R. Istit. Veneto, Serie V, vol. V (1879).

Pelonectes platycephalus (partim), Fitzinger, Syst. rept., p. 33 (1843).

---

(1) *Molge Merr.* (1820) non Graven. (1829).

Triton platycephalus (partim), Strauch., Revision d. Salamandriden Gattung., Mém. Acad. St-Pétersb., VIII sér., vol. XVI (1870) — Schreiber Herpet. europ., p. 54 (1873).

Molge rusconii, Boulenger, Cat. Batr. Grad. Brit. Mus. p. 24 (1882).

a) 17 esemplari Sardegna, Prof. Genè.

b) 4 esemplari tre ♂ e una ♀ Sardegna, avuti in comunicazione dal Dottore I. Bedriaga, (1884).

Arco fronto squamoso osseo, capo appiattito, depresso anteriormente e abbastanza distinto dal tronco, parotidi mancanti, denti palatini disposti ad Λ colla parte superiore molto lunga e coi due rami inferiori corti e poco divergenti, talvolta le due serie palatine spiccatamente discoste nel ramo superiore, tronco subcilindrico ed allungato, estremità superiori sottili con 4 dita lunghe, appiattite, appuntate e intieramente libere, estremità posteriori corte e tozze con 5 dita mediocremente lunghe, appiattite, appuntate e libere ; la fibula presenta esternamente un tubercolo digitiforme nei maschi e una piccola prominenza nelle femmine (1). — La coda è ciclo-tetragona alla base e notevolmente compressa ai lati. — Dorso senza cresta nei maschi, pelle sparsa di numerosi, piccoli e ben spiccati granuli rialzati. — Parti superiori di color bruno più o meno scuro e più o meno olivastro con macchiettature poco distinte, di color ruggine, sui fianchi e sulla coda numerose macchiettature nerastre più o meno spiccate, i margini della coda sono più chiari e di color ferrugineo , spesso una linea mediana longitudinale più chiara sul dorso, le parti inferiori sono rosse ferruginose, o grigiastro-chiare, con macchiettature brunastre. Dimensioni medie. Lunghezza totale ♂ m. 0,100, ♀ m. 0,085.

Capo relativamente grande e distinto dal tronco, piano superiormente e depresso e subconico anteriormente, la distanza che è fra gli occhi superiormente alquanto più piccola di quello che è fra l'occhio e la narice ed eguale a quella che è fra le due narici.

Il capo è notevolmente più lungo che largo, le guancie sono molto inclinate, ma separate per mezzo di un rialzo sensibile dalla parte superiore del capo, le narici sono

(1) A questo riguardo debbo far notare che il GENÈ, che primo descrisse questa specie si sbagliò nel caratterizzare i sessi, egli dice (*Sinop. Rep. Sard.* Mem. Acc. Torino, Ser. II, vol. 1). *Mas. tibiis posticis laevibus. Foemina tibiis posticis calcaratis*, ora le cose vanno precisamente al contrario. La stessa cosa si deve dire per le altre differenze sessuali che egli cita in seguito nella descrizione relativa alla cloaca, alla mole ecc. Io ho esaminato i tipi del GENÈ, e precisamente l'esemplare da lui figurato, tav. I, fig. 3, come femmina: esso invece è un maschio. Tutti gli autori posteriori seguendo il GENÈ sono caduti nello stesso errore, ed in vero non poteva passare per la mente di alcuno che il GENÈ avesse commesso un tale *qui pro quo*. Il BEDRIAGA nel suo recente studio sugli *Euproctus* (*Ber.. Kenn. Amph. Corsik.* Arch. nat. 1883 caratterizza giustamente i due sessi e dubita della esattezza delle descrizioni degli Autori relative alle differenze sessuali. Egli tuttavia non avendo potuto osservare il lavoro del GENÈ e i tipi, non ha potuto sciogliere recisamente la questione. Anche l'esemplare figurato non troppo esattamente dal BONAPARTE nella *Iconografia della Fauna italica* è un maschio e non una femmina.

Anche nell'*Euproctus montanus* era accaduto un errore analogo, che il BEDRIAGA (op. citat.) corresse.

Nel *Catal. of Batrach. Graden. of Brit. Mus.* del BOULENGER le differenze sessuali, di queste due specie, sono esattamente indicate.

terminali, il muso è quasi diritto anteriormente e sporge sulla mandibola inferiore di un buon millimetro.

L'occhio è piccolo e poco sporgente, il suo diametro trasversale è eguale e contenuto una volta e mezzo circa nella distanza che separa l'angolo anteriore dell'occhio delle narici, la bocca è ampia, lo squarcio boccale oltrepassa alquanto l'angolo posteriore dell'occhio, talvolta di un tratto eguale al diametro dell'occhio stesso, i mascellari superiori sono sporgenti allo infuori sotto gli occhi.

La lingua è piccola, subovale quasi piriforme e libera alquanto ai lati.

Fig. 4.
Schemi dei denti palatini dell'*Euproctus Rusconii*

I denti palatini sono disposti in due serie longitudinali, le quali sono parallele e rovesciate fra loro per un tratto più o meno lungo anteriormente e divergono posteriormente a guisa di Λ talvolta non sono rovesciate anteriormente e ricordano allora un po' la forma di quelli delle Salamandre.

La lunghezza del capo è contenuta tre volte circa nella lunghezza del tronco.

Il tronco è subcilindrico ed allungato. Non ho osservato differenze notevoli nei due sessi.

Le estremità anteriori sono sottili, ripiegate lungo i fianchi, arrivano alla metà di questi nei maschi, vi arrivano stentatamente nelle femmine. Le dita sono 4 subcilindriche e libere. Il 1° dito è il più corto, il 4° è un po' più lungo del 1°, il 2° è notevolmente più lungo del 4° e il 3° è notevolmente più lungo del 2°. Le dita sono leggermente rigonfiate all'apice nella parte inferiore. La faccia palmare è priva di tubercoli.

Le estremità posteriori sono di poco più lunghe delle anteriori, ma sono, soprattutto nei maschi, più tozze e più robuste. Le dita sono 5, lunghe, sottili, poco appiattite e libere (in una femmina ho osservato in una zampa una struttura anomala, vale a dire il 5° dito è unito col 4° e il 3°, il 2° e il 1° sono uniti fra di loro per mezzo di una membrana interdigitale assai spiccata, l'altra zampa è normale). Il 1° dito è il più corto, il 2° e il 3° sono più lunghi e quasi eguali, il 4° è notevolmente più lungo del 2°, il 3° è un po' più lungo del 4°.

Nel maschio la fibula presenta nella sua parte esterna ed inferiore un tubercolo digitiforme molto sviluppato. Nella femmina esiste soltanto una protuberanza più o meno spiccata. Il tubercolo dei maschi si riconosce assai bene anche nei giovani. La faccia plantare è priva di tubercolo.

La coda è allungata e sottile, più o meno ciclotetragona alla base e più o meno compressa nel rimanente. Essa conserva superiormente ed inferiormente una piccola membrana analoga a quella del girino. Questa membrana è tuttavia di sviluppo assai vario, raramente essa giunge fin presso il livello dell'inserzione delle estremità posteriori. Anche la lunghezza della coda è variabile; ora essa è lunga come il tronco e il capo, ora è un po' più lunga; nelle femmine e nei giovani è in generale un po' più corta.

Il rigonfiamento cloacale è conico nei due sessi.

La pelle non è molto spessa ed è sparsa di minute, ma ben distinte e sporgenti granulazioni a mo' di piccole spine, queste sono principalmente abbondanti nei fianchi. Le parti inferiori sono quasi totalmente liscie. Non vi sono parotidi.

In quanto alla colorazione non avendo potuto esaminare che individui conservati in alcool, riferisco qui ciò che dice il Bedriaga nell'opera ripetutamente citata.

La parte superiore del mio esemplare è d'un grigio cenerognolo. Sui fianchi sono distribuite delle macchie bruno-chiare. Nella metà del dorso, anzi nella linea longitudinale scavata scorre una striscia spiccata che passa sulla testa, ma finisce alla radice della coda.

Presso le narici e sulle palpebre superiori esistono delle macchie gialle. La superficie inferiore di tutte le parti del corpo è giallognola o d'un bianco grigio con numerose macchie sulla gola, ma poche di color bruno di ruggine. Queste macchie e punti si concentrano per lo più sui lati del ventre. La parte inferiore delle estremità, il ringonfiamento cloacale, e l'ultimo terzo della coda appaiono più intensamente coloriti di giallo e non hanno macchie.

Nella larva la coda termina piuttosto in punta. L'orlo del labbro superiore è sollevato ad arco e nasconde lateralmente la mandibola inferiore. Le branchie sono un po' più lunghe che non nella larva della Megapterna. La coda è più alta che in quest'ultima; l'orlo della *pinna* incomincia già sul dorso, press'a poco nella metà, e scorre acuminandosi, mentre nella larva della Megapterna, e specialmente in quella della femmina, la *pinna* è arrotondata all'apice. Nelle larve della Megapterna che ho esaminato, provenienti dai dintorni di Bastia, la punta della coda sembra troncata. L'orlo della coda della larva dell'Euproctus appare fortemente sviluppato verso l'apice. Le labbra della cloaca leggermente rigonfie, indicano chiaramente il tardivo sviluppo di un rigonfiamento. Superiormente e lateralmente si vedono delle macchie brunoscure sopra un fondo bruno-giallo. La parte superiore è d'un giallo sporco e non ha macchie.

Dimensioni.

	♂	♂	♂	♂	♂	♀	♀	juv.	♀	GIOVANE branchiato
Lunghezza totale . m.	0,141	0,124	0,120	0,098	0,92	0,086	0,109	0,055	0,075	0,055
» del capo . »	0,018	0,016	0,015	0,013	0,012	0,010	0,012	0,008	0,010	0,008
Larghezza » . . »	0,012	0,012	0,012	0,010	0,008	0,008	0,009	0,006	0,008	0,006
Lungh. del tronco . . »	0,054	0,054	0,045	0,039	0,037	0,030	0,045	0,021	0,028	0,021
» della coda . . »	0,075	0,075	0,060	0,046	0,043	0,038	0,052	0,026	0,037	0,026
» delle estrem. ant. »	0,019	0,019	0,018	0,015	0,014	0,012	0,014	0,009	0,013	0,010
» delle estrem. post. »	0,022	0,022	0,020	0,016	0,014	0,013	0,017	0,010	0,014	0,001

I costumi e lo sviluppo di questa specie sono poco noti, è probabile tuttavia che essi non siano molto diversi da quelli della specie precedente *E. montanus*.

Fino ad ora l'*E. Rusconii* non venne trovato che in Sardegna.

TRITON LAURENTII

LAURENTI, Syn. Rept., p. 37 (1768).

Quadrato iugale diretto dall'indietro allo avanti e faciente col mascellare inferiore un angolo più o meno ottuso, arco fronto squamoso mancante o presente, legamentoso od osseo.

L'Italia possiede solamente tre specie appartenenti a questo genere, vale a dire:

T. *cristatus*, Laur.
T. *alpestris*, Laur.
T. *vulgaris* (Linn.).

Queste specie si possono distinguere facilmente così:

I. Arco fronte squamoso, mancante.
T. *cristatus*, Laur.

II. Arco fronte squamoso, legamentoso.
T. *alpestris*, Laur.
T. *vulgaris* (1) (Linn.).

Triton vulgaris (LINN.).

Lacerta vulgaris, Linn., Fauna Suec., p. 281, S. N., I, p. 370 (1766).
Lacerta palustris (partim), Linn., loc. cit., p. 281, S. N., I, p. 370 (1766).
Lacerta aquatica, Linn., ll. cc.
Lacerta taeniata, Sturm., Deut. Fauna III (1802).
Triton palustris, Laur., Syn. Rept., p. 39, 145, tav. 4, fig. 2 (1768).
Triton parisinus, Laur., loc. cit., p. 40, Tourneville, Bull. Soc. Zool. de France, p. 74 (1879).
Triton vulgaris, Flem., Brit. Anim., p. 158 (1838).
Triton lobatus (Otth.), Tscud, Batr., p. 95 (1838). — Fatio Faune des Vertébrés de la Suisse, III, p. 537, tav. 4 (1872).
Triton punctatús, Bonap., Fauna ital., Jennys. Brit. Vert., p. 304. — Selys, Faun. Belg., p. 182, tav. 5, fig. 2. — Dugés, Ann. Sc. Nat. 3ª ser., XVII, p. 269, — Dum. e Bibr. Erp. général. IX, p. 141.

---

(1) In questa sezione entrano pure le specie seguenti: *T. Blasii* e *T. marmoratus* che non si trovano in Italia. Mancano poi all' Italia le specie costituenti la III sezione caratterizzata dagli archi fronto squamosi ossei, nella quale vi sono il *T. palmatus*, il *T. vittatus*, il *T. Montandonii*, il *T. Boscae*, ecc., ecc.

Triton taeniatus, Leydig,, Arch. f. Naturg., p. 212, 1368 ; Strauch. Revis. d. Sal. Gatt. Mem. Acc. St-Pétersb., VII sér. (1870), p. 49. — Schreiber, Herp. Europ., pag. 24.

Salamandra exigua, Laur., Syn. Rept., p. 41-148, tav. 3, f. 4 (1768).

Salamandra taeniata, Schneider, Hist. Amph., p. 58 (1799).

Salamandra addominalis, Latr., Hist. Salam., p. 50, tav. 5, f. 4. Daud. Rept., v. VIII, p. 250 (1803).

Salamandra punctata, Latr., Hist. Salam., p. 53, tav. 6, fig. 6 (1800). Daud. loc. cit., p. 257 (1803).

Salamandra vulgaris, Gray., Griff. A.-K. IX, Syn., p. 106.

Molge punctata, Merr. Tent., p. 186 (1820).

Molge taeniata, Gravenh. Deli., p. 76, tav. 11 e 12, fig. 1-2 (1829).

Molge vulgaris, Boulenger, Catal. Batr. Grad. Brit. Mus., p. 14 (1882).

Lissotriton punctatus, Bell., Brit. Rept., p. 132.

Lissotriton palmipes, Bell., loc. cit., p. 139 (1839).

Lophinus punctatus, Gray., Cat. Batr. Grad., Brit. Mus., p. 27 (1850).

Pyronicia punctata, Gray., Proc. Zool. Soc., p. 137 (1858).

Triton vulgaris (Linn.) subsp. *meridionalis*

Boulenger, Cat. Batr. Grad., Brit. Mus., p. 14 (1882).

Salamandra exigua, Rusconi, amours des Salam., p. 28, tav. 1, fig. 1 (1821).

Triton palmatus, Bonaparte, Fauna ital. (1839), Massalongo, Saggio Erpet. popol., Mem. Acc. di Verona, vol. XXIX, p. 433 (1854).

Triton lobatus, Bonaparte, Fauna ital. (1839).

Triton punctatus, Bonaparte, loc. cit.

Triton exiguus, Bonaparte, loc. cit.

Triton punctatus (Sinon. emendanda), De Betta, Erp. prov. Venete e Tirolo meridionale, p. 348 ; Monograf. Urodel. ital. Nom. Ist. Veneto, XI, p. 546, tav. 25 (1864).

Triton taeniatus., De Betta, Fauna ital. Rett. ed Anf., p. 89 — Giglioli, Catal. Ucc. e Rett. Ittiofagi e Catal. Anfibi e Pesci italiani, p. 15, Firenze 1880 — De Betta, alcune note erpet., Atti Ist. Veneto, ser. V, vol. IV (1878). — L. Camerano, Caso di Polimelia in un *Triton taeniatus*, Schn., Atti Soc. ital. Sc. nat., v. XXV, 1882.

Triton taeniatus, var., Schreiber, Herpt. Europ., p. 25.

Triton paradoxus (non Razoum), Bedriaga, Bull. Soc. Nat. Moscou, p. 287 (1881).

Triton addominalis, Bibr. in Bory. Expéd. Morée III, pl. 15, fig. 4-5 (1832).

a) 30 esemplari, Contorni di Torino.
b) 5 » Gattinara dal sig. Nervi, 1882.
c) 1 » Valduggia dal sig. Galleri, 1882.
d) 5 » Montorio (Veronese) dal Comm. E. De Betta.

e) 60 esemplari Veneto del sig. Conte A. Ninni, 1883.
f) 5 » Ancona dal sig. Prof. Paolucci, 1883.
g) 1 » Gran Sasso d'Italia dal Prof. Pedicino, 1881.
h) 6 » Sesto (presso Firenze) dal Prof. H. Giglioli, 1878.
i) 15 » Contorni di Roma dal Prof. F. Gasco, Maggio, 1884.
j) 6 » Pistoia dal Dott. G. Martorelli, 1884.
k) 1 » Campobasso dal Dott. Mamini, 1884.

Arco fronto-squamoso, legamentoso, apofisi sopra orbitali dei frontali spiccate capo poco distinto dal tronco e piccolo, più lungo che largo, superiormente piano, denti palatini disposti in due serie longitudinali parallele pei due terzi anteriori e divergenti posteriormente come un Λ, lingua piccola subovale, libera ai lati. Sul capo tre solchi longitudinali, corpo subrotondo, estremità piccole e sottili, dita acuminate e libere, le posteriori dei maschi durante l'epoca degli amori fortemente lobate. Tubercoli plantari e palmari esterni conici e sporgenti. Coda compressa e allungata, appuntita, ma non terminata da un filamento; maschio con una cresta dorsale spiccata e più o meno ondulata o dentellata nella stagione degli amori, rialzamento cloacale mamillonare. Parti superiori brunastre o giallastre, una fascia longitudinale mediana, più o meno estesa nelle parti inferiori, rossa o giallo-rossa. Sul capo dei maschi varie strie longitudinali nere superiormente; ai lati, e sul rimanente del corpo, delle macchie rotondeggianti nere più o meno numerose e più o meno grosse. Queste macchie sono pure più o meno numerose nelle parti inferiori.

Dimensioni medie, lunghezza del corpo, m. 0,078.

Triton vulgaris (Linn.) subspec. *meridionalis.*

Come la forma precedente salvo che nel maschio il tronco è subquadrangolare, la cresta dorsale è più bassa e la membrana caudale si prolunga gradatamente in un filamento notevolmente lungo e sottile. Colorazione e macchiettatura generalmente più intensa, dimensioni medie un po' più piccole.

Dimensioni medie, lunghezza del corpo m. 0,072.

In Italia, a quanto pare, non si trova che la subsp. *meridionalis*, la quale presenta veramente un po' il facies del *Triton palmatus*, Schn., ed anzi vari Autori italiani la confusero con questa. La forma italiana del *Triton vulgaris* si potrà tuttavia distinguere facilmente dal *T. palmatus*, poichè essa non ha l'*arco fronto-squamoso osseo* e il filamento terminale della coda si parte con gradazione insensibile dalla coda stessa; mentre nel T. *palmatus* la coda è tronca e dal mezzo della troncatura si parte il filamento. Il primo carattere è, come facilmente si comprende, più sicuro del secondo.

In Italia fino ad ora il vero *T. palmatus* Schneid. non venne ancora trovato.

In quanto alla forma tipica del *T. vulgaris* propria dell'Europa settentrionale e centrale io non posso dire con sicurezza che essa non vi sia in Italia; ma debbo avvertire che non l'ho trovata fra i numerosi esemplari esaminati di molte località italiane.

La descrizione che segue è fatta sopra esemplari italiani e quindi si riferisce al *T. vulgaris* (Linn.) subsp. *meridionalis* Bouleng.

Capo piccolo e poco distinto dal tronco: più lungo che largo soprattutto nei maschi: superiormente piano e con tre scanalature longitudinali, le due laterali sono soprattutto ben spiccate. Le guancie sono poco inclinate e nettamente separate dalla parte superiore del capo: esse sono alquanto incavate longitudinalmente: il muso arrotondato e poco sporgente sulla mandibola inferiore. La distanza che separa superiormente gli occhi è eguale a quella che è fra gli occhi e le narici ed è più grande, soprattutto nei maschi di quella che è fra le due narici.

La lunghezza del capo è contenuta tre volte circa in quella del tronco.

L'occhio è relativamente grande e poco sporgente: il massimo suo diametro trasversale è circa eguale alla distanza che è fra l'occhio e la narice.

Lo squarcio della bocca giunge fino all'angolo posteriore dell'occhio e l'oltrepassa di poco.

La lingua è piccola, subovale e libera alquanto ai lati.

I denti palatini sono disposti in due serie longitudinali che cominciano fra le aperture interne delle narici, corrono parallele fra loro per due terzi della loro lunghezza e poi divergono più o meno, senza tuttavia spingersi molto allo indietro. La divergenza tuttavia varia, le serie dentali hanno l'aspetto di un Λ.

Il tronco è subquadrangolare nei maschi: subcircolare nelle femmine, nelle quali è anche più grosso e più tozzo. Il tronco dei maschi rassomiglia notevolmente a quello del *T. palmatus*.

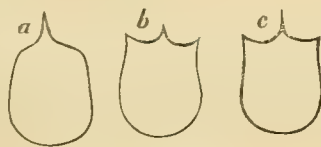



Fig. 5

a) Sezione del tronco di un maschio di *Triton vulgaris* tipico.
b) Id. id. di *T. palmatus*.
c) Id. id. di *T. vulgaris subsp. meridionalis*.

Le estremità anteriori e posteriori sono comparativamente lunghe e presso a che eguali fra loro: spesso le anteriori sono un po' più corte. Nel maschio le estremità sono un po' più lunghe e un po' più robuste soprattutto le posteriori, che nella femmina. Ripiegate lungo i fianchi le estremità dei maschi ne oltrepassano notevolmente la metà: quelle della femmina giungono alla metà o la oltrepassano di poco.

Le estremità anteriori hanno le dita sottili, appuntate, soprattutto nei maschi, sono intieramente libere. Il primo dito è il più corto, poi viene il quarto, poi il secondo e poi il terzo che è il più lungo. Nella subsp. *meridionalis* le dita mi paiono proporzionatamente più sottili e più lunghe che nella forma tipica. Sulla faccia palmare,

che è leggermente granulosa, vi sono due tubercoli, uno piccolo, che talvolta manca, alla base del primo dito e uno più grande; volto un po' allo infuori, spiniforme alla base del quarto dito. Nei maschi questo tubercolo è talvolta più sviluppato che nelle femmine. Negli individui italiani frequentemente questi tubercoli sono assai piccoli.

Le estremità posteriori sono più tozze e più robuste delle anteriori ed hanno cinque dita, meno lunghe, acuminate, ma un po' più appiattite di quelle delle estremità anteriori. Il primo dito è il più corto, poi viene il secondo, poi il quarto e poi il terzo, che è di poco più lungo del quarto.

Nelle femmine le dita sono più corte che nei maschi e sono intieramente libere. Nei maschi della forma italiana esse sono riunite alla base da una piccola membrana interdigitale, la quale costituisce una vera palmatura per un quarto ossia della loro lunghezza. Questa palmatura esiste generalmente anche al difuori del tempo degli amori. In questo tempo il rimanente del dito si copre di una grossa lobatura.

Non tutti gli esemplari presentano questa palmatura, io l'ho osservata in modo evidente soprattutto negli individui dei contorni di Roma ed in alcuni anche del Veneto. Non si tratta qui mai tuttavia, come già dissi sopra, di forme riferibili al *T. palmatus* Schneid.

La lobatura può essere di sviluppo molto variabile secondo gli individui.

Sulla faccia plantare vi sono generalmente due tubercoli, uno piccolo e frequentemente mancante alla base del primo dito, ed uno un po' più grosso e spiniforme alla base del quinto dito. Anche quest'ultimo è in complesso poco sviluppato negli individui italiani.

La coda è lanceolata e compressa: i lobi membranosi superiori e inferiori sono principalmente sviluppati verso la base e vanno gradatamente decrescendo fino a ridursi in un filamento sottilissimo e notevolmente lungo: talvolta nei maschi può questo filamento misurare anche metri 0,010 e più. Nelle femmine il filamento è meno sviluppato. L'altezza della coda è minore negli individui italiani, che negli individui della forma tipica. La forma generale della coda varia alquanto da individuo ad individuo. Passata la stagione degli amori la coda dei maschi si riduce notevolmente in altezza, il filamento terminale generalmente scompare, rimanendo tuttavia la coda sempre assai appuntita.

La lunghezza della coda è come quella del tronco e del capo insieme od è anche spiccatamente più lunga.

La pelle è sottile e liscia durante la vita acquatica e più o meno granulosa durante la vita terragnola. Non vi sono rigonfiamenti ghiandolari nella regione parotidea. La ripiegatura è appena accennata e spesso manca al tutto. I maschi hanno una cresta dorsale ben sviluppata nel periodo degli amori, la quale comincia alla regione occipitale, corre lungo il dorso e va ad unirsi a quella della parte superiore della coda: questa cresta è meno sviluppata nei maschi italiani che non in quelli della forma tipica, essa è ondulata e talvolta anche dentellata. Passata la stagione degli amori la cresta dei maschi si riduce ad un semplice rialzo cordoniforme.

Nelle femmine vi è anche durante la vita acquatica una piccola cresta alta al più un mezzo millimetro od un millimetro che comincia alla regione occipitale, e, correndo lungo il dorso, va ad unirsi a quella della coda. Non tutte le femmine,

anche durante il periodo degli amori presentano questo carattere, invece di una cresta longitudinale una parte di esse ha un solco longitudinale e la cresta della parte superiore della coda giunge soltanto sopra al livello della apertura cloacale.

La colorazione in questa specie varia secondo i sessi, le stagioni e le condizioni di vita.

Nei maschi, durante l'epoca degli amori, la tinta generale delle parti superiori compresa la cresta dorsale è brunastra, giallastra od anche giallo-olivastra. Vi sono numerose e più o meno spiccate macchie brune e talvolta nerastre assai spiccate. Le macchie più costanti sono quelle del capo, il quale presenta superiormente due macchie nere a Λ disposte coll'apice verso il muso, lateralmente vi è una fascia nera che parte dall'apice del muso viene all'occhio: riparte all'angolo posteriore dell'occhio e riposta sino alla fine del capo. Un'altra fascia nera orla il mascellare superiore e l'inferiore. Sul tronco, sui fianchi, sulle estremità, sulle parti inferiori, sulla cresta e su un terzo circa della coda, a partire dalla base stanno successive e più o meno grosse macchie rotondeggianti brunastre o nerastre, generalmente a contorno un po' sfumato. Talvolta queste macchie si dispongono in serie longitudinali e talvolta occupano tutta la coda. I margini della cresta dorsale, della parte membranosa della coda, il filamento terminale di questa, i piedi e soprattutto il rialzamento cloacale sono di colore nerastro, talvolta molto intenso.

La gola è giallo grigiastra od anche rossastra; il petto ed il ventre, son di color rosso più o meno vivace; una macchia rossa vi è anche nella parte anteriore del rialzamento cloacale ed una piccola striscia rossa più o meno estesa si osserva pure sul margine inferiore della coda. In varii esemplari avuti da Roma ho osservato che anche il principio della cresta dorsale è di color rosso.

I lati del ventre e del petto e la parte inferiore dei fianchi sono di color giallo più o meno vivo: finalmente nella base della coda nella parte inferiore, per una lunghezza variabile, vi è una striscia di color azzurro chiaro assai spiccata ed elegante.

La femmina, anche nel periodo degli amori, è colorita meno elegantemente e meno vistosamente del maschio. Generalmente le parti superiori sono brunastre, o bruno giallastre, o bruno olivastre, ed anche talvolta quasi nerastre. Si osservano qua e là delle macchie più scure a contorno indeciso, le quali sui fianchi e sulle estremità sono più chiare e definite. Sulle parti superiori verso i lati vi sono due linee longitudinali più chiare, le quali dalla parte posteriore del capo vanno fino sulla coda. Sui fianchi le macchie brune costituiscono talvolta una fascia oscura longitudinale. Il capo non ha le fascie nere caratteristiche del maschio. Non raramente tuttavia vi si osservano quelle dei lati del capo, ma in una maniera molto meno spiccata che nei maschi.

Negli esemplari italiani la femmina presenta ai lati del capo due macchie chiare, che partono dall'angolo dei mascellari e si dirigono in alto sotto gli occhi.

Le parti inferiori sono, come nei maschi, ma con colori meno vivaci. Il rialzo cloacale è giallo o rossastro. La coda è per lo più orlata inferiormente di rosso.

Passata la stagione degli amori, e quando l'animale comincia a fare vita terragnola, la colorazione del maschio si fa più scura e più sbiadita e si avvicina allora a quella della femmina. Le macchie soprattutto del capo, del dorso e dei fianchi si

fanno meno spiccate. Talvolta durante il soggiorno a terra l'animale diventa superiormente di color bruno nerastro intenso.

I giovani presentano essenzialmente il sistema di colorazione delle femmine.

Le variazioni del sistema di colorazione di questa specie riguardano principalmente il numero, la posizione e lo sviluppo delle macchie scure. In Italia si hanno, per quanto io ho osservato, le varietà principali seguenti:

Var. *a.* Macchie rotondeggianti nerastre del corpo, numerose, grandi e ravvicinate, disposte irregolarmente.

Var. *b.* Come sopra le macchie dei fianchi e dei lati della coda si dispongono in serie longitudinali.

Var. *c.* Macchie rotondeggianti nerastre, scarse, piccole e disposte irregolarmente.

Var. *d.* Macchie rotondeggianti nerastre, molto piccole e ridotte spesso a semplici punti oscuri.

Var. *e.* Parti superiori giallastre o bruno grigiastre chiare con scarsissime e piccole macchiette oscure.

Queste diverse sorta di varietà si possono trovare insieme in tutte le località. Debbo dire tuttavia che in complesso gli esemplari del Veneto e delle Marche presentano colorazioni più vivaci e macchiettature più abbondanti e più spiccate, mentre quelli dell'Italia centrale tendono ad una colorazione più scura e più uniforme.

Dimensioni

	VENETO						TORINO					Sesto	Gran Sasso	Ancona	ROMA		Ticino (3)	Basilea (3)
	♂	(1) ♂	♂	♀	♀	♀	♂	(1) ♂	♀	♀	♂	♂	♀	♀	(2) ♂	♀	♂	♂
Lunghezza totale	0,076	0,067	0,077	0,071	0,083	0,068	0,074	0,062	0,071	0,087	0,055	0,091	0,079	0,070	0,066	0,609	0,072	0,098
» del capo . . .	0,009	0,009	0,010	0,009	0,010	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010	0,008	0,010	0,010	0,009	0,009	0, 09	0,010	0,125
Larghezza »	0,006	0,006	0,007	0,006	0,007	0,006	0,006	0,006	0,006	0,007	0,005	0,007	0,007	0,008	0,007	0,007	—	—
Lunghezza del tronco . . .	0,023	0,023	0,028	0,026	0,030	0,027	0,026	0,025	0,026	0,030	0,020	0,030	0,029	0,026	0,022	0,027	0,033	0,045
» della coda . . .	0,044	0,035	0,040	0,036	0,036	0,033	0,039	0,038	0,036	0,037	0,027	0,044	0,040	0,035	0,035	0,033	0,039	0,053
» delle estremità anteriori . . .	0,014	0,013	0,014	0,012	0,012	0,011	0,013	0,012	0,011	0,014	0,010	0,013	0,013	0,010	0,011	0,011	0,014	0,019
» delle estremità posteriori . . .	0,015	0,014	0,014	0,012	0,012	0,011	0,013	0,012	0,011	0,014	0,010	0,013	0,013	0,010	0,011	0,011	0,015	0,020
Altezza massima della cresta dorsale dei maschi .	0,003	0,002	0,002	»	»	»	0,003	0,003	»	»	0,003	0,003	»	»	0,001	»	0,035	0,005
» massima della cresta caudale	0,010	0,009	0,009	»	»	»	0,009	0,009	»	»	0,008	0,011	»	»	0,007	»	0,105	0,016

(1) In amore, spiccatamente lobati.

(2) Poco dopo l'epoca degli amori, lobatura quasi scomparsa.

(3) In amore: DA FATIO, *Faune des Vert. de la Suisse*, III, p. 568.

Il *Triton vulgaris* è specie comune in Italia: essa abbonda principalmente nella bassa valle del Po e nel versante Adriatico della parte peninsulare dove la subspecie *meridionalis* è più spiccata. Essa si trova pure assai frequente nell'alta valle del Po: dove vive spesso insieme al Triton cristatus. Pare tuttavia che certe regioni più o meno vaste della vallata stessa ne siano prive: così ad esempio io non ne ho mai potuto avere dal Novarese e dal Vercellese. Anche in Svizzera, secondo il Fatio (1) si verificano delle irregolarità nella distribuzione di questa specie. Il *Triton vulgaris* non venne ancora trovato nelle isole italiane.

Questa specie sale poco in alto sui monti, la sua distribuzione in altezza sui monti non è ancora ben determinata.

La riproduzione ha luogo in aprile o in maggio; le uova sono un po' più piccole di quelle del *Triton cristatus* e vengono deposte in piccoli mucchi sui vegetali acquatici o anche al fondo delle pozzanghere. Lo sviluppo si compie, ora in tre, ora in quattro mesi, il Rusconi nella sua classica opera: *Amours des Salamandres aquatiques* (pag. 53), dice: « le développement des têtards. . . . . s'effectue, dans nos climats au moins, dans l'espace de trois mois à peu près ».

Questa specie è meno schiettamente acquatica del *Triton cristatus*, poichè passa dopo il periodo della riproduzione buona parte del tempo in terra.

Triton alpestris (Laur.) (2).

Triton alpestris, Laur. Syn. Rept. p. 38, 142, tav. 2 fig. 4 (1768) — Sturm. Deutschl. Fauna III (1828) — Tschudi Clas. Batrach... p. 95 (1338). — Bonaparte Fauna Ital. (1839) — Dum. et Bibr. Erpet. général, IX, p. 146 (1854) — Schreid Hist. Amphib. I, p. 28 (1799), Merrem. Syst. Amph. (sinon. emend.) (1826). — Fitzinger, Neu. classif. und Verz. Mus. Wiens p. 66 sp. 3 (1826) De Betta. — Cat. Rettili Valle di Non. Atti Soc. Zool. Bot. Vienna II, p. 159 (1852). Cat. Syst. Reptil. Mus. p. 28 (1853). Erpetol. prov. Venet. e Tirolo merid. p. 349 (1857). Fauna Veronese p. 130 (1863). Monograf. Anfib. urod. Ital. Mem. Ist. Venet. XI, p 540 (1864). Massalongo, Saggio Erpet. Veronese Mem. Accad. Ver., vol. XXIX, p. 432 (1854) — Jan. Rept. Mus. Mediolan, p. 55 (1855). — Nardo prosp. anim. prov. venete, p. 62 (1860). Fatio Bibl. Univers. p. 275 (1864). — De Filippi, Archivio per la zool. Anat. vol. 1, 1867). Fatio Faune Vert. de la Suisse III, p. 541, tav. 3 (1872). — De Betta Fauna Ital. Rett. ed Anfibi p. 87. — Schreiber, Herp. Europ. p. 38, Giglioli, Catal. Ucc. e Rett. Ittiofagi e Catal. Anfibi e Pesci Ital., pag. 16, Firenze (1880). Gasco, Amori e sviluppo del Tritone alpestre, Ann. Mus. Civ. di Genova, vol. XVI (1880). — Camerano, Ricerche intorno alla vita branchiale degli Anfibi. Mem. Acc. delle Sc. di Torino, Ser. II, vol. XXXV 1883. Sulla neotenia. . . . . Atti R. Acc. Sc. Torino vol., XIX (1883).

---

(1) Op. cit., p. 569.

(2) *Salamandra aquatica*. Wurfbain, *Salamandrologia*, p. 64, v. II, fig. 4 (1683).

Triton (?) *alpestris*, Gray. Cat. Brit. Mus. p. 21 (1850).
Triton Wurfbainii, Laur. Syn. Rept. p. 38 (1768).
Triton Salamandroides, Laur. loc. citat. p. 40 — Schrank. Fauna Boica I, p. 278, sp. 258 (1798).
Triton apuanus, Bonaparte, Faune ital. (1839).
Salamandra cincta. Latr. Salam., p. 52, pl. 4, f. 5 (1800) — Daud., Rept. VIII, p. 259 (1803).
Salamandra rubriventris Daud. loc. citat. p. 239, tav. 98, f. 1 (1803).
Salamandra alpestris Bechest. Lacepèd. II, p. 260. Schneider Hist. Amph. p. 71.
Salamandra ignea Bechest. loc. citat. p. 263.
Molge ignea Merrem. Tent. 186 (1820) Gravenh. Delic. p. 81 (1829).
Molge alpestris. — Men. l. citat. p. 187 (1829). Boulenger. Catal. Batr. Grad. Brit. Mus. p. 12 (1882).
Lissotriton alpestris — Bonaparte. Indice illustr. nomencl. moderna.
Hemitriton alpestris — Dugès Urodèles de France Ann. Sc. Nat. 3 ser. vol. XVII, p. 263 (1852).

a — 3 esemplari. Trentino, dal sig. Cav. E. De Betta.
b — 3 » Rovereto, dal sig. Prof. Cobelli, 1882.
c — 1 » Varese, dal sig. Capitano G. Bazetta, 1882.
d — 30 » Valli, Ossolane dal sig. Capitano G. Bazetta, 1882.
e — 50 » Genova, dal sig. Borgioli, 1884.
f — 2 » Ormea, dal sig. G. Peracca, 1883.

Questa specie è in Italia dimorfa. Una forma è *abrachiata* e l'altra è *branchiata*.

Ciò si può stabilire senz'altro poichè anche la forma branchiata deve essere considerata come adulta dal momento che dà opera alla riproduzione. Inoltre in alcune località le due forme coesistono normalmente e non si trovano solo accidentalmente (1).

Io darò quindi separatamente le descrizioni delle due forme.

Forma abranchiata.

Arco fronto squamoso legamentoso: processi orbitali del frontale distinti: capo mediocre, alquanto distinto dal tronco, arrotondato anteriormente e quasi elittico, denti palatini in due serie longitudinali mediane che si incontrano ad angolo anteriormente a mo di un Λ. Il tronco è arrotondato e la coda è lanceolata compressa, ma non molto alta, appuntita, lunga come il tronco o come il tronco e il capo insieme: dita 4 anteriormente cinque posteriormente, libere, le dita posteriori alquanto appiattite. Pelle liscia o finamente zigrinosa con un rigonfiamento nella regione parotidea più o meno spiccato. Il maschio in amore e durante la vita acquatica ha una cresta

(1) Camerano, *Ricerche intorno alla vita branchiale degli Anfibi*. Mem. Acc. delle Sc. di Torino, Ser. II, vol. XXXV, 1883. — *Sulla neotenia*, Atti R. Acc. Sc. di Torino, vol. XIX. 1883.

dorsale longitudinale alta un paio di millimetri circa. Due tubercoli palmari e plantari più sviluppati nei maschi che nelle femmine. Parti superiori di color grigiastro, brunastro, verdastro, azzurrastro o anche nero con o senza macchie oscure: parti inferiori di color giallo arancio più o meno vivace, generalmente senza macchie. Sui fianchi dal capo alla coda vi è una fascia chiara, biancastra o grigiastra o azzurrastra macchiettata fortemente di nero. Nei maschi in amore sui fianchi al disotto di questa fascia chiara vi è una striscia di azzurro chiaro e scuro. Sul dorso dei maschi la cresta è macchiettata di giallo e di nero in modo che essa sembra percorsa da una linea gialla longitudinale a zig-zag; le estremità e la coda sono del colore del dorso, per lo più presentano numerose macchie nere rotondeggianti.

Dimensioni medie. Lunghezza totale ♂ m. 0,080, ♀ m. 0,88.

Il capo è più lungo che largo, piano superiormente a contorno ovale assai spiccato; distinto dal tronco: il muso è arrotondato e poco sporgente, le guancie sono spiccatamente separate dalla parte superiore del capo e sono poco inclinate; esse sono fortemente incavate trasversalmente. La distanza che separa gli occhi superiormente è un po' maggiore di quella che separa le narici fra loro. Quest'ultima è uguale a quella che separa le narici dagli occhi.

L'occhio è piccolo e collocato più vicino all'angolo delle mascelle che all'apice del muso.

Lo squarcio della bocca è grande: la lingua è subcircolare: libera ai lati. I denti palatini sono disposti a Λ, non ho osservato in essi variazioni notevoli. Il labbro superiore sporge ai lati con una piegatura membranosa notevolmente sull'inferiore.

Il tronco è subcilindrico, rialzato posteriormente nelle femmine.

Le estremità sono mediocri: le anteriori un po' più sottili delle posteriori, soprattutto nei maschi, nelle femmine sono poste un po' più lontano le une dalle altre per la maggior lunghezza del tronco.

Delle quattro dita anteriori il 1° è il più corto, il 4° è più lungo del 1°, il 2° è più lungo del 4° e il 3° è il più lungo di tutti. Nella faccia palmare vi sono due tubercoli allungati uno alla base del 1° dito e uno alla base del 4° dito.

Delle cinque dita delle zampe il 1° e il 5° sono piccoli, il 2° è un po' più lungo, il 4° ed il 3° sono un po' più lunghi e sono quasi eguali fra loro.

La coda è variabile di forma e di larghezza secondo la stagione e secondo che l'animale è in livrea di acqua o in livrea di terra. Anche in quest'ultimo caso essa è tuttavia sempre compressa. Nei maschi in nozze la cresta del dorso si continua colla parte superiore della coda, con un abbassamento però alla regione corrispondente superiormente alla cloaca. Quando scompare la cresta dorsale, la parte membranosa superiore della coda si arresta sul dorso a questo punto. La coda è generalmente lunga come il tronco e il capo nelle femmine e lunga come il tronco nei maschi, nei quali essa è in compenso più larga verso la base. Nelle femmine inoltre il margine inferiore della coda è quasi diritto: mentre nei maschi è come il superiore più o meno incurvato.

La pelle è mediocremente spessa, e ha molte piccole asperità granuliformi: talvolta, nella vita terragnola essa diventa fortemente zigrinosa, quasi come nel *Triton cristatus*.

La ripiegatura golare è più o meno evidente: talvolta manca.

La colorazione è variabile assai. Le parti superiori possono essere grigiastre, brunastre, olivastre, verdastre, azzurrastre od anche al tutto nere, sopra le prime tinte, ora si trovano macchiettature rotondeggianti ora marmoreggiature più o meno spiccate. Queste varie colorazioni sono frequenti, almeno per quanto ho potuto osservare soprattutto nelle femmine. Le parti inferiori hanno colorazione costantemente giallo arancio vivacissimo, senza macchie sul petto e sul ventre, e con macchie nere rotondeggianti, più o meno numerose sulla gola. I lati del capo, le estremità anteriori e posteriori, i fianchi sono coperti da macchie nere rotondeggianti abbastanza regolari e caratteristiche. Queste macchie si prolungano pure più o meno sui lati della coda. Nei maschi vi è una striscia mediana longitudinale dorsale dal capo all'apice della coda la quale è di color giallo ed è coperta di macchie nere rotondeggianti in modo assai regolare ed elegante.

Nel periodo degli amori, i fianchi del maschio hanno una striscia trasversale di color azzurro chiaro: lo stesso si osserva pure sulla coda. Le parti superiori assumono dei riflessi di color azzurro cupo bellissimi: le colorazioni gialle si fanno assai vivaci, e anche le macchie nere acquistano in intensità.

Questa elegante livrea di nozze io non l'ho osservata che negli individui del Genovesato; in quelli dell'Ossola, le parti superiori sono molto oscure, quasi nere, e sono prive dei riflessi azzurri.

Le femmine presentano nell'epoca degli amori tinte spiccate: ma variabili dal verde chiaro al verde brunastro ed olivastro, con marmoreggiature più o meno spiccate. Le femmine dell'Ossola, e credo ciò si possa dire in genere delle alte regioni alpine, hanno colorazioni meno eleganti e meno variate.

I giovani sono di color grigiastro o brunastro od anche nero (Alpi) colle parti inferiori di color giallastro o rossastro. Gli esemplari che io ho esaminato avevano una striscia giallo rossastra che partendo dalla nuca si prolungava fin verso un terzo del dorso.

Fig. 5 *bis*. *Triton alpestris*. Schema dei denti palatini. a) Forma abranchiata b) forma branchiata.

Gli individui che io ho avuto dal Genovesato, da Ormea e da Rovereto e dal Trentino, sono più vivacemente coloriti di quelli che io ho osservato nell'Ossola a varie altezze. Gli individui, ad esempio, del lago di Antilone, dell'Alpe di Veglia, di Devero, ecc., sono anche fuori d'acqua od in acqua, anche in amore, spesso superiormente di color nero cupo il quale passa sui fianchi senza transizione al giallo arancio vivacissimo delle parti inferiori.

		VARESE	GENOVA	ROVERETO	GENOVA	OSSOLA	
		♀	♀	♂	♂	♀	juv.
Lunghezza totale	m.	0,091	0,092	0,074	0,082	0,094	0,035
» del capo . . .	»	0,012	0,092	0,011	0,011	0,011	0,005
Larghezza » . . .	»	0,009	0,010	0,008	0,009	0,009	0,004
Lunghezza del tronco . . .	»	0,032	0,036	0,028	0,031	0,037	0,014
» della coda . . .	»	0,043	0,044	0,035	0,040	0,046	0,016
» delle zampe ant. .	»	0,016	0,017	0,014	0,014	0,015	0,007
» delle zampe post.	»	0,017	0,018	0,015	0,015	0,015	0,007

Forma branchiata.

Il primo carattere per distinguere questa forma sono le branchie esterne le quali possono essere più o meno sviluppate; ma soprattutto meglio che lo sviluppo dei rami branchiali, si deve por mente alla saldatura del coperchio branchiale, poichè da questa dipende la maggior parte dei mutamenti che si producono nel capo dell'animale.

La forma generale del capo è quella del girino che si conserva più o meno intatta: si osservano tuttavia, unitamente ai caratteri proprii della vita girinale, alcuni caratteri della vita della forma abranchiata, e ciò principalmente per quanto riguarda la colorazione: la quale nel periodo degli amori ricorda abbastanza bene la colorazione degli individui in amore dell'altra forma, quantunque in una maniera meno spiccata.

Le zampe sono come nell'altra forma: il capo è da girino, come pure lo sono il sistema dentale, la forma e lo sviluppo degli occhi.

Il tronco è compresso lateralmente: la coda è ampia, regolarmente lanceolata. I rigonfiamenti cloacali sono come nella forma abranchiata.

La pelle è liscia (1).

Dimensioni medie. Lunghezza totale ♂ m. 0,085, ♀ m. 0,088.

Questa forma coesiste colla prima nel lago Antilone nella valle Formazza e in altre località dell'Ossola.

	OSSOLA		
	♀	♂	♀
Lunghezza totale . . . . m.	0,088	0,086	0,088
» del capo . . . »	0,014	0,012	0,012
Larghezza » . . . . »	0,010	0,009	0,009
Lunghezza del tronco . . . »	0,033	0,032	0,034
» della coda . . . »	0,041	0,042	0,042
» della zampa ant. . »	0,013	0,014	0,014
» della zampa post. »	0,015	0,015	0,015

Il *Triton alpestris* è una delle specie più interessanti degli Anfibi urodeli Europei, sia per la sua distribuzione geografica, sia pei bellissimi esempi di adattamento alle condizioni locali che essa presenta. Si è nel *Triton alpestris* che si può studiare facilmente il fenomeno del prolungarsi anche per vari anni della vita branchiale ed anche la riproduzione allo stato branchiale, dal quale fatto ne viene il dimorfismo della specie come sopra è indicato.

(1) Per maggiori ragguagli sopra questa forma si consulti il mio lavoro ripetutamente citato sulla *Vita branchiale degli Anfibi*.

Io ho trattato a lungo questi fatti nel mio lavoro intitolato: *Ricerche intorno alla vita branchiale degli Anfibi* (1), e in quello sulla *neotenia* (2). A questi lavori mando io il lettore desideroso di avere maggiori ragguagli e di conoscere la bibliografia dell'argomento.

I costumi di questa specie vennero studiati principalmente dal Fatio in Svizzera dove la specie stessa è molto abbondante (3). Gli amori poi: e la riproduzione diedero occasione ai due bellissimi e importantissimi lavori del Gasco (4) che io ho già frequentemente citato, i quali non solo illustrano la specie in discorso; ma spargono molta luce sulla fecondazione e sulla riproduzione degli Anfibi urodeli in generale.

Da questi lavori del Gasco risulta:

« 1° Che non vi è accoppiamento e che il maschio depone i suoi spermatofori innanzi alla femmina.

» 2° Che la femmina postasi sullo spermatoforo appena emesso lo fa aderire alle labbra divaricate e rovesciate all'infuori della sua cloaca.

» 3° Che la fecondazione è sempre interna e segue nell'ultimo tratto degli ovidotti.

» 4° Che la femmina può cominciare a deporre le uova solo parecchi (7-8) giorni dopo la fecondazione e continuare anche per 40 giorni ad emettere uova sempre feconde senz'altri rapporti col maschio.

» 5° D'ordinario le uova sono deposte nel corso di molti giorni (20-40); ma 100 e più uova feconde possono essere gettate dalla stessa femmina fecondata una sol volta, nel volgere di 3-4 giorni ».

La durata del periodo branchiale è molto variabile: nei casi normali il girino impiega tre o quattro mesi a compire il suo sviluppo e in questo caso giunge a misurare: quando si metamorfizza dai m. 0,030, a m. 0,035.

I girini che svernano una sola volta e si metamorfizzano nell'anno successivo: misurano per lo più m. 0,050, o m. 0,058.

Gli altri che passano vari inverni allo stato branchiale, non si metamorfizzano che quando hanno già raggiunto le dimensioni dell'adulto, ed anche in qualche caso, probabilmente, non si metamorfizzano affatto.

La distribuzione geografica in Italia di questa specie eminentemente nordica ed alpina è poco nota. Il *Triton alpestris* si trova essenzialmente nelle Alpi e negli Appennini. Nelle prime sale a notevoli altezze fin oltre i 1500 metri sul livello del mare. Negli Appennini discende fin presso al livello del mare (100 metri sul livello del mare); Genovesato.

Il *Triton alpestris* venne trovato con sicurezza nelle Alpi del Veneto e del Trentino e della Lombardia. Nel Canton Ticino e nelle valli Ossolane è frequente.

---

(1) Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino. Ser. II, vol. XXXV, 1883.

(2) Atti R. Acc. delle Sc di Torino, vol. XIX, 1883.

(3) Op. cit.

(4) *Amori del Tritone alpestre. — Sviluppo del Tritone alpestre.* Ann. Mus. civico di Genova, vol. XVI, 1880.

Non venne trovato mai che io sappia nelle valli di Aosta, nelle valli di Lanzo, nella valle di Susa, nella valle della Stura, nella alta valle del Po, ecc. Esso si trova a Ormea, a Rocchetta Cairo, a Savona, e in quasi tutto il Genovesato. Continua nell'Appennino Modenese o nel Pistoiese. Si trova pure, secondo il Bonaparte, nei monti Apuani (Seravezza) e nella Garfagnana.

Triton cristatus, Laur. (1).

Lacerta palustris (partim), Linn., Fauna Suec., p. 281, S. N, I, p. 370 (1766).
Lacerta palustris, Sturm. Deutschl. Fauna III, 3 (1802) — Retz., Fauna Suec. I, p. 287, escluso Synom. T. palustris, Laur. (1800) — Schaw. Gen. Zool. III, p. 298 (1802).
Lacerta porosa, Retz., Fauna Suec. I, p. 288 (1800).
Lacerta lacustris, Blumenbach. Hand. p. 248 (1800).
Triton cristatus, Laur. Syn. Rept., p. 36, 146 (1768) — Fitzinger, N. Class. und Verz. Mus. Wien., p. 66, sp. 5 (1826) — Syst. Rept., p. 34 (1843) — Tschudi, Classif. Batrach., p. 95 (1838) — Gray., Cat. Brit. Mus., p. 19 (1850) — Dum. et Bibron, Erpet. général., v. IX, p. 131 (1854) — Leydig., Archiv. f. Naturg., p. 176 (1867) — Dell'Isl., Ann. Sc. Nat., 4 ser., v. XVII, p. 366 — Strauch., Revision der Salaman. Gatt., Mém. Acad. Sc. Pétersb. VII sér. (1870) — Fatio, Vertébr. d. l. Suisse III, p. 520 (1872) — Schreib., Herpt. Europ., p. 48.
Triton cristatus, var. icterica, Reich. Nov. Act. Leop. Carol. XXXII, 1865.
Triton carnifex, Laur. Syn. Rept., p. 38, 145 (1768).
Triton palustris, Flem. Brit. An., p. 157 — Jenyns, Brit. Vert., p. 303.
Triton Bibronii, Bell. Brit. Rept., p. 119.
Salamandra cristata, Houttuyn Verhand. Genootsch. Vlissing IX, p. 333 — Schneid. Hist. Amphib., I, p. 57, n. 2 (1799) — Latr., Hist. Salam., p, 29, 43, v. III, f. 3 (1800) — Daud., Hist. Rept. VIII, p. 233 (1803).
Salamandra pruinata, Schneider, Hist. Amphib. I, p. 69 (1799).
Salamandra carnifex, Schneid., loc. cit., p. 71.
Molge palustris, Merr. Tent., p. 187 (1820) — Gravenh. Delci, p. 85 (1829).
Molge cristata, Boulenger, Cat. Batr. Grad. Brit. Mus., p. 8 (1882).
Hemisalamandra cristata, Dugès., Ann. Sc. Nat., 3ª serie, vol. XVII, p. 262 (1852).

---

(1) Questo animale si trova menzionato in molti autori anteriori a Linneo, fra i quali ricorderò i principali:

Salamandra aquatica. Wurffbain, *Salamandrol*, pag. 65, tav. II, f. 3 (1675).
Lacertus aquaticus. Gesner, *Quad. Ovip.*, p. 27 (1677).
Salamandra aquatica. Ray, *Synops. Quad.*, p. 273 (1694).
Salamandra batracon. Camerarius, Cent. IV, 70, p. 140 (1715).
Salamandra aquatica. Gronovius, *Mus. Ichthyol.*, II, p. 77 (1756).

Triton cristatus, Laur., subspec. *karelinii.*

Salamandra laticauda, Bonn. Encycl. Méthod. Erpet., p. 63, tav. 11, fig. 4*a* e 4*b* (1789) (1).
Salamandra platyura, Daub., Encyclop. Method. III (1784).
Salamandra platicauda, Rusconi, Amours des Salamandres, p. 29, tav. 1-2 (1821) (2).
Petraponia nigra, Massalongo, Nuov. Annali Sc. Nat. di Bologna (1853).
Triton carnifex, Bonaparte, Fauna Ital. (1832).
Triton karelinii, Strauch., Révision de Salamand. Gatt., Mem. Acad. S. Pétersb., VII sér., vol. XVI, n. 4, p. 42, tav. 1, fig. 1, (1870).
Triton cristatus, var. *platycephalus*, Fatio, Faune des Vertébrés de la Suisse, III, p. 527.
Molge cristata, var. *karelinii*, Boulenger, Cat. Batr. Grad. Brit. Mus., p. 10 (1882).
Triton cristatus, Bonaparte, Fauna ital. (1832) — Balsamo in Cattaneo, Not. natur., s. Lombard., Fauna, p. 389 (1844) — De Betta, Cat. Rett., Valle di Non., Atti Soc. Bot. Zool. di Vienna, II, p. 156 (1852) — Cat. Syst. Reptil. Mus., p. 28 (1853) — Erpet. prov. Venet. e Tirol., p. 336 (1857), Fauna Veronese, p. 129 (1863) — Massalongo, Saggio, Erpet. popol., Mem. Accad. Veron., vol. XXIX, p. 431 (1854) — Jan., Mus. Mediolan., p. 55 (1857) — Nardo, Prosp. anim. venet., p. 62 (1860) — De Betta, Monografia Anfibi urodeli italiani, Mem. R. Ist. Veneto XI, p. 534 — Fauna italiana Rett. ed Anfibi, p. 85 (1874) — P. Pavesi, Rendiconto Istituto Lombardo, ser. II, v. X, fasc. XV (1877) — Giglioli, Mam. Uc., Ret., Ittiof. e Anf. e Rett. italiani, Firenze, p. 16 (1880) — Campeggi, Catal. Rett. e Anf. di Contorno di Milano. Milano, 1883 — P. Riccardi, Anfibi del Modenese, Ann. Soc. dei Natur. di Modena (1877) — Bonizzi, Anfibi di Modena (1870).
Triton Blasii, Prada, Notizie nat. e chimico-agronomiche nella provincia di Pavia, 1864 — De Betta, Fauna ital. Rett. ed Anf., p. 86 — Pavesi, Rendiconto Istituto Lombardo, ser. II, v. X, fasc. XV (1877) — De Betta, Alcune note erpetol., Atti Istituto Veneto, ser. V, vol. IV (1878).

---

(1) Le figure del Bonnaterre rappresentano forme molto somiglianti a quelle della s. sp. *karelinii*, soprattutto per quanto riguarda la cresta dorsale del maschio: il capo tuttavia è mal disegnato e non si può quindi fare nessun giudizio sicuro.

(2) Rusconi mantiene il nome di *Daubenton* al *Triton cristatus*, come dichiara egli stesso: credo tuttavia che egli abbia modificato il *platyura* col *platicauda*. Sarebbe utile di verificare la cosa consultando l'*Encyclop.* del Daubenton del 1784, cosa che non mi venne fatto di fare.

Triton cristatus, subsp. *longipes.*

Triton longipes, Strauch, Révision de Salamand. Gatt., Mém. Acad. St.-Pétersb, VII sér., vol. XVI, n. 4, pag. 44, tav. 1, fig. 2 (1870).

a) 50 esemplari Contorni di Torino.
b) 3 » Susa, Maggio, 1880, L. Camerano.
c) 20 » Varese, 1883, dal sig. Capitano G. Bazetta.
d) 3 » Lugano, 1882, dal sig. Ingegnere Lubini.
e) 6 » Occhieppo inferiore (presso Biella) dal Dott. L. Schiaparelli, 1877.
f) 2 » Valduggia, dal signor Gallesi, 1882.
g) 2 » Verona, dal Comm. E. De Betta.
h) 60 » Veneto, dal sig. Conte Ninni, 1883.
i) 40 » Novara, dal sig. Capitano G. Bazzetta, 1884.
j) 9 » Vercelli, dal sig. Dott. A. Malinverni, 1884.
k) 2 » Conegliano, dal sig. L. Mancini, 1882.
l) 3 » Liguria.
m) 3 » Vallombrosa, dal Prof. H. Giglioli, 1878.
n) 6 » Sesto (Firenze) id. id.
o) 12 » Gran Sasso d'Italia, dal Prof. Pedicinio, 1881.
p) 40 » Contorni di Roma, dal Prof. F. Gasco, 1884.
q) 24 » Porto S. Giorgio (Marche), dal Conte T. Salvadori, 1883.
r) 70 » Ancona, dal sig. Prof. Paolucci, 1883.
s) 1 » Bologna, dal sig. Bonafede, 1884.
t) 1 » Campobasso, dal Dott. Mamini, 1884.
u) 1 » Monte Soglio (Canavese), L. Camerano, 1884.
v) 30 » (larve) Monte Maiella, dal Dott. Gibelli, 1884.

Triton cristatus, Laur.

Capo più lungo che largo (1), arrotondato anteriormente, superiormente convesso, soprattutto nei maschi, poco depresso anteriormente, apofisi sopra orbitale mancante o appena accennata; denti palatini disposti in due serie longitudinali che cominciano fra gli orifizii nasali interni e si prolungano più o meno allo indietro, ora essendo parallele fra loro ora riunendosi ad angolo nella parte anteriore ora presentando nel loro percorso varie incurvature. Tronco allungato, più lungo nelle femmine che nei maschi, zampe non molto lunghe e distanti fra loro, dita lunghe, sottili e libere, due tubercoli palmari e due tubercoli plantari. Pelle robusta, più o meno granulosa, una ripiegatura golare assai spiccata, un inspessimento ghiandolare nella regione parotidea,

(1) Misurato sino alle sporgenze joidee.

pori numerosi sul capo, sul dorso e sulla coda. Nei maschi una cresta dorsale, la quale comincia sul capo, quasi all'apice del muso e piglia un grandissimo sviluppo nell'epoca degli amori, la sua altezza supera spesso l'altezza del tronco. Nella coda si nota uno sviluppo grandissimo della pelle soprattutto verso la base. Parti superiori oscure, brune, o nere, o verdastro cupo, con o senza macchie, rotondeggianti più scure, capo ora del colore del dorso, ora marmoreggiato o punteggiato di bruno, di nero, di biancastro e di giallastro, gola bruno-nera fittamente macchiettata di chiaro, parti inferiori di color rosso arancio più o meno rosso o più o meno giallo con macchie oscure, brune, azzurrastre o nere od anche nere circondate di azzurrastro, ora in piccolo numero, ora molto grosse e talvolta confluenti. Nel maschio la coda ha lateralmente una fascia bianca ben sviluppata soprattutto nell'epoca degli amori; la cresta dorsale è come il rimanente del dorso, ora con, ora senza macchie. La femmina e i giovani hanno spesso sul dorso una linea mediana longitudinale gialla; una linea simile si incontra pure nel margine inferiore della coda.

Lunghezza media m. 0,136.

Triton cristatus, Laur., subspec. *karelinii*, Strauch.

Come nella forma precedente, salvo che il capo è un po' più grosso, piano superiormente e più arrotondato nella parte anteriore. Il maschio non ha mai nemmeno nel periodo degli amori una cresta dorsale molto sviluppata, raramente essa oltrepassa in altezza il quarto di altezza del tronco, anche la coda è notevolmente meno alta che nella forma precedente.

Lunghezza media m. 0,130.

Triton cristatus, Laur., subspec. *longipes*, Strauch.

Come nelle due forme precedenti; questa sottospecie ha i caratteri generali della forma tipica, ma si avvicina molto alla subsp. *karelinii*, per quanto si può giudicare dalla descrizione e dalle figure dello Strauch (1) per la forma del capo e per lo sviluppo e la forma della cresta dorsale del maschio e della membrana caudale. Il suo carattere distintivo si è l'avere le zampe notevolmente più lunghe che non nelle forme precedenti.

Lunghezza totale m. 0,129.

Delle tre forme ora descritte l'Italia, per quanto risulta sino ad ora, presenta in modo sicuro solamente la seconda, alla quale anzi appartengono tutti gli esemplari di *Triton cristatus* che io ho esaminato provenienti dalle varie località italiane ed

(1) Op. cit.

alla quale si riferiscono le descrizioni degli autori italiani. Manca adunque all'Italia la forma tipica del *Triton cristatus*, vale a dire la forma dell'Europa settentrionale e centrale.

In quanto poi alla terza forma il subsp. *longipes* io riferisco ad essa principalmente gl' individui provenienti dal Gran Sasso d'Italia, e l'individuo (*s*) proveniente da Bologna, e quello (*t*) di Campobasso, i quali come dirò meglio in seguito, presentano con essa notevoli somiglianze. Io faccio ciò tuttavia soltanto provvisoriamente, poichè non ho potuto avere esemplari tipici della subsp. *longipes*, e poichè non è nemmeno ben accertato il valore delle sottospecie in discorso. Ad ogni modo è un fatto che gli esemplari del Gran Sasso sono abbastanza diversi da quelli delle altre località italiane e che essi rassomigliano alla subsp. *longipes*.

La descrizione che segue è fatta esclusivamente su esemplari italiani e perciò si riferisce alla subsp. *karelinii*.

Il capo è relativamente grande e più o meno distante dal tronco. Nelle femmine è un po' più grande che nei maschi. Gli individui del Gran Sasso d'Italia presentano un capo più grosso e spiccatamente distinto dal tronco. La forma della testa è variabile essendo essa a contorno ora più ora meno arrotondato od appuntito. I maschi hanno spesso il capo più appuntato e talvolta anzi perfettamente ovale. Nelle femmine invece il capo spesso si allarga bruscamente un po' al di là degli occhi. Visto di profilo il

Fig. 6.
Schema dei denti palatini del *Triton cristatus* s.sp. Karelinii

capo si presenta depresso anteriormente. In generale il capo è superiormente piano ed appiattito soprattutto nelle femmine e negli individui del Gran Sasso. Nei maschi esso è un po' più convesso, ma meno che nella forma tipica del Nord e del centro di Europa.

La distanza fra gli occhi superiormente è eguale a quello che è fra l'angolo anteriore dell'occhio e le narici ed è quasi il doppio di quella che separa le narici fra loro.

Il muso è più o meno aguzzo e la mandibola superiore sporge di un millimetro o poco meno sull'inferiore, il labbro superiore ricopre con una espansione membranosa l' inferiore per due terzi circa a partire dall'angolo della bocca. Questo carattere è tuttavia variabile e talvolta è appena accennato.

Lo squarcio della bocca oltrepassa l'angolo posteriore dell'occhio della metà circa del diametro trasversale dell'occhio stesso. Nei maschi lo squarcio è un po' più corto.

L'occhio è mediocre, poco sporgente, il suo massimo diametro trasversale è circa eguale alla distanza che è fra l'occhio e le narici.

Le guancie sono, ora molto inclinate e scanalate trasversalmente come nelle femmine e soprattutto in quelle del Gran Sasso, ora quasi verticale come in molti maschi, esse sono più o meno nettamente separate dalla parte superiore del capo per mezzo di un piccolo rialzo.

La lingua è piccola subovale e un po' libera ai lati.

I denti palatini sono disposti in due serie longitudinali e sono alquanto variabili nella loro disposizione, come si può vedere dalle figure qui unite.

Il capo è, misurato dall'apice del muso sino alle sporgenze ioidee, notevolmente più lungo che largo. Spesso nelle femmine, soprattutto in quelle del Gran Sasso e di altre località dell'Italia centrale la differenza fra le due misure è piccola.

La lunghezza del capo è contenuta tre volte circa nella lunghezza del tronco, nelle femmine vi è talvolta contenuta anche tre volte e mezzo.

Il tronco è robusto, senza essere tozzo, esso è rialzato verso i due terzi posteriori e poi si deprime verso il capo, in alcuni esemplari la depressione anteriore è notevole. Nei maschi è proporzionatamente più corto che nelle femmine.

Le estremità anteriori nella massima parte degli esemplari italiani sono corte, in quelle del Gran Sasso sono un po' più lunghe ed hanno a un dipresso le proporzioni del *Triton longipes* dello Strauch, come già ho detto. Nella tavola delle misure degli individui delle varie località italiane si può scorgere bene l'andamento dello sviluppo in lunghezza delle estremità anteriori.

Le dita sono quattro, appuntate, allungate, sottili e intieramente libere, il 1° dito è il più corto, poi viene il 4°, poi il 2°, poi il 3° che è il più lungo e che misura negli esemplari italiani completi m. 0,007, m. 0,008, m. 0,009 e qualche volta anche m. 0,010. La faccia palmare presenta un piccolo ma ben evidente tubercolo alla base del 4° dito. Gli esemplari del *T. cristatus* tipico del Nord e del centro di Europa hanno un secondo tubercolo più arrotondato e più piccolo alla base del 1° dito. Negli esemplari italiani questo tubercolo è evidente nei giovani, negli adulti manca quasi generalmente od è piccolissimo.

Le estremità anteriori, ripiegate lungo i fianchi, nelle femmine generalmente non arrivano od arrivano appena alla metà dei fianchi in quelle del Gran Sasso oltrepassano alquanto la metà, in quelle di Roma e di altre località dell'Italia centrale arrivano generalmente alla metà; nei maschi arrivano alla metà dei fianchi, in quelli del Gran Sasso la oltrepassano notevolmente.

Le zampe posteriori sono più tozze delle anteriori e differiscono da queste generalmente poco in lunghezza.

Le dita sono cinque appuntate, un po' appiattite e intieramente libere. Il 1° dito è il più corto, poi viene il 5°, poi il 2°, poi il 4° e poi il 3° che è di poco più lungo del 4°. Nella faccia plantare vi sono due tubercoli uno arrotondato alla base del 5° dito ed uno più o meno appuntato alla base del 5° dito. Nei maschi questo tubercolo è più sviluppato che nelle femmine e sporge spesso allo infuori. Talvolta le dita sono molto appiattite, soprattutto nei maschi.

Il rialzo cloacale è mamillonare.

La coda è di forma e di estensione molto variabile. Nelle femmine è lanceolata ed appuntata e misura la lunghezza del corpo e del capo uniti insieme. Lo sviluppo in altezza della coda varia da pozzanghera a pozzanghera, da individuo a individuo, è del resto cosa non facile trovare individui che abbiano questa parte perfettamente intatta e la di cui cresciuta sia assolutamente normale.

Nei maschi la coda è lanceolata ed appuntata e talvolta termina con una punta lunga e sottile, essa è più corta che nelle femmine poichè non misura che circa

la lunghezza del tronco, essa è invece più alta soprattutto verso la base. L'altezza della coda degli esemplari italiani non giunge tuttavia mai ad eguagliare quella degli esemplari del *Triton cristatus* tipico del Nord e del centro d'Europa come si può vedere dalla tavola di misure qui unita. Talvolta il margine superiore della coda è dentellato, spesso queste dentellature provengono da morsicature e da strappi fatti o da altri tritoni o da coleotteri acquaiuoli (*Hydrophilus* e soprattutto *Dytiscus* e *Cybister*).

La pelle è spessa e di aspetto variabile secondo le stagioni e secondochè l'animale è nell'acqua o fuori dell'acqua. Nelle condizioni normali e nell'acqua essa è rugosa, in qualche individuo anche granulosa. Vi è un rigonfiamento parotidiforme spiccato all'indietro del capo; la ripiegatura della gola è molto spiccata; sul capo fra gli occhi, sulle guancie, lungo il dorso e sulla coda vi sono numerosi pori; negli individui italiani sono soprattutto spiccati quelli del capo. Il maschio ha lungo il dorso nella regione mediana una cresta che comincia sul capo fra gli occhi e si estende fino all'origine della coda, questa cresta è molto più sviluppata in primavera che non nelle altre stagioni ed è più o meno dentellata. Gli esemplari italiani, anche nel periodo degli amori non hanno mai uno sviluppo della cresta così grande come gli esemplari del *T. cristatus* tipico, il che si può vedere dalle misure comparate della tavola qui unita.

Gli esemplari del Veneto e in generale della parte inferiore della valle del Po e delle Marche hanno la cresta in discorso forse più sviluppata di quelli delle altre regioni italiane.

Negli esemplari del Gran Sasso e del Romano la cresta è poco sviluppata.

La colorazione è variabile secondo le località, secondo i sessi, secondo le stagioni e secondo le condizioni di umidità, di temperatura e soprattutto di limpidità e di profondità delle acque.

Nei maschi italiani le colorazioni generali e fondamentali sono: parti superiori di color bruno nerastro o bruno verdastro o nero cupo. Nei primi due casi si osservano generalmente numerose macchie rotondeggianti più scure sparse su tutto il corpo e anche sulla cresta, su di questo si osservano talvolta (individuo *q* di Bologna) verso il capo varie macchiettature gialle, resti forse della linea gialla dorsale della età giovanile; il capo è marmoreggiato di nero e di bianco giallastro o grigiastro. La gola è nerastra punteggiata di chiaro, le parti inferiori sono di color arancio più o meno giallo o più o meno rosso con numerose macchie nere, sui fianchi vi è una serie di punteggiature biancastre più o meno appariscenti. La coda è bruno nerastra con una fascia sui lati biancastra, assai spiccata soprattutto all'epoca degli amori, che ne occupa i due terzi. Il rialzo cloacale è generalmente intensamente nero. Le estremità sono segnate fino all'apice delle dita di macchiette nere rotondeggianti.

Nelle femmine italiane la tinta fondamentale è spesso un po' meno intensa che nei maschi e può essere brunastra-grigio, olivastra o anche verdastra, od anche intensamente nera. Le macchie rotondeggianti nere ad anche azzurro nerastre che stanno sul corpo sono in generale più piccole e più confuse che nei maschi. Rarissimamente il capo è marmoreggiato, salvo sui lati del capo dove la marmoreggiatura chiara e scura o la punteggiatura chiara è assai spiccata.

Sul dorso nella linea mediana vi è una striscia longitudinale gialla più o meno spiccata e più o meno schietta, talvolta il giallo passa al verdastro. Questa riga gialla circonda però interamente al di sopra e al di sotto anche la coda.

I fianchi sono spiccatamente punteggiati di chiaro, queste punteggiature si estendono anche sulle estremità e sui lati della coda, sin quasi all'apice di questa. Vi sono tuttavia delle femmine prive intieramente delle linee gialle ora descritte e nelle quali la punteggiatura chiara è poco sviluppata.

Il rialzo cloacale è giallo e senza macchie nere.

Le parti inferiori sono come nei maschi; i giovani rassomigliano alle femmine e quasi costantemente presentano le righe gialle sopra indicate.

Nei maschi giovani la linea gialla dorsale talvolta manca; in questi sono generalmente ben evidenti le macchie nere della regione cloacale.

Fra le numerose varietà di colorazione io menzionerò qui le principali, tenendo conto soprattutto della loro distribuzione geografica in Italia.

Var. *oculata*. Maschio. Parti superiori di colore bruno, nerastro od olivastro o grigiastro, parti inferiori aranciate, capo spiccatamente marmoreggiato.

Le parti superiori, la cresta, i fianchi e le parti inferiori sono coperte da grosse macchie nere, orlate di un cercine più chiaro che spesso tende, soprattutto nella stagione degli amori, all'azzurrastro, cosicchè si hanno delle vere macchie oculiformi. Queste macchie si estendono, rimpicciolendosi, anche sui lati della coda dove spesso sono disposte in linee longitudinali al disopra e al disotto della fascia bianca; le estremità sono coperte da numerose macchie brune, le quali spesso confluiscono fra loro e hanno l'aspetto di una marmoreggiatura. Talvolta sui fianchi o sulla parte mediana del ventre le macchie nere si riuniscono fra loro in striscie longitudinali.

Le femmine hanno una colorazione generale analoga a quella dei maschi, le macchie oculiformi sono tuttavia più piccole e meno spiccate, ma sono numerose e si estendono anch'esse lateralmente sulla coda, sul dorso esse si presentano talvolta disposte in serie longitudinali ed anzi in qualche esemplare costituiscono due striscie nere ai lati della striscia gialla mediana. Il capo non è marmoreggiato che ai lati. Le estremità sono del colore del dorso, quindi più scure che nei maschi e con minor numero di macchie.

Io ho ricevuto i migliori esemplari di questa varietà dal Veneto dove mi pare che sia predominante sulle altre. Essa si trova tuttavia anche nelle altre località italiane.

Var. *atra*. Parti superiori del maschio di color bruno nerastro o nero cupo. Capo, cresta, estremità coloriti come il dorso, fianchi di color bruno nerastro con macchie rotondeggianti più scure, parti inferiori di color giallo arancio vivissimo con grosse macchie nere.

Femmina colorita come il maschio superiormente, ma con una riga giallo dorsale ben evidente.

Questa varietà è frequente assai nell'alta valle del Po e nella massima parte delle località italiane. Gli individui figurati dal Bonaparte appartengono a questa varietà.

Var. *aterrima.* Maschi e femmine superiormente e sui fianchi di color nero ebano senza alcuna traccia di macchie, punteggiature dei fianchi della femmina e fascie bianche della coda dei maschi poco spiccate.

Parti inferiori di color arancio carico con numerose, grosse e spesso confluenti macchie nere. Estremità interamente nere, orlo giallo della coda ridotto nelle femmine ad un piccolo tratto al di là della cloaca.

In qualche esemplare il colore giallo scompare intieramente e si ha allora un caso di melanismo completo.

Questa varietà io l'ho avuta dal Romano e anche in un grado un po' minore da alcune località dell'alta valle del Po (Varese, Novara).

Var. *obsoleta.* Questa varietà si presenta colorita come la var. atra, salvo che le tinte sono un po' meno oscure e soprattutto le macchiettature sono più incerte, anche nei maschi in amore. La tinta generale dell'animale tende al grigiastro. Io ebbi questa varietà dalle Marche.

Non ho mai osservato casi di grande sviluppo della tinta gialla sui fianchi e il passaggio di essa sul dorso.

Io credo di far cosa utile e grata al lettore di riferire qui il brano seguente della classica opera del Rusconi: *Amours des Salamandres aquatiques* « Les Salamandres de cette espèce (*T. cristatus*) quand elles sont fort jeunes, c'est-à-dire peu après leur métamorphose, ont une raie d'un beau jaune, bordée de brun et de noir laquelle s'étend depuis le milieu de la tête jusqu'à l'extrémité de la queue. A cette époque de leur vie, on ne remarque dans leur conformation extérieure aucune différence entre le mâle et la femelle, mais au printemps de l'année qui suit, la raie jaune disparaît entièrement de dessus le dos du mâle et elle est remplacée par la crête membraneuse et découpée qui à fait donner à cette espèce de *Salamandre* le nom de *Salamandra cristata.* Vers le commencement de l'automne de la seconde année, la crête membraneuse présente à sa base des petites tâches jaunes, lesquelles, en s'étendant peu à peu le long du dos, finissent par former de nouveau la raie qui était disparue cinq ou six mois avant ; en attendant la crête membraneuse se rétrécit et vers la fin de l'automne et même avant elle se trouve changée en une raie un peu saillante d'un jaune terne. Au retour de la belle saison de la troisième année, la raie jaune disparaît, le mâle se pare de nouveau de sa crête, laquelle se rétrécit notablement dès que la saison des amours est passée ; cependant elle lui reste toujours ; vers l'automne on aperçoit encore quelques légères traces de la raie jaune, mais elles disparaissent à jamais au printemps de la quatrième année. D'après mes observations, le mâle n'est en état de reproduire qu'au bout de trois ans ».

Il *Triton cristatus* è forma schiettamente acquatica e raramente lascia le pozzanghere. Essa è una specie molto vorace e si nutre di larve di insetti, di piccoli crostacei, di girini, di varie specie di anfibi ed anche di girini della propria specie. Ho osservato ripetutamente che il *T. cristatus* è ghiotto delle uova delle rane e delle raganelle. Qualche volta si trovano nello stomaco di questi animali delle pietruzze e dei pezzi di piante acquatiche, queste sostanze vengono ingoiate accidentalmente dall'animale insieme a qualche insetto.

In schiavitù si nutrono facilmente con carne cruda tagliata a pezzettini.

La riproduzione comincia generalmente alla fine di marzo o in principio di aprile; talvolta anche alla metà di marzo; ciò varia secondo le località e secondo gli anni. Lo sviluppo dura tre mesi o tre mesi e mezzo, come osservò il Rusconi (op. cit.) nel contorno di Pavia e come io osservai ripetutamente nel contorno di Torino. In Svizzera secondo il Fatio (op. cit.) lo sviluppo dura da quattro a cinque mesi.

Il letargo invernale dura più o meno secondo gli anni, il *Triton cristatus* lo compie ora nella melma al fondo delle pozzanghere, e per quanto io ho potuto osservare, questo mi pare il caso più frequente, o fra il muschio, o fra le radici degli alberi, o nella terra umida.

La distribuzione geografica di questa specie in Italia non è intieramente nota.

Il *T. cristatus* è abbondante nella valle del Po e nella parte centrale dell'Italia peninsulare: nella parte meridionale è un po' più scarso; senza tuttavia essere raro.

Non è stato trovato con certezza, quantunque lo si trovi menzionato in vari cataloghi in Sicilia.

Non è stato trovato in Sardegna, in Corsica e nelle isole minori.

Nel versante Mediterraneo dell'Italia peninsulare è più scarso che non nel versante Adriatico e in alcuni tratti pare manchi al tutto.

Raramente il *T. cristatus* si spinge oltre ai 1000 metri s. l. d. m.

Ho già detto sopra le particolarità che distinguono gli esemplari della bassa valle del Po e del versante Adriatico; versante che è caratterizzato dalla presenza di quella forma che io riferisco alla sotto-specie *longipes* di Strauch.

Triton cristatus, s. sp. Karelinii.

	TORINO				LIGURIA	LUGANO		CONEGLIANO	
	♂ (1)	♂ (1)	♀	♀	♀	♂ (2)	♀	♂ (3)	♀
Lunghezza totale	0, 108	0, 105	0, 129	0, 126	0, 103	0, 110	0, 121	0, 099	0, 112
» del capo	0, 013	0, 015	0, 014	0, 013	0, 013	0, 012	0, 014	0, 014	0, 014
Larghezza » » . . .	0, 010	0, 012	0, 012	0, 011	0, 012	0, 015	0, 013	0, 011	0, 011
Lunghezza del tronco	0, 045	0, 045	0, 055	0, 054	0, 042	0, 044	0, 053	0, 038	0, 045
» della coda	0, 050	0, 045	0, 060	0, 059	0, 048	0, 054	0, 054	0, 047	0, 053
» delle estremità anter.	0, 023	0, 021	0, 022	0, 023	0, 020	0, 022	0, 022	0, 020	0, 018
» » » poster.	0, 025	0, 023	0, 024	0, 024	0, 021	0, 025	0, 022	0, 021	0, 020
Altezza mass. della cresta dors.	0, 004	0, 003	»	»	»	0, 002	»	0, 025	»
» » della coda . . .	0, 012	0, 013	»	»	»	0, 012	»	0, 012	»

(1) Di primavera. — (2) Di autunno. — (3) Di estate

Segue *Triton cristatus, s. sp. Karelinii.*

	VERONA		VARESE			SUSA	SESTO		GRAN SASSO D'ITALIA	
	♂	♀	♀	♂ (3)	♀	♀	♂	♀	♂ (4)	♂
Lunghezza totale	0, 112	0, 099	0, 026	0, 111	0, 132	0, 137	0, 093	0, 126	0, 118	0, 117
» del capo	0, 012	0, 013	0, 016	0, 013	0, 015	0, 015	0, 012	0, 015	0, 015	0, 017
Larghezza » »	0, 010	0, 010	0, 013	0, 011	0, 013	0, 015	0, 010	0, 012	0, 013	0, 014
Lunghezza del tronco	0, 049	0, 045	0, 052	0, 045	0, 053	0, 055	0, 037	0, 051	0, 049	0, 047
» della coda	0, 051	0, 051	0, 058	0, 053	0, 064	0, 067	0, 044	0, 060	0, 054	0, 053
» delle estremità anter.	0, 020	0, 018	0, 022	0, 020	0, 022	0, 022	0, 020	0, 022	0, 024	0, 025
» » » poster.	0, 022	0, 020	0, 024	0, 024	0, 024	0, 023	0, 021	0, 023	0, 026	0, 026
Altezza massima della cresta dors.	0, 003	»	»	»	»	»	0, 003	»	0, 002	0, 002
» » della coda	0, 010	»	»	»	»	»	0, 010	»	0, 009	0, 010

(3) Presi in letargo nel mese di Gennaio. — (4) Di estate.

Segue *Triton cristatus, s. sp. Karelinii.*

	GRAN SASSO D'ITALIA		PORTO S. GIORGIO					ROMA		
	♀	♀	♀	♂	♀	♂	♂	♀	♀	♀
Lunghezza totale	0, 137	0, 127	0, 108	0, 129	0, 123	0, 115	0, 115	0, 133	0, 132	0, 147
» del capo	0, 017	0, 015	0, 014	0, 015	0, 015	0, 013	0, 014	0, 013	0, 015	0, 017
Larghezza » »	0, 016	0, 014	0, 013	0, 013	0, 012	0, 012	0, 011	0, 015	0, 013	0, 013
Lunghezza del tronco	0, 055	0, 052	0, 044	0, 055	0, 051	0, 050	0, 050	0, 054	0, 053	0, 061
» della coda	0, 065	0, 060	0, 050	0, 059	0, 057	0, 052	0, 051	0, 066	0, 064	0, 069
» delle estremità anter.	0, 029	0, 023	0, 019	0, 020	0, 022	0, 020	0, 021	0, 024	0, 024	0, 024
» » » poster.	0, 030	0, 025	0, 020	0, 021	0, 023	0, 021	0, 022	0, 025	0, 024	0, 023
Altezza massima della cresta dors.	»	»	»	»	»	0, 003	0, 003	»	»	»
» » della coda . .	»	»	»	»	»	0, 013	0, 014	»	»	»

Segue *Triton cristatus, s. sp. Karelinii.*

	ANCONA							VENETO		
	♂	♂	♂	♂	♀	♀	♀	♂	♂	♂
Lunghezza totale	0, 112	0, 105	0, 122	0, 139	0, 148	0, 132	0, 123	0, 119	0, 118	0, 122
» del capo	0, 015	0, 016	0, 016	0, 018	0, 016	0, 017	0, 015	0, 016	0, 016	0, 014
Larghezza » »	0, 011	0, 012	0, 013	0, 015	0, 015	0, 014	0, 013	0, 012	0, 011	0, 010
Lunghezza del tronco	0, 045	0, 042	0, 052	0, 059	0, 062	0, 058	0, 054	0, 051	0, 049	0, 053
» della coda	0, 052	0, 047	0, 054	0, 062	0, 070	0, 067	0, 054	0, 052	0, 053	0, 055
» delle estremità anter.	0, 022	0, 022	0, 025	0, 027	0, 024	0, 024	0, 022	0, 024	0, 024	0, 024
» » » poster.	0, 024	0, 023	0, 027	0, 029	0, 025	0, 824	0, 023	0, 026	0, 025	0,0 26
Altezza mass. della cresta dors.	0, 003	0, 003	0, 003	0, 003	»	»	»	0, 005	0, 005	0, 006
» » della coda . . .	0, 013	0, 013	0, 012	0, 012	»	»	»	0, 015	0, 014	0, 015

Segue *Triton cristatus*, *s. sp. Karelinii.*

	VENETO				NOVARA				VERCELLI	
	♂	♂	♀	♀	♂	♂	♀	♀	♂ (5)	♀
Lunghezza totale	0, 123	0, 118	0, 129	0, 139	0, 117	0, 107	0, 132	0, 130	—	0, 130
» del capo	0, 016	0, 014	0, 014	0, 015	0, 015	0, 014	0, 016	0, 014	0, 014	0, 014
Larghezza » »	0, 012	0, 010	0, 012	0, 012	0, 012	0, 010	0, 013	0, 022	0, 010	0, 012
Lunghezza del tronco	0, 052	0, 051	0, 058	0. 055	0, 049	0, 043	0, 055	0, 055	0, 046	0, 051
» della coda	0, 055	0, 053	0, 067	0, 069	0, 053	0, 050	0, 061	0, 061	(6)	0, 065
» delle estremità anter.	0, 022	0, 022	0, 022	0, 022	0, 023	0, 022	0, 021	0, 021	0, 019	0, 020
» » » poster.	0, 024	0, 023	0, 023	0, 022	0, 025	0, 023	0, 022	0, 022	0, 020	0, 022
Altezza mass. della cresta dors.	0, 007	0, 006	»	»	0, 003	0, 004	»	»	0, 003	»
» » della coda . . .	0, 015	0, 014	»	»	0, 012	0, 013	»	»	—	»

(5) Primavera. — (6) Coda incompleta

	Triton cristatus s. sp. Karelinii				*Triton cristatus* tipico				*Triton cristatus* s. sp. *longipes*
	VERCELLI juv.	ANCONA juv.	ROMA juv.	OCCHIEPPO (Biella) juv. branch.	SVIZZERA ♂	♂	♂ (7)	♀	(8)
Lunghezza totale	0, 080	0, 088	0, 085	0, 070	0, 133	0, 112	0, 137	0, 148	0, 129
» del capo	0, 010	0, 011	0, 011	0, 012	6, 015	0, 017	0, 019	0, 020	0, 016
Larghezza » »	0, 008	0, 009	0, 009	0, 009	0, 011	—	—	—	0, 014
Lunghezza del tronco	0, 030	0. 036	0, 036	0, 027	0, 055	0, 056	0. 070	0, 071	0, 049
» della coda	0, 032	0, 041	0, 038	0, 031	0, 063	0, 056	0, 067	0, 077	0, 064
» delle estremità anter.	0, 015	0, 014	0, 015	0, 012	0, 024	0, 023	0, 027	0, 025	0, 029
» » » poster.	0, 016	0, 015	0, 016	0, 012	0, 025	0, 023	0, 028	0, 026	0, 030
Altezza mass. della cresta dors.	»	»	»	»	0, 010	0, 011	0, 015	»	«
» » della coda . . .	»	»	»	»	0, 020	0, 020	0, 025	»	»

(7) Dal Fatio, *Faune Suisse*, III, p. 530. Misure. — (8) Dallo Strauch, *Révision de Salaman. Gatt.* Mém. Acc. St.-Pétersb., VII, XVI.

SALAMANDRA.

LAURENTI — *Syn. Rept.* p. 41 (1768) (1).

Mancanza di arco fronto squamoso: lingua fissa anteriormente, spiccatamente libera ai lati ed un po' anche posteriormente. Parotidi sviluppate, denti palatini disposti in due serie longitudinali variamente incurvate; coda rotonda o ciclotetragona; 4 dita anteriormente e 5 posteriormente.

Questo genere comprende fino ad ora soltanto tre specie che abitano la regione Paleartica: una è del Caucaso (*S. caucasica* Waga) ed è rarissima, l'altra è propria principalmente dell'Europa media (*S. atra* Laur.), e l'altra è la più diffusa (*S. maculosa* Laur.).

In Italia si trovano la *S. maculosa* Laur. e la *S. atra* Laur.

Vari catalogi menzionano una quarta specie la *S. corsica* Savi. Ma questa non deve essere conservata per le ragioni svolte nel capitolo relativo alla Salamandra maculosa.

Salamandra maculosa, LAUR. (2).

Lacerta salamandra, Linn. S. N. 1, p. 371 (1766) — S. N. Gmel., vol. 1, part. III, p. 1066, sp. 47 (part.) (1790) — Sturm. Deutschl. Faun. III (1799) — Latreille, Hist. Rept. II, p. 194 (1802).

Salamandra maculosa, Laurenti. Syn. Rept., p. 42 e p. 151 (1768) — Fitzinger Neu. classif. Mus. Wien., p. 66 (1826) — Gravenhorst. Del. Mus. Vratis, p. 74 (1829) — Wagler, Syst. Amph., p. 208 (1830) — Bonaparte Fauna italica (1837) — Fitzinger, Syst. Rept., p. 33 (1843) — Balsamo in Cattaneo Notiz. nat. Lombard., p. 388 (1844) — Gray. Cat. Batrac. Graden. Brit. Mus., p. 16 (1850) — Dugès, Ann. Sc. Nat., Ser. III, vol. XVII, p. 259 (1852) — Ambrosi, Prospetto zool. in Statist. Trent., 1, p. 291 (1852) — De Betta, Catal.

(1) Molti autori considerano come autore del genere il WURFFBAIN, il quale parla della comune Salamandra nella sua *Salamandrologia* che egli scrisse nel 1683. Ciò è poco conveniente; il primo a stabilire il genere *Salamandra* secondo la nomenclatura binomia fu il LAURENTI nel 1768, perciò il nome di questo autore deve seguire il nome del genere *Salamandra*.

(2) Questa specie è nota da tempi antichissimi e la troviamo menzionata da ARISTOTILE, ELIANO, NICANDRO, PLINIO, ecc., come pure da numerosi autori posteriori antecedenti a LINNEO. Ricorderò qui i principali:

MATTHIOLI, *Corn.* in lib. II. *Dioscorid.*, cap. 56, p. 197 (1569).
FERRANTE IMPERATI, *Hist nat.*, lib. XXVIII (1599).
C. GESNER, *Hist. anim.*, lib II, p. 80. Francoforte (1620).
U. ALDROVANDI, *De quadr. ovip.*, lib. I, cap. 1, p. 39 (1637).
J. P. WURFFBAIN, *Salamandrologia*, p. 52 (1683).
G. RAY, *Synops. anim*, p. 273 (1694).
O. JACOBAEUS, *Acta afnensia*, vol. IV (1699).
M. B. VALENTINI, *Amph. zool.*, (1720).
A. SEBA, *Thes. rerum nat.*, v. II, (1740).
C. OWEN, *Hist. of Rept.*, p. 92 (1742).
ROËSEL. *Hist.* ran. nostr. figura nel frontispizio (1758).

d. Rettili della valle di Non. Atti Soc. zool. Bot. di Vienna, II, p. 159 (1852) Cat. Syst. Rept. Mus., p. 27 (1853) — Massalongo Saggio Erpet. popol. Mem. Accad. Veron., vol. XXIX, p. 430 (1854) — Duméril et Bibron Erpet. génér., vol. IX, p. 52 (1854) — De Betta, Erpet. Prov. Venete e Tirolo, p. 318 (1857) — Jan. Rept. Mus. Mediol., p. 54 (1857) — Nardo, Prosp. anim. prov. venet., p. 62 (1860) — De Betta Fauna Veronese, p. 129 (1863) — Monografia, Anf. Ital. Mem. Istituto Veneto, vol. XI, p. III, p. 516 (1864) — Leydig, U. d. Molche d. würtemberg. Fauna. Archiv. f. Naturg. 1867, p. 239 (1867) — Strauch, Salam., p. 30 — Fatio, Faune des Vertéb. de la Suisse III, p. 491 (1872) — De Betta Fauna Ital. Rett. ed Anf., p. 78 — Schreiber, Herpetologia Europaea, p. 75 — Lataste, Faune de la Gironde, p. 322 (1876) — Giglioli, Elenco dei Mammiferi, Uccelli e Rettili ittiofagi, Anfibi e Pesci, p. 16, Firenze (1880) — L. Camerano, Scelta sessuale negli Anfibi urodeli, Atti R. Acc. delle Scienz. di Torino, vol. XVI (1881) — Boulenger, Catal. Batrac. Gradent. Brit. Mus., p. 3 (1882) — Benecke, Ueber dr. Entwich. des Erdsalàmanders. Zool. Anz., n. 46, 1880.

Salamandra maculata. Merr. Syst. amph., p. 185 (1820) — Risso Hist. nat. III, p. 95 (1826) — Tschudi, Classif. Batrach. Nouv. Mém. Soc. Helv. II, p. 91 (1838).

Salamandra terrestris. Bonnaterre, Tab. Enc. méth. Rep., p. 62, vol. IX (1790) — Schneider. Hist. Amphib., p. 54 (1799) — Latr. Hist. Salam., p. 29, 32 (1800) Daud. Hist. Rept. VIII, p. 221 (1803) — Dugès, Recherch. sur les Batrac. p. 155 (1835) — Catullo, Geogn. Venet., p. 174 (1844) — Rusconi, Hist. Nat. Salamand. (opera postuma) (1854).

Salamandra vulgaris, Cloquet, Dict. scienc. nat., vol. 47, p. 50 (1827).

Salamandra corsica, Savi, Descrizione di nuovi mamm. e rett. Nuovo Giornale dei Letterati, vol. XXXVII, N. 102, p. 208 (1838) — Bonaparte, Iconogr. Fauna Ital. Anfibi (1839) — Dugès, Recherch. zool. Urodel. Ann. Scienc. nat. 3ª ser., vol. XVII, p. 258 (1852) — Duméril et Bibron. Erpet. génér. vol. IX, p. 61, Atlan. tav. 103, f. 2 (1854) — De Betta, Monog. Anf. urod. Ital. Mem. Istit. venet., vol. XI, p. 520 (1864) — Fauna Ital. Rettili ed Anfibi, p. 80 (1874) — Giglioli, Corsican Herpetology, Nature, Dicembre 5 (1878) — Beiträge z. Kenntniss d. Wirbel. Italiens. Archiv. f. Naturg. (1879) — Elenco Mamm. Ucc. Rett. Ittiof. Anfibi e Pesci Italiani, p. 16 (1880).

Salamandra maculosa var. corsica. Strauch. Revision der Salamandriden Gattung., Mém. Acad. Impér. des sc. de S. Pétersb. VII ser., vol. XIV, p. 30 (1870) — Schreiber. Herpt. Europ. *var. l*, p. 75 (1875) — Bedriaga, Ueber. d. geogr. Verbreit. d. europäi. Lurche. Bull. Soc. Impér. nat. Moscou, p. 339 (1879) — Beiträge z. Kenntniss d. Amphibien u. Rept. de Fauna v. Corsika. Archiv. f. naturg. (1883), p. 245.

a) Un esemplare di Liguria.

b) Quattro esemplari Valle di Non, Trentino del signor Dott. Riccardo Canestrini, 1882.

c) Quattro esemplari. Monte Fenera (Valsesia) metri 1000 sul livello del mare dal signor Gallesi, 1882.
d) 1. Rovereto dal Professor Cobelli, 1882.
e) 2. Lugano dall'Ingegnere Lubini, 1882.
f) 7. Esemplari. Domodossola. Dal signor Capitano G. Bazzetta, 1882.
g) 2. Esemplari. R. Mandria (presso Torino). Dal signor B. Comba.
h) 8. Esemplari. Collina di Torino.
i) 2. Esemplari. Valperga.
j) 1. Esemplare. Rivoli, dal Dott. G. Piolti, 1882.
k) 1. Esemplare. Pistoia, dal Prof. H. Giglioli, 1878.
l) 14. Esemplari adulti e giovani di Bastelica (Corsica) avuti in comunicazione dal signor I. Bedriaga, 1883.
m) 1. Monte Soglio presso Rivara Canavese, ottobre 1883, L. Camerano.

Capo relativamente grande, depresso e subconico anteriormente; corpo grosso, quasi cilindrico e un po' piano inferiormente; coda mediocremente lunga subtetragona e un po' compressa verso l'apice il quale è appuntito; le estremità sono tozze; le dita sono quattro nelle estremità anteriori e cinque nelle posteriori, più o meno depresse e libere; dietro al capo due parotidi ben sviluppate; lingua grande di forma elittica, arrotondata posteriormente, libera ai lati e un po' anche allo indietro; denti del palato disposti in due serie longitudinali assai variabili per lo sviluppo delle varie curve, le due serie divergono fortemente nella parte posteriore. Parti superiori di color nero cupo e lucente con macchie gialle di vario disegno e di vario sviluppo. Parti inferiori di color nero intenso un po' meno delle parti superiori ora senza macchie ora con qualche macchia gialla.

Dimensioni medie: Lunghezza totale ♂ m. 0,150, ♀ m. 0,170 (1).

Il capo è proporzionatamente grande e ben sviluppato, la sua lunghezza (2) ora è uguale alla sua larghezza massima, ora è alquanto inferiore a questa. In qualche esemplare la larghezza supera la lunghezza di tre, quattro, ed anche di cinque millimetri. Nei giovani i due diametri sono per lo più eguali, sia negli individui di Corsica, sia negli individui continentali.

Superiormente il capo è piano fra gli occhi e conico nella parte anteriore in modo che le guancie si continuano senza formare spigolo visibile coll'alto del capo. Lo spazio che separa superiormente gli occhi è lungo quasi il doppio sia negli adulti sia nei giovani del continente e di Corsica di quello che è fra l'angolo anteriore degli occhi e le narici. Le narici sono piccole e la distanza fra di loro è uguale a quella che separa superiormente gli occhi.

Il muso è anteriormente appuntito e più o meno aguzzo secondo gli individui; nei giovani è un po' più rotondo; la mandibola superiore sporge anteriormente di due millimetri circa sulla inferiore. Ciò si verifica negli individui di Corsica e in quelli del continente.

---

(1) Ib. Fatio, *Faune des Vert. d. l. Suisse*, III, p. 491, da m. 0,180 come dimensione media. Gli esemplari italiani sono in complesso un po' poco piccoli.
(2) Misurata dall'apice del muso all'occipite.

I denti del palato sono disposti in due serie longitudinali incurvate variamente nei vari individui. La disposizione di queste serie palatine è oltre a ogni dire variabile nella *Salamandra maculosa*. Schematicamente le due serie sono foggiate allo ingrosso come due S posti l'uno di faccia all'altro. In alcuni individui la figura dell'S è ben evidente e regolare e quindi lo spazio che le due serie delimitano fra loro è spatuliforme; ma nella massima parte de' casi la cosa non è così. Dividiamo per comodità dello studio queste serie longitudinali in tre porzioni: una anteriore (fig. 1 *a*), una mediana (fig. 1 *b*), ed una posteriore (fig. 1 *c*). Ora la parte anteriore è poco distintamente separata dalla mediana come nelle fig. 1, 3, 17, 15, 13, 12, ecc. Ora invece la separazione è spiccata poichè le serie dentali nella parte mediana hanno un decorso rettilineo e parallelo come ad esempio nelle fig. 9-14, 19-20, ecc. Nella parte anteriore ora le serie dentali convergono l'una verso l'altra come nelle fig. 1, 2, 3, 4, ecc., ora invece tendono a farsi parallele come nelle fig. 18, 19, 20. Nella parte mediana le serie possono essere più o meno vicine e il tratto parallelo può essere più o meno lungo come ad esempio nelle fig. 9, 19, 20, 14, ecc. Nella parte posteriore finalmente le serie dentali ora divergono facendo una curva dolce, come nelle fig. 1, 3, 10, 17 ed ora facendo un angolo brusco e procedendo poi in direzione rettilinea come nelle fig. 9, 19, 20, 14, ecc.

Frequentissimamente, come mostrano le figure sopra citate, le due serie dentali sono alquanto assimetriche.

Non si può stabilire nulla di fisso rispetto alla variazione di forma delle serie dei denti palatini. Queste parti variano nei vari individui.

Io ho insistito sopra questi denti poichè, come è noto, il carattere principale portato dagli Autori per caratterizzare la *Salamandra corsica* Savi, è appunto quello della diversa disposizione dei denti palatini. Secondo il Savi, i denti palatini nella *Salamandra maculosa* e nella *Salamandra corsica* sarebbero disposti così:

Salamandra Maculosa.	Salamandra Corsica.
« *Denti palatini* disposti in due serie: curvate in modo da intercettare uno spazio spatoliforme corto e largo, il manico del quale è rivolto verso le fauci; ciascuna serie alla sua estremità posteriore diverge verso l'articolazione della corrispondente mascella, non con un angolo ma con dolce curva: le estremità anteriori non si toccano ».	« *Denti palatini* disposti in due serie: approssimate e parallele per due terzi della loro lunghezza; presso l'angolo anteriore della fossa orbitale bruscamente divergono, e poi ripiegansi in modo, che tornando ad accostarsi intercettano uno spazio circolare; indi giunte di nuovo sulla linea mediana si riuniscono, e per piccolo spazio scorrono nuovamente parallele. L'estremità posteriore di ciascuna di queste serie è per un piccolo tratto divergente ad angolo, verso la rispettiva articolazione delle mascelle ».

Ora è facile convincersi che queste due descrizioni si applicano esattamente ai vari individui di *Salamandra maculosa* continentale, dando una occhiata alla serie dei disegni sopracitati, e come anche siano abbastanza frequenti soprattutto nel contorno di Torino, di Domodossola, di Rovereto, ecc., individui coi denti palatini disposti nella

maniera indicata dal Savi per la *Salamandra Corsica.* Le due descrizioni sopra riferite dal Savi per le due specie di Salamandra riguardano due estremi di modificazione delle serie dentali i quali si trovano promiscuamente negli individui di *Salamandra maculosa* delle varie località italiane (1).

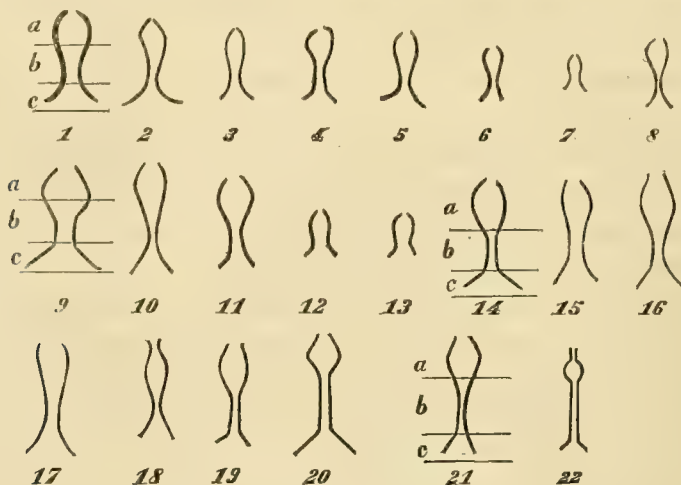



Fig. 7.

Disposizione dei denti palatini della *Salamandra maculosa* (2).

1. Sponde del Varo. — 2. Liguria. — 3. Pistoia. — 4, 5, 6, 7, Valle di Non (Trentino). 8. — Lugano. — 9. Rovereto. — 10, 11, 12 Monte Fenera. — 13. Rivoli. — 14, 15, 16, 17, 18 Contorni di Torino. — 19, 20. Domodossola. — 21 Corsica. — 22. Corsica, esemplare tipico del Savi.

La bocca è grande, lo squarcio oltrepassa notevolmente l'angolo posteriore dell'occhio; nei giovani lo squarcio è un po' più corto.

L'occhio è mediocremente grande e mediocremente sporgente; nei giovani il suo diametro massimo è generalmente eguale alla distanza che è fra l'angolo anteriore dell'occhio e l'apice del muso; negli adulti è poco più inferiore a quest'ultima talvolta di quasi un terzo.

La lunghezza del capo è contenuta quattro volte circa in quella del tronco; nei giovani vi è contenuta soltanto tre volte o tre volte e mezzo. Ciò si osserva sia negli individui di Corsica, sia negli individui continentali.

Il tronco è robusto e di un diametro trasversale poco diverso da quello trasversale massimo del capo; nelle femmine il tronco è più largo, del resto le dimensioni del tronco per quanto riguarda la larghezza dipendono naturalmente dal punto

---

(1) A proposito della disposizione delle serie dentali palatine in questa specie debbo avvertire che le figure schematiche date dal DE BETTA: soprattutto quelle date nella *Fauna ital. Rettili ed Anfibi*, debbono essere alquanto modificate come si può vedere dalle figure sopracitate unite a questo lavoro le quali rappresentano non schematicamente le parti in questione e come si rileva dalla figura dei denti della *S. corsica* data dal BONAPARTE che io riferisco qui esattamente e dalla figura dell'esemplare tipico, fig. 7 e 22). La figura data dal DUMÉRIL nell'*Erpetol. generale*, Atlante, tav. 103, fig. 2, è singolarmente inesatta, il disegnatore ha segnato lateralmente alle serie palatine longitudinali due altre serie di denti che non esistono: non si arriva a comprendere come sia accaduto questo strano errore.

(2) Credo utile di richiamare l'attenzione del lettore sulla disposizione frequentemente assimetrica delle due serie dentali.

al quale si trova lo sviluppo delle uova e degli embrioni. Il tronco è piano inferiormente e convesso superiormente; talvolta si osserva una linea vertebrale sporgente; sui fianchi si osservano numerosi solchi che simulano gli spazi intercostali. Nei giovani questi solchi sono evidentissimi e si estendono anche sulla coda.

Le estremità anteriori sono tozze e proporzionatamente ben sviluppate, ripiegate lungo i fianchi ne oltrepassano alquanto la metà; nei maschi il tronco essendo un po' più corto che nelle femmine le estremità superiori giungono più in basso.

Le dita sono quattro e più o meno appiattite secondo gli individui; esse sono arrotondate all'apice dove si nota un ispessimento cutaneo. Io non ho osservato in nessun individuo nè del continente, nè di Corsica, nè giovane, nè adulto traccia alcuna di vera membrana interdigitale. Negli individui conservati in spirito la pelle delle dita essendo piuttosto ampia si contrae e forma delle ripiegature lungo i margini laterali delle dita stesse tanto che a primo aspetto si direbbero lobati; ma in realtà non lo sono come si può scorgere negli individui freschi.

Negli individui metamorfizzati da poco od in quelli che sono vicini alla metamorfosi le dita sono cilindriche, invece negli individui molto vecchi l' appiattimento delle dita è veramente notevole.

Le dita sono quattro, il primo è il più corto, il terzo è il più lungo, il secondo è un po' più corto del terzo e il quarto è più corto del secondo, ma più lungo del primo. Ciò si osserva in tutti gli esemplari sia del continente sia della Corsica, sia giovani sia adulti. La faccia palmare è rugosa ed ha un tubercolo mediocre alla base del 4° dito; le dita sono inferiormente un po' rigonfie all' apice. Lo sviluppo del tubercolo palmare è assai variabile e talvolta negli adulti di grande mole riesce poco discernibile.

Le zampe posteriori sono poco più lunghe delle anteriori, ma sono proporzionatamente più grosse, ripiegate lungo i fianchi ne oltrepassano notevolmente la metà nei maschi; le dita sono come nelle zampe anteriori per ciò che riguarda la forma generale salvo che sono più grosse ed anche più appiattite, io le ho osservate sempre intieramente libere. Le dita sono cinque: il primo è molto corto, il quinto è un po' più lungo del primo, poi viene il secondo, poi il terzo ed il quarto che sono a un dipresso eguali. Non ho osservato differenze notevoli a questo proposito fra gli individui di Corsica e quelli del continente. La faccia plantare è rugosa ed ha un tubercolo più piccolo di quello della faccia palmare e di sviluppo molto variabile, non raramente esso manca, alla base del quinto dito.

La coda è, proporzione fatta col resto dell' animale, non molto grossa; essa è subconica e più o meno quadrangolare verso la base, verso l'apice si comprime lateralmente e termina in punta. Nei giovani la coda è più compressa e più acuminata che negli adulti. Essa presenta soprattutto nei giovani dei solchi ai lati che le danno un aspetto segmentato. Inferiormente presenta o per la sua lunghezza o circa fino a metà una solcatura longitudinale assai spiccata. Qualche volta questo solco manca quasi al tutto.

La lunghezza della coda è alquanto variabile; nella massima parte dei casi, sia negli esemplari del continente, sia in quelli di Corsica la coda è lunga quanto il corpo, meno il capo. Nei maschi è generalmente un po' più lunga.

La pelle è spessa e più o meno liscia con numerose rughe e bitorzoli. Vi sono due parotodi dietro gli occhi le quali hanno forma e dimensioni variabili; esse sono nella massima parte dei casi più lunghe che larghe; la lunghezza essendo per lo più eguale a due volte la larghezza, e ciò sia negli esemplari di Corsica sia in quelli del continente, sia nei giovani, sia negli adulti; molto variabile è il numero dei pori. Lungo i fianchi vi sono due serie di tubercoli ghiandolari ricoperti di pori. Altri pori in numero vario e ben evidenti si trovano lungo la linea vertebrale fino all'apice della coda ed anche nelle estremità le quali presentano spesso dei rigonfiamenti ghiandolari più o meno evidenti.

Inferiormente la pelle è liscia, con numerose rughe trasversali sul ventre e con rughe disposte a reticolo sulla gola; la ripiegatura golare è ben spiccata.

La colorazione della *Salamandra maculosa* è caratteristica: la tinta fondamentale è di color nero inchiostro lucente; le macchie sono di color giallo vivacissimo. Lo sviluppo, la disposizione e il disegno delle macchie gialle è oltre ad ogni dire variabile.

Le macchie gialle che io ho osservato essere costanti sono quelle che stanno sopra gli occhi e quelle che sono sulle parotidi; talvolta queste macchie si riuniscono insieme costituendo così due striscie gialle longitudinali sul capo; in qualche caso vi sono due altre macchie gialle sulle narici che si uniscono anche alle prime.

Costante ho pure trovato una macchia gialla, per lo più isolata, all'angolo posteriore dello squarcio boccale.

Sulle estremità verso la loro base si nota una macchia gialla assai costante ma di sviluppo variabile; questa macchia è molto evidente nei giovani e anche in quelli ancora branchiati.

Sul dorso e sulla coda le macchie gialle sono variabilissime e ciò che è notevole esse sono spesso oltre a ogni dire assimetricamente disposte secondo la linea mediana. Molto irregolare è pure la macchiettatura della coda, e dei fianchi e delle estremità.

Le parti inferiori che sono pure di color nero uniforme, presentano abbastanza costantemente varie macchie gialle sotto la gola e soprattutto lungo il contorno della mandibola inferiore, anzi queste macchie unendosi formano talvolta una grossa macchia semilunata nella parte anteriore della gola. Nelle altre parti vi sono spesso delle macchie gialle di forma e di sviluppo molto variabile. Talvolta, e ciò si verifica soprattutto nei giovani, le parti inferiori sono al tutto prive di macchie.

Le macchie gialle del dorso ora si presentano isolate e più o meno rotondeggianti; ora invece si riuniscono fra loro formando delle striscie trasversali o delle striscie longitudinali più o meno sviluppate; ma, quasi sempre, ripeto, esse sono disposte assimetricamente.

Talvolta le macchie gialle pigliano molto sviluppo e allora l'animale appare di color giallo macchiettato di nero; tal'altra invece le macchie gialle sono piccole e poca numerose.

Questa ultima maniera di colorazione è frequente negli esemplari delle Alpi.

Non ho trovato argomenti per stabilire alcune *varietà* di colorazione un po' costanti e localizzate, tanto da meritare un nome speciale.

Per comodità si possono riassumere nel modo seguente le variazioni di colore più notevoli:

a) Macchie gialle assai piccole e poco numerose: parti inferiori quasi immaculate:

b) Macchie gialle isolate e rotondeggianti e numerose;

c) Macchie gialle degli occhi, delle parotidi e delle narici riunite in due striscie longitudinali;

d) Macchie gialle del dorso riunite fra loro in modo da formare delle striscie trasversali sul dorso;

e) Macchie gialle del dorso poco numerose e molto allungate in direzione longitudinale;

f) Macchie gialle numerosissime sul dorso, sui fianchi e sulla coda e più o meno confluenti fra loro;

g) Macchie gialle molto sviluppate e ricoprenti per larghi tratti l'animale.

Non ho osservato differenze sessuali di colore.

Nei giovani le macchie gialle sono spesso meno sviluppate.

Gli individui branchiati vicini alla metamorfosi e quelli metamorfizzati da poco sono di colore bruno-giallastro macchiettati di nero: talvolta, soprattutto nelle Alpi, il color nero delle parti superiori è intenso: le estremità presentano sempre alla loro base una macchia gialla: le parti inferiori sono di color carnicino chiaro senza macchie (1).

Il Savi, come è noto, descrisse col nome di *Salamandra corsica* gli esemplari da lui esaminati di Sardegna fermandosi sopra i principali caratteri seguenti:

1° Testa assai più larga che lunga misurando la sua larghezza all'articolazione delle mascelle, e la lunghezza del forame occipitale all'apice del muso;

2° Denti della mascella superiore e inferiore piccolissimi;

3° Denti palatini disposti in due serie approssimate e parallele per due terzi della loro lunghezza; presso l'angolo anteriore della fossa orbitale bruscamente divergono, e poi spiegansi in modo, che tornando ad accostarsi intercettano uno spazio circolare; indi giunti di nuovo sulla linea mediana si riuniscono e per piccolo spazio scorrono di nuovo paralleli. L'estremità posteriore di ciascuna di queste serie è per un piccolo tratto divergente ad angolo, verso la rispettiva articolazione delle mascelle;

4° Lingua circolare, mediocremente larga, libera sui lati e posteriormente;

5° Glandole postorbitali poco più lunghe che larghe, munite di uno scarso numero di pori;

6° Pori dorsali radi, poco distinti;

7° Estremità anteriori con quattro dita, subcompresse, subpalmate, senza unghie;

---

(1) È da notarsi la rassomiglianza che vi è fra la colorazione degli individui appena metamorfizzati della *Salamandra maculosa* ed i giovani dello *Spelerpes fuscus*, i quali pure hanno costantissime le macchie sopra menzionate delle estremità.

8° Estremità posteriori con cinque dita subcompresse, subpalmate. Dito esterno rudimentario, secondo e medio subeguali, quarto assai più lungo del primo o interno, quinto o interno quasi rudimentario e più corto dell'esterno;

9° Coda conica subcompressa più corta della metà di tutto l'animale.

Di questi caratteri quelli segnati ai numeri 2, 4, 6, 7, 8 e 9 hanno piccolissima importanza e si trovano tutti nei varii individui della *Salamandra maculosa* di qualunque località. Ho già detto nella descrizione come deve essere interpretato il carattere della subpalmatura dato dal Savi.

Il carattere delle glandole parotidee è al tutto individuale. Rimangono i caratteri dei denti palatini e quelli della forma del capo. Ho già parlato a lungo intorno ai caratteri dei denti e ho dimostrato come l'importanza del carattere sia solamente apparente.

Viene ultimo il carattere della forma generale del capo, il quale, sarebbe più larga proporzionatamente che lunga. Negli esemplari di Corsica da me osservati ho trovato realmente il capo un po' più grosso e col muso più arrotondato e questo sarebbe forse il solo carattere distintivo meno variabile; ma è d'uopo osservare: 1° che gli esemplari di Corsica da me osservati erano molto grossi: mentre io non ho avuto occasione di esaminare esemplari del continente di dimensioni analoghe; 2° che i giovani di Corsica sono perfettamente eguali nella forma del capo a quelli del continente; 3° finalmente che il carattere della acutezza del muso è molto variabile negli Anfibi.

Io credo, riassumendo le cose sopraddette, che non solo la *Salamandra corsica* non si possa considerare come specie; ma che essa non debba essere considerata nemmeno come *sottospecie*, poichè non è punto localizzata e soprattutto poichè non offre una facies o un complesso di caratteri, coi quali si possa definire.

L'individuo descritto dal Savi e dal Bonaparte col nome di *Salamandra corsica* presenta un caso di *variazione* individuale.

Io aveva già presentato alla R. Accademia questo lavoro, quando ricevetti per la cortesia del Prof. Ricchiardi comunicazione dell'esemplare tipico del Savi, che si conserva nel R. Museo zoologico di Pisa. L'esame di questo esemplare ha confermate le conclusioni sopra enunciate.

Ho figurato di questo esemplare il capo e le zampe anteriori e posteriori, tav. I, fig. 28, 29, 30.

Questo esemplare considerato isolatamente presenta veramente un complesso di caratteri tali da giustificare la formazione di una specie come fece il Savi; ma, se lo si confronta con molti esemplari del continente e soprattutto con altri esemplari della Corsica stessa, si vede che i caratteri differenziali svaniscono a poco a poco e soprattutto non appaiono come caratteri localizzati agli esemplari di Corsica e non concedono di stabilire nè una specie, nè una sottospecie. Negli esemplari di tutte le località si possono trovare irregolarmente i caratteri che presenta l'esemplare in discorso. Il carattere più spiccato che presenta l'esemplare del Savi è veramente quello della disposizione dei denti palatini (fig. 7, n. 22). Ma confrontando la disposizione di questi denti con quella variabilissima degli esemplari delle altre località si vede come non si tratti che di una modificazione già rappresentata in un grado un poco minore in esemplari di varie località.

Dimensioni.

	Sponde del Varo	Liguria	DOMODOSSOLA						VALPERGA		TORINO		TRENTINO		Domodossola	Trentino	VAL-SESIA Individui branchiati vicini alla metamorfosi	COR-SICA Individui branchiati vicini alla metamorfosi	CORSICA		COR-SICA Esemplare tipico del SAVI
	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♂	♂	♀	♀	♂	♂	juv.	juv.					
Lunghezza totale	0,151	0,153	0,161	0,174	0,162	0,155	0,134	0,118	0,129	0,137	0,149	0,162	0,165	0,129	0,090	0,082	0,050	0,027	0,220	0,051	0,174
» del capo . . .	0,020	0,020	0,018	0,020	0,020	0,017	0,017	0,017	0,014	0,016	0,016	0,017	0,019	0,014	0,012	0,012	0,009	0,009	0,027	0,008	0,021
Larghezza » . . .	0,020	0,020	0,019	0,019	0,020	0,019	0,018	0,019	0,014	0,017	0,019	0,019	0,019	0,015	0,012	0,011	0,008	0,007	0,025	0,008	0,021
Lunghezza del tronco . . .	0,064	0,062	0,061	0,069	0,072	0,063	0,057	0,050	0,055	0,061	0,061	0,073	0,073	0,052	0,038	0,035	0,021	0,018	0,090	0,021	0,075
» della coda . . .	0,067	0,071	0,082	0,085	0,070	0,075	0,060	0,051	0,060	0,060	0,072	0,072	0,072	0,063	0,040	0,035	0,020	0,020	0,100	0,022	0,078
» delle estremità anteriori. . . .	0,030	0,027	0,027	0,034	0,025	0,027	0,024	0,021	0,022	0,026	0,028	0,028	0,026	0,022	0,015	0,014	0,010	0,008	0,040	0,010	0,032
» delle estremità posteriori . . .	0,033	0,030	0,033	0,037	0,030	0,030	0,027	0,022	0,025	0,029	0,030	0,031	0,028	0,025	0,016	0,016	0,011	0,009	0,042	0,010	0,035
» delle parotidi . .	0,013	0,013	0,011	0,010	0,011	0,013	0,008	0,009	0,008	0,010	0,011	0,011	0,010	0,010	0,008	0,007	»	»	0,016	0,004	0,010
Larghezza » » . .	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,007	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,005	0,006	0,004	0,003	»	»	0,008	0,002	0,007

La *Salamandra maculosa* è uno degli urodeli più sparsi in Europa ed in Italia.

In Italia è frequente in tutta la parte continentale e peninsulare, dove si innalza a 1000 o al più a 1500 metri sul livello del mare.

Questa specie pare esista anche in Sicilia al dire del Doderlein (1), del Mina Palumbo (2) e del Sava (3).

Io non ho tuttavia potuto esaminare esemplari provenienti da questa località. Anche il Giglioli si trovò nello stesso caso, poichè egli dice (4) la *Salamandra maculosa* « sparsa in tutta Italia nei luoghi montuosi, sembra mancare affatto nelle nostre isole, meno forse la Sicilia ».

Non al tutto sicura è l'esistenza della *Salamandra maculosa* in Sardegna: il Genè, il Bonaparte, il De Betta, lo Schreiber, il Giglioli, ecc., o negano l'esistenza di questa specie in Sardegna o la affermano dubitativamente.

Il Mina, Palumbo e il Doderlein nelle opere citate considerano la *Salamandra maculosa* rappresentata in Sardegna dalla *Salamandra corsica del Savi.*

Nè io stesso, nè alcun altri che io sappia ha mai potuto osservare esemplari di *S. maculosa* della Sardegna. Nel catalogo dei Batraci urodeli del Museo Britannico del Boulenger (Londra, 1882, p. 4), è segnato un individuo *h ♂ Sardinia Prof. Bonelli* [ρ]. Io credo che questo Sardinia vuol forse indicare *Regno di Sardegna* come allora indicavansi spesso il Piemonte e gli Stati Sardi e non propriamente l'isola di Sardegna.

Il Bedriaga poi dice esplicitamente (5): « Die Angaben Fatio's (Faune des Vertébrés de la Suisse, vol. III, p. 491) und De Betta's dass auf Sardinien *Salamandra maculosa* durch die *S. corsica Savi* vertreten wird, bezweifle ich, seitdem ich darüber Erkundigungen eingezogen und erfahren habe, dass Salamander überhaupt auf dieser Insel nicht vorkommen. Das nämliche hat bereits Schreiber hervorgehoben ».

In Corsica la *Salamandra maculosa*, è, a quanto pare, assai abbondante e viene chiamata nel nord dell'isola *Cadelli lurchi* e nel sud *Cadelli montanilli* come ha fatto osservare il Bedriaga nell'opera citata.

Perciò che riguarda i costumi di questa specie possiamo dire che essa vive nei luoghi umidi ed ombrosi, fra le roccie, sotto i tronchi fracidi, nelle buche del terreno, nelle cantine, nei sotterranei ed ha prevalentemente vita notturna: suole uscire all'aperto nei giorni umidi ed anche piovosi, e dopo che è caduta abbondante pioggia. Essa si nutre di insetti, di vermi e di molluschi. Limax, Helix, ecc. Si deve considerare questo urodelo più come animale utile che come animale nocevole. La sostanza segreta della pelle è ricchissima di *Salamandrina.*

Molti autori si sono occupati della riproduzione e dello sviluppo di questa specie

(1) Alcune generalità intorno alla *Fauna sicula dei vertebrati.* Ann. dei Natural. di Modena, Anno VI, 1872. — *Rivista della Fauna sicula dei vertebrati — Nuove effemeridi Siciliane*, vol. XI, 1881. Non trovo menzionata la *S. maculosa* nelle due pubblicazioni del Boettger: *Liste von Reptilien und Batrachien gesamelt*, 1880-81 — *Auf Sicilien d. H. Susp. Carl. Hirsch. Bericht. Senckenberg. nat. Gesel.*, 1880, p. 134, e 1881, p. 256.

(2) *Prospetto degli studi di Erpetologia in Sicilia.* Palermo, 1863, p. 24.

(3) *Lucubrazioni della Flora e Fauna etnea*, 1884.

(4) *Elenco Mam. Ucc. e Rett. ittiofagi*, catal. Anf. e Pesc. italiani, Firenze, 1880, p. 16.

(5) *Berl. Z. Kenntniss d. Amph. n. Rept. von Corsika*, Archiv. f. natur, 1883, p. 253.

deve essere ricordato prima fra tutti il Rusconi (1). Ultimamente si sono occupati delle questioni relative all'accoppiamento od alla fecondazione in questa ed in altre specie di Anfibi urodeli principalmente il Bedriaga, il Lataste, il Boulenger e soprattutto il Gasco (2). Alle opere di questi autori mando il lettore desideroso di avere maggiori ragguagli in proposito limitandomi a citare qui le osservazioni fatte dal Boulenger in un caso di accoppiamento fra un maschio di *Salamandra atra* ed una femmina di *Salamandra maculosa*.

« 1879, 28 *Mars, soir.*

6 *h.* 55. — Je trouve mon mâle *S. atra* cramponné à une femelle de *S. maculosa*. Les bras du mâle sont passés au-dessus de ceux de la femelle. L'étreinte est tellement forte que je puis soulever les deux animaux sans qu'ils se séparent; je les manie quelque temps enfin de dessiner leur position.

La femelle se promène dans sa cage, entrainant avec elle le mâle, qui est au-dessous.

Le mâle applique étroitement le dessus de sa tête contre la gorge de la femelle; lorsque la femelle relève la tête, le mâle la suit dans ce mouvement.

De temps à autre il se frotte amoureusement contre elle, mais sans rapprocher son cloaque du sien.

7 *h.* 43. — Le mâle se remue beaucoup, semblant vouloir entraîner la femelle vers l'eau; je les y place, ils ne semblent pas s'y plaire.

8 *h.* — Les sexes se séparent. Il ne semblent plus chercher à s'unir; je les quitte.

8 *h.* 35. — Nouvelle visite. Nos deux époux sont toujours séparés, chacun à une extrémité de la cage.

9 *h.* — Nouvelle visite. Cette fois je les trouve accouplés et à terre: je ne les quitte plus.

11 *h.* — Ils sont toujours dans la même position, n'ayant pas fait un mouvement depuis 9 h.

11 *h.* 20. — La femelle fait quelques mouvements, puis se renverse sur le dos; le mâle l'abandonne alors et se retire au bord de l'eau.

Les deux individus ne semblant plus se rechercher je les quitte à minuit ».

La *Salamandra maculosa* è, come è noto, vivipara: le larve nascono aventi la forma di quelle dei tritoni con quattro zampe ben sviluppate e con tre grossi rami

---

(1) *Histoire naturelle, développement et métamorphose de la Salamandre terrestre*, opera postuma con 6 tavole. Pavia - Bizzoni, 1854.

(2) F. Lataste, *Accouplement chez les Batraciens urodèles. — Revue Intern. des Sciences*, I anno, vol. II, p. 496. — *Encore sur la fécondation des Batraciens urodèles*, ibidem, 4 anno, 15 febb. 1881:
G. Boscà, *Annales Soc. Esp. hist. nat.*, vol. IV, 1877 (sul Pleurodeles Waltlii).
I. Bedriaga, *Beiträge Z. Kenntniss des Rippenmolches.* Bull. Soc. nat. d. Moscou, 1879. — *Bertr. Z. Kent, d. Amph. Corsik*, Archiv. f. naturg, 1883.
F. Gasco, *Gli amori del Tritone alpestre.* Ann. Mus. civ. di Stor. nat. di Genova, 1880 — *Les Amours des Axolots*, Zool. Anzeig., n. 85, 86, 1881.
Si consulti anche, come fa opportunamente osservare il Gasco (op. cit.). Lo Spallanzani, *Dissertazioni di Fisica animale — Sulla generazione della Salamandra acquaiuola*, 1780.

branchiali. La loro lunghezza è variabile da 20, 22, 25, 27, 30 ed anche 34 millimetri secondo il Fatio. Il numero delle larve che la femmina emette annualmente è incerto, come pure è incerta la durata della deposizione delle larve. Secondo il Fatio (op. cit., p. 497) questo periodo può essere anche di venti giorni.

Il numero delle larve, secondo vari autori, sarebbe di 10-12, ed anche di 72. Il Fatio crede si possa stabilire una media di 35 a 40.

Due femmine da me osservate mi hanno dato l'una 42 larve e l'altra 24. La prima aveva una mole notevolmente maggiore della seconda. Il Capitano Giulio Bazzetta mi scrive da Domodossola di averne osservate 64 in una grossa femmina.

Io credo che indipendentemente dalle altre condizioni il numero delle larve che depone una femmina dipenda in gran parte dalla sua età e dalla sua mole.

Non molto sicure eziandio sono le epoche nelle quali ha luogo la deposizione delle larve. Alcuni ammettono solamente un accoppiamento autunnale e quindi la nascita delle larve nella primavera ventura: altri ammettono anche un accoppiamento primaverile e quindi la nascita delle larve nell'estate. È un fatto ad ogni modo che in autunno si trovano talvolta larve giovanissime di *Salamandra maculosa*, come se ne trovano anche nel principio della primavera.

Nel giorno 29 marzo di questo stesso anno (1884) trovai sulla collina di Torino, larve aventi le lunghezze principali seguenti: mill. 0,031, mill. 0,034, mill. 0,040.

Il Rusconi, nell'op. citata, pag. 10, dice: « 1° l'époque de l'accouplement des salamandres communes, du moins dans notre pays, est le mois de juillet; 2° que le temps de la gestation de ces reptiles est de huit mois environs » e a pagina 18 in una nota dice: « d'après le Prence de Canino, les Salamandres terrestres seraient très-fécondes, et leur fécondité, serait jusqu'à présent sans exemple parmi les reptiles qui habitent l'Europe, car il avance, dans sa *Fauna italica;* qu'elles mettent au jour des petits deux fois l'année: mes observations m'ont donnée des résultats bien différents ».

Le osservazioni posteriori hanno confermato le idee del Rusconi: non abbiamo dati fino ad ora per ammettere due accoppiamenti annuali. Le irregolarità di sviluppo delle larve, la presenza contemporanea di larve molto grandi e di altre molto piccole può spiegarsi coi fenomeni di prolungamento del periodo girinale: fenomeni che sono stati osservati oramai in quasi tutte le specie di Anfibi urodeli (1).

Secondo il Fatio la *Salamandra maculosa* deporrebbe in certe circostanze speciali le larve anche fuori dell'acqua, nella terra umida; in queste larve le branchie scomparirebbero rapidamente. Si avrebbe cioè in questo caso un raccorciamento del periodo girinale.

La *Salamandra maculosa* fra noi si ritira verso la fine di novembre e riappare generalmente in principio di marzo, e talvolta anche prima. Il Prof. Lessona (2) dice: « ho avuto informazione di una Salamandra giallo-nera, pochi anni or sono, veduta camminare sulla neve e mentre nevicava a Lanzo ».

---

(1) Si consulti a questo proposito L. Camerano, *Ricerche intorno alla vita branchiale degli Anfibi* Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino, 1883. — *Intorno alla neotenia ed allo sviluppo degli Anfibi.* Atti R. Acc. delle Scienze, vol. XIX, 1883.

(2) *Calendario zoologico.* Annali Acc. d'Agricoltura di Torino, vol. XVI, 1873.

Salamandra atra (Laur).

Salamandra atra. Laur. Syn. Rept. p. 42, 149, v. 1, f. 2 (1768). Bonn. Enc. méth. Erp. p. 65 (1790) — Schreid. Hist. Amph. (1799). — Latreille Hist. Rept. II. p. 218 (1802). — Daud. Hist. Rept. VIII p. 225 (1803). — Sturm Deut. Faun. III (1805). — Merr. Syst. Amph. p. 184 (1820). — Risso Hist. N. III, p. 94 (1826). — Fitzinger. Neu. Classif. Verz. Mus. Wien. p. 66 (1826). — Gravenh. Delic. Mus. Vratislav. p. 73 (1829) — Cuv. Règne animal. Ed. II, vol. II, p. 115 (1829). — Wagl. Syst. Amph. p. 208 (1830) — Bonaparte Fauna italica fig. (1837) — Tschudi Classif. Batrach. p. 91 (1838) — De Betta. Catal. Syst. Rept. Mus. p. 27 (1853) — Dum. et Bibron Erpet. général. vol. IX, p. 62, 419 (1854) — Jan. Rept. Mus. Mediolan. p. 54 (1857) — De Betta. Monogr. Anf. Urod. Ital. Mem. Ist. Venet. XI, p. 324 (1864) — Leydig. U. die Molche d. Würt Fauna Archiv. fr. naturg. p. 271 (1867) — Fatio. Faune des Vertèb. de la Suisse III. p. 498 (1872) — De Betta. Fauna ital. Rett. e Anfibi, p. 82. — Schreiber Herp. Europ. p. 72. — Giglioli Catal. Rett. Anf. Ital. p. 16 (1880) — Boulenger Cat. Batr. Graden. p. 4 (1882).

Salamandra fusca Laur. Synop. rept. p. 42, (1768).

Lacerta salamandra var. β Gmel. Nat. p. 1067 (1788).

Salamandra nigra —Gray Cat. Batr. Graden. Brit. Mus. p. 16 (1850) — Dugès. Urodèles de France. Annales des Scienc. nat. sér. III, vol. XVII, p. 260, tav. 1, fig. 8-9 (1852).

Salamandra alpestris Knauer Naturch. der Lurche. Wien. 1878, p. 118 (1).

a — 4 esemplari. Alpi del Piemonte.

b — 12 esemplari. Monviso dal Professore M. Lessona e dal signor Carlo Pollonera.

Capo non molto grande: piano superiormente, subconico anteriormente, corpo mediocremente grosso subcilindrico; coda mediocre ciclotetragona o subconica, estremità tozze e relativamente poco sviluppate: quattro dita anteriori e cinque posteriori subconici o depressi, liberi intieramente; dietro al capo, due parotidi ben sviluppate, lingua subtriangolare libera ai lati ed un po' anche posteriormente, denti palatini disposti in due serie longitudinali variabili per lo sviluppo delle loro curve; esse sono meno lunghe e meno fortemente divergenti allo indietro che nella *Salamandra maculosa.* Parte superiori ed inferiori di color nero intenso e lucente, senza macchie, pelle liscia: sui fianchi e lateralmente sulla coda, vi sono numerosi bitorzoli ghiandolari.

Dimensioni medie: Lunghezza del corpo ♂ m. 0,120, ♀ m. 0,130.

---

(1) Non si comprende il perchè il Knauer abbia sentito il bisogno di dare ad una specie così nota e così ben caratterizzata un nuovo nome, forse sarà stato per avere la soddisfazione di mettere un *mihi.* Egli del resto non dà ragione del suo operato. Non si può a meno di deplorare questa maniera e di fare che complica inutilmente una parte della scienza già per se stessa molto imbrogliata.

Il capo è tanto lungo come largo, e leggermente un po' più lungo che largo, il suo diametro trasversale è leggermente più grande di quello del tronco; superiormente è piano, anteriormente è arrotondato e subconico, le guancie sono poco inclinate e più distintamente separate dalla parte superiore del capo che nella *S. maculosa*: la distanza che è superiormente fra gli occhi supera di quasi del doppio quella che è fra l'angolo anteriore dell'occhio e le narici ed è eguale a quella che separa fra loro le narici.

Fig. 8.

Disposizione dei denti palatini della *Salamandra atra* (1).

Il muso è alquanto appuntito, la mascella superiore sporge di un millimetro circa sulla inferiore anteriormente.

La bocca è ampia e lo squarcio oltrepassa l'angolo posteriore dell'occhio di una distanza quasi eguale al diametro massimo di quest'ultimo.

L'occhio non è grande ed è sporgente il suo diametro massimo trasversale è eguale ad una volta e mezzo circa la distanza che separa l'angolo anteriore dell'occhio dalle narici.

I denti palatini hanno una disposizione generale analoga a quella che si trova nella *Salamandra maculosa.* Le serie palatine sono variamente incurvate e sono a questo riguardo molto variabili come si può vedere dai disegni uniti a questo lavoro. Si può notare tuttavia che nella *Salamandra maculosa,* le serie dentali palatine sono più sviluppate posteriormente e più fortemente ed anche più bruscamente divergenti.

È d'uopo pure ricordare come anche nella *Salamandra atra* si trovino disposizioni dei denti palatini che rassomigliano molto a quella che si osserva negli individui descritti col nome di *Salamandra corsica.*

Il tronco è meno grosso che nella *Salamandra maculosa* e un po' più assottigliato verso la parte posteriore, sui fianchi vi sono depressioni verticali che hanno l'aspetto di spazii intercostali.

Il tronco contiene tre volte circa la lunghezza del capo nei maschi, esso è un po' più corto che nelle femmine.

Le zampe anteriori sono relativamente poco sviluppate; ripiegate lungo i fianchi oltrepassano notevolmente la metà di questi. Le dita son quattro, il 1° è il più corto di tutti, il 4° è più lungo del 1°, il 2° è più lungo del 4° e il 3° è il più lungo di tutti. Le dita sono arrotondate e notevolmente ingrossate all'apice e nella parte inferiore.

Le dita sono intieramente libere: la faccia palmare non ha tubercoli. In qualche esemplare si osserva tuttavia un inspessimento tubercoliforme alla base del quarto dito.

(1) Credo utile di richiamare qui, come nella *Salamandra maculosa* l'attenzione del lettore sulla disposizione frequentemente assimetrica delle due serie dentali.

Le zampe posteriori sono poco più lunghe delle anteriori, ripiegate lungo i fianchi nei maschi, arrivano fino alla base delle dita delle estremità anteriori quando queste vengono pure ripiegate lungo i fianchi; nelle femmine arrivano invece soltanto a toccare o ad oltrepassare di poco l'apice delle dita. Ciò dipende dalla diversa lunghezza del tronco nei due sessi. Le dita sono cinque generalmente un po' più depresse che nelle zampe anteriori. Il 1° dito è molto corto e in qualche esemplare al tutto rudimentale: il 2° ed il 5° sono presso a che eguali; talvolta il 5° è un po' più corto del 2°. Il 3° ed il 4° sono eguali e sono i più lunghi. Esse sono libere e terminate come nelle zampe anteriori. Qualche volta si osserva uno ispessimento tubercoliforme alla base del 5° dito.

La coda non è molto sviluppata ed ora è subconica, ora ciclotetragona. Essa presenta delle solcature trasversali che la fanno sembrare segmentata. L'apice è più o meno appuntito, inferiormente si osserva spesso un solco longitudinale mediano che parte dall'apertura cloacale e si estende pei due terzi ed anche per tutta la coda. La lunghezza della coda è variabile ma generalmente in limiti ristretti, ora essa è lunga come il corpo senza il capo; ora è lunga come il corpo col capo o in rari casi, poco di più, nei maschi è spesso un po' più lunga.

La pelle è liscia e lucente, le parotidi sono ben sviluppate e in complesso poco variabili di figura e di dimensioni. Esse sono due volte più lunghe che larghe, i pori sono grossi e numerosi. Dietro all'occhio sulla mandibola superiore, all'angolo dei mascellari vi è un piccolo rigonfiamento ghiandolare separato da un solco profondo dalla parotide, esso porta vari pori grossissimi. Questo rigonfiamento l'ho trovato molto costante. Lungo i fianchi vi sono numerosi e spiccati rigonfiamenti ghiandolari che si continuano talvolta anche per un piccolo tratto sui lati della coda. Nella regione posteriore dei femori e delle tibie vi sono generalmente due rigonfiamenti ghiandolari, il loro sviluppo è tuttavia molto variabile.

Lungo la linea vertebrale si osservano generalmente, ma non sempre, superiormente dal capo all'apice della coda numerosi pori ghiandolari.

La ripiegatura golare è ben evidente. Le parti inferiori sono spesso granulose.

Il colore delle parti superiori è inferiori è nero lucente senza macchie; le parti inferiori sono spesso più chiare delle superiori, soprattutto sotto la gola dove talvolta si ha del bruno scuro.

L'animale conservato a lungo nell'alcool perde a poco a poco il colore nero quasi uniformemente.

La colorazione dei giovani è uguale a quella degli adulti.

Non vi sono notevoli differenze sessuali di colore.

Dimensioni.

	♀	♀	♀	♂	♀	juv.	♀	♂	♂
Lunghezza totale . . . . m.	0,129	0,143	0,135	0,143	0,138	0,092	0,130	0,109	0,091
» del capo . . . »	0,017	0,018	0,017	0,016	0,015	0,011	0,015	0,012	0,011
Larghezza » . . . »	0,017	0,018	0,016	0,017	0,014	0,011	0,015	0,012	0,011
Lunghezza del tronco . . . »	0,054	0,054	0,054	0,057	0,057	0,037	0,051	0,046	0,038
» della coda . . . »	0,058	0,071	0,064	0,070	0,066	0,044	0,064	0,051	0,042
» delle zampe anteriori »	0,025	0,024	0,023	0,024	0,020	0,017	0,020	0,020	0,016
» delle zampe posteriori »	0,026	0,027	0,025	0,024	0,022	0,019	0,021	0,022	0,017
» delle parotidi . . »	0,010	0,011	0,009	0,010	0,009	0,008	0,009	0,009	0,008
Larghezza delle parotidi . . »	0,005	0,005	0,004	0,004	0,004	0,003	0,004	0,004	0,004

La *Salamandra atra* è molto interessante per la maniera della sua riproduzione che venne studiata per la prima volta dallo Schreibers (Meisner naturg Anz. d. allg. schw. Ges. 1819 e Isis 1833), le osservazioni vennero in parte completate dal Fatio (Faune des Vertébrés Suisse, III, p. 505 e seg). In Italia non vennero fatte che io mi sappia osservazioni in proposito.

L'accoppiamento pare abbia luogo dalla metà di giugno alla metà di agosto, secondo le località e le circostanze, pare che l'accoppiamento si faccia in certe circostanze speciali anche nella terra. Lo sviluppo che è tutto interno dura circa undici mesi.

Come è noto, due sole sono le uova che si sviluppano e producono due feti che nascono uno dopo l'altro avendo già percorso nel seno materno gli stadi larvali, e misuranti da 42 a 54 millimetri. I piccoli nascendo sono sprovvisti di involucri. Questi piccoli sono al tutto simili agli adulti e secernono di già il liquido velenoso cutaneo come gli adulti.

La *Salamandra atra* è essenzialmente specie dell'Europa media, e soprattutto delle regioni montagnose. Essa vive a notevoli altezze sul livello del mare discendendo solamente al disotto dei 900 o 800 metri sul livello del mare, e salendo fin verso i 3000. Essa vive sotto i sassi delle praterie alpine, fra le radici degli alberi nelle screpolature delle roccie nelle piccole vallate ombrose e fosche, scavate dai ruscelli alpini. È facile trovarne poco prima e poco dopo la pioggia nei prati e sui sentieri delle Alpi.

In Italia questa specie è fino ad ora esclusivamente alpina: ma la sua distribuzione geografica anche nella catena stessa delle Alpi è molto incompiutamente conosciuta.

Le località nelle quali venne fino ad ora trovata con sicurezza questa specie sono, a quanto ho potuto riconoscere, le seguenti:

Varie località del Tirolo, della Stiria e del Friuli, Belluno, Bosco del Consiglio (Veneto), Valle di Scalve e monte Presolana a 1800 e a 2000 metri sul livello del mare (Presciano) (1). Valdieri, Monviso. In questa località è abbastanza frequente.

(1) De Betta, *Alcune note erpetologiche.* Atti R. Istitut. Venet., Ser. V, vol. IV, 1878.

Fino ad ora non venne incontrata questa specie nelle valli Ossolane, nella valle d'Aosta, nelle valli di Susa, ecc.

Specie erroneamente citate dagli autori come rinvenute in Italia e specie rinvenute in località considerate da vari autori, come appartenenti al territorio faunistico italiano.

Proteus anguinus Laur.

Questa specie vive nelle acque sotterranee delle Alpi della Carniola e in Dalmazia. Essa venne citata come esistente in Sicilia dal Davy, ma la cosa non venne mai confermata.

Triton blasii de l'Isle.

Triton marmoratus (Latr). Queste due forme vennero erroneamente citate da vari autori come abitanti l'Italia, confondendo con esse alcune varietà di colorazione del *Triton cristatus* s. sp. *karelinii*.

Triton palmatus (Schneid). Anche questa specie venne erroneamente citata come abitante l'Italia; essa venne confusa colla s. sp. *meridionalis* del *Triton vulgaris* (Linn.).

Il Bedriaga sul suo lavoro. Ueber die geographische verbreitung der europäischen lurche (1) indica per le varie località italiane le specie seguenti fondandosi sui lavori degli autori precedenti.

Penisola Appenninica.

1. *Triton taeniatus* — 2. *Triton cristatus* — 3. *Triton alpestris* — 4. *Salamandra maculosa* — 5. *Salamandrina perspicillata* — 6. *Spelerpes fuscus* — 7. *Salamandra atra* (2).

Sicilia.

1. *Salamandra maculosa* (3).

Sardegna.

1. *Spelerpes fuscus* — 2. *Euproctus Rusconii* — 3. *Salamandrina perspicillata* — 4. *Salamandra maculosa* (var. corsica) (4).

Corsica.

1. *Salamandra maculosa* var. corsica. — *Euproctus montanus*.

---

(1) *Soc. des Nat. de Moscou*, 1880.

(2) (3) Questi elenchi possono essere conservati tali e quali, salvo le osservazioni esposte sopra rispetto alle forme di *T. cristatus* e *T. taeniatus* (*T. vulgaris*) che si trovano in Italia.

(4) Da questo elenco bisogna togliere la *Salamandrina perspicillata*. Ho detto sopra le ragioni per le quali non credo si possa stabilire una var. *corsica* della *Salamandra maculosa*.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA I.

(Le figure, salvo indicazione in contrario sono di grandezza naturale).

FIG. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. — *Spelerpes fuscus*. Fig. 7, a *b* zampa posteriore, *a* vista inferiormente: *c* zampa anteriore.

» 9, 10, 10bis, 11, 12, 13, 14, 15, 16. — *Salamandrina perspicillata.* Fig. 13, *a* zampa ant., *b* zampa posteriore viste inferiormente.

» 17, 18, 19, 20, 21. — *Salamandra maculosa.* 17 di Torino. 18, 19, 20, 21 di Corsica.

» 22. Bocca e denti palatini della *Salamandra corsica* figurata (da Bonaparte, Iconografia della Fauna italica).

» 23, 24, 25. — *Salamandra atra.* Fig. 25, estremità posteriore vista inferiormente.

» 26, 27. — *Triton alpestris* in livrea d' amore dei contorni di Genova. 26 femmina e 27 maschio.

» 28, 29, 30. — *Salamandra maculosa* (*Salamandra corsica* Savi tipo del Savi), 29 zampa posteriore, 28 zampa anteriore.

TAVOLA II.

FIG. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. — *Triton cristatus* subsp. *karelinii.* Fig. 1 ♀ di Vercelli. Fig. 2 ♂ in amore di Novara 3, 4, ♀ di Ancona. 6, ♀ di Ancona, capo visto superiormente, 7 ♂ di Ancona, capo visto superiormente.

» 8, 9. — *Triton cristatus* ♀ subsp. *longipes*, del Gran Sasso d'Italia.

» 10. — *Triton cristatus* ♂ in amore, forma tipica. Svizzera.

» 11, 12, 13, 14. — *Triton vulgaris* subsp. *meridionalis* 11 ♂ in amore del Veneto. 12 ♂ in amore di Torino. 13 ♀ in amore di Ancona. 14 ♂ in amore di Ancona.

» 15. — *Triton vulgaris*, forma tipica, estremità caudale. Svizzera.

FIG. 16. — Estremità caudale del *Triton palmatus.* Svizzera.

» 17. — *Triton alpestris* ♂ Rovereto.

» 18. — Cranio di *Triton palmatus.*

» 19. — Cranio di *Triton cristatus.*

» 20, 21, 22. — *Euproctus montanus* di Corsica. 20 maschio. 21 giovane 22 cranio (da Bedriaga).

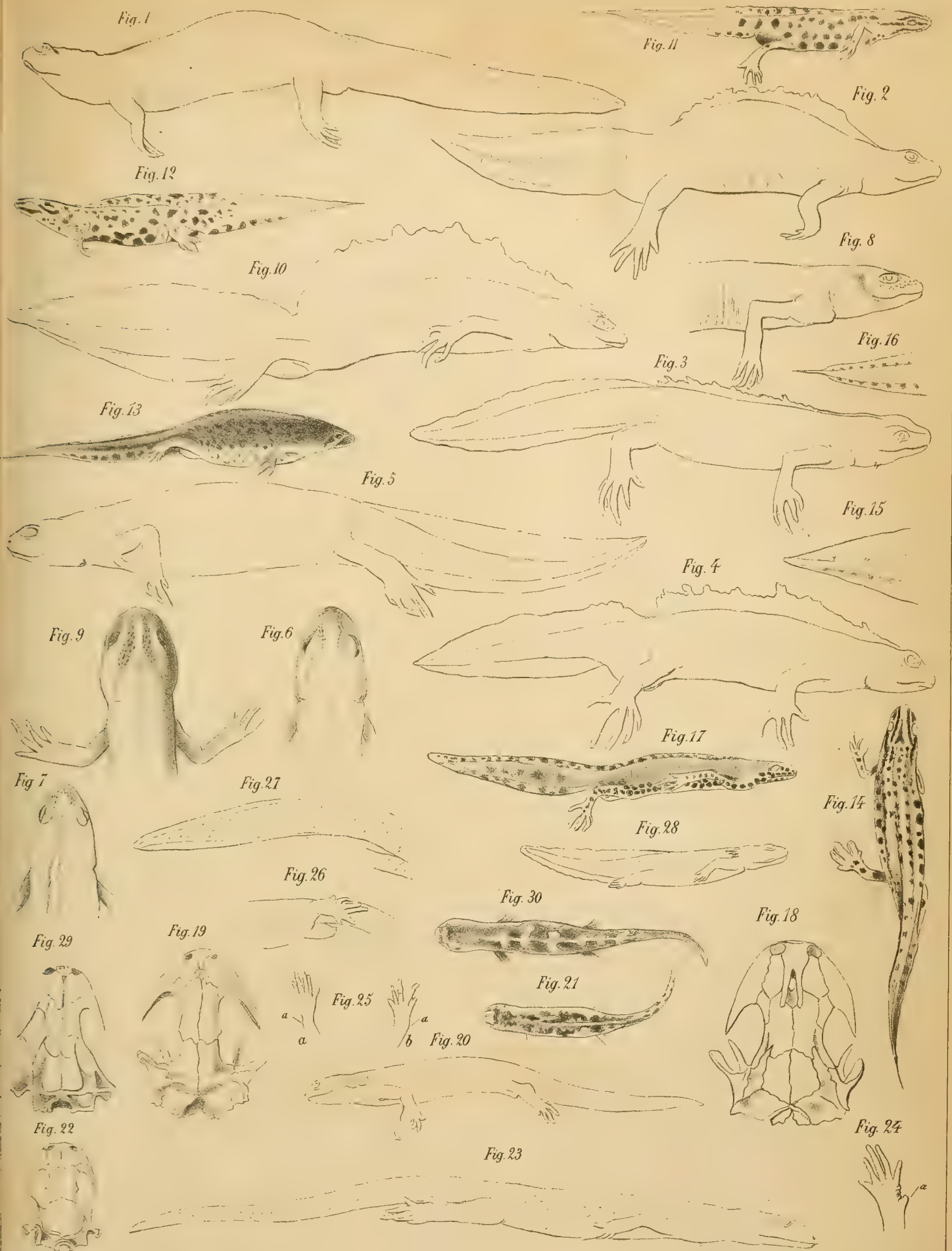
» 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30. — *Euproctus Rusconii*, Sardegna; 23 ♂, 24 zampa posteriore, *a* tubercolo fibulare; 30 giovane; 28 larva. Fig. 27 coda di un maschio; 26 rialzamento cloacale del ♂; 25 zampe anteriori (*a*) e posteriore (*b*) della ♀; *a* sporgenza fibulare. Fig. 29 cranio (da Bedriaga).

Tav. I

L. Camerano dis. da vero

Torino Lit. Salussolia

L. Camerano dis. dal vero.

Torino Lit. Salussolia

SULLE

PROPRIETÀ TERMOELETTRICHE

DELLE LEGHE

STUDIO SPERIMENTALE

DI

ANGELO BATTELLI

Approvata nell'adunanza del 15 Giugno 1884

Fu notato da valenti fisici, e dallo stesso Seebeck (*), scopritore della termoelettricità, che nelle leghe metalliche, per poco vengano alterate le proporzioni dei metalli componenti, si producono spesso grandi variazioni nel potere termoelettrico delle leghe stesse, e che anzi nella scala termoelettrica esse non prendono tutte un posto intermedio fra i metalli di cui sono formate.

Già varii fisici determinarono la forza elettromotrice di coppie formate da una lega e da un metallo e fra essi va notato specialmente E. Becquerel (**), che studiò un numero considerevole di leghe, accoppiandole con un filo di rame e paragonando la loro forza elettromotrice con quella di una coppia idroelettrica.

Il Rollmann (***), studiò l'influenza della composizione sulle proprietà termoelettriche delle leghe, sperimentando sopra ciascuna a due temperature notevolmente diverse; ma egli usò un metodo che permetteva poca precisione, e non tenne conto esatto del rapporto fra i pesi dei due metalli componenti.

I soli Professori Naccari e Bellati (****) hanno sinora esaminato come varii la forza elettromotrice di alcune di tale coppie, al variar della temperatura. Essi sperimentarono sopra leghe di antimonio e piombo, e di antimonio e stagno a cinque o sei temperature diverse; e descrissero quindi i relativi diagrammi, ma altre occupa-

---

(*) Seebeck, *Poggendorff's Annalen*, VII, 148 (1826).

(**) Becquerel, *Ann. de Chim. et Physique*, IV Serie, Tomo VIII.

(***) Rollmann, *Poggendorff's Annalen*, LXXXIII. 77 (1851); LXXXIV. 275 (1851); LXXXIX. 50 (1853).

(****) Naccari e Bellati. — Intorno all'influenza della temperatura e delle proporzioni dei metalli componenti sulle proprietà termoelettriche di alcune leghe. — L'*Elettricista*. 1877.

zioni li distolsero poi dall'estendere il loro studio ad altre serie di leghe, onde dedurne qualche legge generale.

Mi parve quindi utile intraprendere nuove ricerche su tale argomento, tanto più che dalle due tavole del Naccari e del Bellati già s'intravede qualche cosa di comune ad ambedue le serie di leghe, che, cioè, i loro diagrammi si accostano al diagramma di uno dei due metalli, anche quando nella composizione l'altro sia in eccedenza.

Ho fusi i singoli metalli e le leghe entro un crogiuolo di terra refrattaria, e li ho versati poi in una forma costituita da due grosse lastre di ferro, che, combaciando insieme, lasciavano in mezzo una cavità cilindrica della lunghezza di $20^{cm.}$, e del diametro di $5^{mm.}$, che erano le dimensioni, che dovevano avere le aste metalliche da adoperarsi.

Onde ottenere leghe ben omogenee, ho avuto sempre cura di agitarle ripetutamente nel crogiuolo con un bastone di vetro; e per di più, i cilindri ottenuti con una prima fusione, li spezzavo e li fondevo nuovamente. Siccome poi l'ossidazione ineguale dei due metalli, durante il riscaldamento, avrebbe alterate le proporzioni dei medesimi, ho mantenuto sempre alla bocca del crogiuolo una viva fiamma, gettando nel crogiuolo stesso dei pezzi di paraffina.

Alle estremità dei cilindretti così ottenuti saldai due fili di pakfong, che mantenni sempre gli stessi per tutte le leghe; e determinai la resistenza di ogni coppia in tal modo formata, quantunque tali resistenze siano quasi uguali fra di loro, attesa la grossezza dell'asta.

L'apparecchio da me adoperato, onde portare le due saldature a temperature diverse, differisce e da quello di Rollmann, e da quello di Naccari e Bellati: giacchè il primo, come già dissi, non consente una grande precisione; il secondo, quantunque opportuno pei metalli e per le leghe studiate con esso, non avrebbe forse dato buoni risultati per leghe molto più conduttrici del calore, quali erano alcune di quelle sulle quali ebbi a fare le mie esperienze. E, in vero, in tale caso ebbi ad osservare, che trovandosi immerse nell'aria le due saldature, passava da una estremità all'altra dell'asticella una considerevole quantità di calore; e il bulbo del termometro che stava a contatto della saldatura meno calda non ne assumeva la temperatura. Anzi ho anche tentato di tuffare una saldatura in un tubo di petrolio, il quale era immerso alla sua volta in un vaso di ghiaccio fondente, ma non fui soddisfatto nemmeno di questo artificio. Perciò ho ricorso al seguente apparato.

Ho preso un recipiente cilindrico pieno d'olio, nel quale era immerso un altro recipiente cilindrico pieno d'olio anch'esso; il secondo passava attraverso un'apertura circolare, praticata nel coperchio che chiudeva il primo, sporgendo al di sopra di $1^{cm.}$ circa. Per un altro foro, che era nel coperchio, un agitatore poteva scorrere nello spazio anulare interposto fra le pareti dei due recipienti, e un secondo agitatore scorreva pure nel recipiente interno. A distanza di circa $5^{cm.}$ era collocato un terzo recipiente pieno d'olio, munito di agitatore.

Le asticelle metalliche furono piegate ad U e immerse colle loro estremità nei due vasi; e affinchè avessero posizione fissa, si saldò con mastice un pezzo di sughero all'orlo del secondo recipiente, e in una scanalatura praticata nel sughero medesimo si adagiò l'asticella, e vi si fermò solidamente con ceralacca.

Fra i due recipienti stavano più schermi di latta e cartone. Il primo recipiente veniva riscaldato al di sotto con una lampada, e contemporaneamente si agitavano i liquidi in ambedue i vasi: così si poteva ritenere per certo che le due saldature prendessero rispettivamente la temperatura del bagno in cui erano immerse.

Tali temperature erano segnate da due termometri che scendevano nei due recipienti in modo che i loro bulbi combaciassero perfettamente con le saldature delle leghe.

I termometri erano divisi in gradi, ma per mezzo di una lente si potevano leggere i decimi di grado. A metà della colonna termometrica che sporgeva dal bagno più caldo, si teneva sempre un piccolo termometro, che ne segnasse la temperatura, onde fare le correzioni dovute. Di ogni termometro poi si erano con esattezza determinati i punti fondamentali, e di tratto in tratto nel corso delle esperienze si ripetè questa operazione.

Dei due fili di pakfong, uno andava a pescare in un bicchierino di mercurio, l'altro veniva congiunto a un torchietto di un galvanometro a riflessione. All'altro torchietto del galvanometro stesso era congiunto un filo di rame, che metteva a un reocordo, dal quale partiva un altro filo di rame, che poteva essere immerso nel bicchierino di mercurio.

Così veniva a formarsi un circuito, che si poteva chiudere o aprire a piacimento, immergendo o togliendo dal bicchierino il filo di rame.

Fu determinata la resistenza dei due rocchetti del galvanometro a riflessione adoperando diversi metodi, e prendendo poi la media dei risultati; nè fu trascurata la resistenza dei fili di congiunzione.

Il reocordo venne campionato con tutta diligenza per mezzo di un'unità e di un reostato Siemens.

Quando i due termometri segnavano temperature costanti e opportune, si procedeva alla determinazione della forza elettromotrice della coppia formata dalla lega metallica e dal pakfong. È chiaro che rappresentando con R_1 la resistenza della coppia, con R_2 quella del galvanometro, e con R_3 la resistenza esterna (inserita per mezzo del reocordo), la forza elettromotrice sarà data da

$$E=I(R_1+R_2+R_3)$$

dove I è l'intensità della corrente.

Per conoscer il valore della corrente che produceva nel galvanometro una data deviazione, s'inserì nel circuito una coppia Daniell accuratamente preparata, e variando la resistenza esterna, si osservarono sulla scala le posizioni dell'ago del galvanometro.

In questa determinazione la deviazione era sempre così piccola, che si poteva ammettere la proporzionalità fra la deviazione stessa e l'intensità della corrente che la produceva.

Prendendo per unità di forza elettromotrice quella della Daniell, e indicando con K l'intensità della corrente che produceva una deviazione corrispondente a una

divisione della scala, con n il numero delle divisioni osservate quando la resistenza del circuito era di R unità Siemens, si aveva

$$\frac{1}{R} = Kn\ .$$

da cui
$$K = \frac{1}{Rn}\ .$$

Moltiplicando ogni volta questo numero K pel numero delle divisioni corrispondenti a una data deviazione, si aveva l'intensità della corrente che attraversava il circuito.

Per K si assunse un medio valore dedotto da un gran numero d'esperienze fatte nelle condizioni indicate.

Siccome però nel corso delle esperienze da farsi con le coppie termoelettriche occorreva sorpassare i limiti entro i quali la detta proporzionalità si verificava; così venne costruita una tavola di correzione per le deviazioni eccedenti quei limiti.

Nel fare ciascuna determinazione del numero n di divisioni corrispondenti alla corrente prodotta da una data coppia termoelettrica, procedeva così. Raggiunta la costanza della temperatura a cui voleva portare la prima saldatura, regolando opportunamente la grandezza e la posizione della fiamma, leggeva subito nella scala la posizione di riposo dell'ago del galvanometro; e poi, inserita un'opportuna resistenza per mezzo del reocordo, chiudevo il circuito, e leggeva la nuova posizione dell'ago; indi apriva un'altra volta il circuito, e rifacevo la lettura della posizione di riposo. Prendendo la media fra la 1ª e la 3ª lettura, venivo a correggere i piccoli errori che si avrebbero avuti per le variazioni dell'azione magnetica terrestre sopra un ago così sensibile come quello del galvanometro.

Poi variando la resistenza del reocordo, tornavo a fare una seconda determinazione del numero n, indi una terza, e talvolta anche una quarta. Facevo poi la media fra tutte queste determinazioni. Si noti che in questo frattempo i tre agitatori erano in continuo movimento, per conservare la temperatura costante in ambedue i bagni.

In tal modo per ciascuno dei metalli e delle leghe sottoposti allo studio, determinai i valori delle forze elettromotrici in sei o sette punti diversi; e con questi valori descrissi una curva, portando sulle ascisse le differenze delle temperature del bagno più caldo da una temperatura arbitraria, e sulle ordinate il valore corrispondente della forza elettromotrice. Siccome il bagno più freddo non si manteneva a temperatura costante, conveniva ridurre le forze elettromotrici ai valori che avrebbero avuto nel caso della perfetta costanza della temperatura del bagno più freddo.

Il Tait (*), applicando alle equazioni del Thomson le conseguenze di una sua particolare ipotesi dedotta dal principio della degradazione dell'energia, giunse a concludere, che la forza elettromotrice d'una coppia termoelettrica può rappresentarsi così:

$$E = A\,(T_1 - T_2)\left(T_0 - \frac{T_1 + T_2}{2}\right) \qquad \ldots\ldots\ (1),$$

(*) TAIT, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1870-71.

dove T_1 e T_2 sono rispettivamente le temperature assolute della saldatura più calda e della più fredda, e A e T_0 sono due còstanti, le quali dipendono dalla natura dei metalli che formano la coppia.

Inoltre l'esperienze di Avenarius (*) e quelle dello stesso Tait (**) hanno posto fuor di dubbio che la forza elettromotrice di una coppia termoelettrica vien espressa da

$$E(T_1 t) = a(T_1 - t) + b(T_1 - t)^2,$$

dove a e b sono due costanti e T_1 e t sono rispettivamente le temperature delle due saldature.

Se scriviamo il valore della forza elettromotrice per un'altra temperatura T_2 della prima saldatura, ammettendo che t rimanga costante, e poi sottragghiamo questo valore dal precedente, avremo:

$$E(T_1 T_2) = 2b(T_1 - T_2)\left(\frac{a}{2b} - t + \frac{T_1 + T_2}{2}\right)$$

ponendo $$T_0 = \frac{a}{2b} + t, \quad \text{e} \quad A = -2b,$$

e così siam giunti all'equazione (1), la quale perciò rimane verificata anche dall'èsperienza.

Avendo io descritte le curve che danno l'andamento della forza elettromotrice al variare della temperatura T_1, ho potuto facilmente per mezzo di queste calcolare la formola (1) per tutti i metalli e le leghe studiate. E per metterne poi più chiaramente a confronto le proprietà termoelettriche, ho seguito il metodo grafico del Thompson; secondo il quale si prende sull'asse delle ordinate la quantità $\frac{dE}{dT}$ e su quello delle ascisse la temperatura.

Dalla (1) si ha:

$$\frac{dE}{dT} = A(T_0 - T).$$

Perciò il diagramma si riduce ad una retta che taglia l'asse delle ascisse nel punto corrispondente a T_0; T_0, è il punto detto neutro dal Thompson: e la quantità A rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo d'inclinazione del diagramma con l'asse delle temperature.

Faccio notare che, invece di prendere per T_1 e T_2 le temperature assolute, ho preso le temperature centesimali; le indicherò quindi con t_1 e t_2.

Per uniformarmi poi alla rappresentazione data dal Tait per molti metalli, ho espresse le forze elettromotrici in microvolt; ed ho fatta coincidere con l'asse delle ascisse la retta del piombo, non quella del pakfong, togliendo o aggiungendo alle forze elettromotrici ottenute per ogni lega, quelle corrispondenti della coppia piombo-pakfong.

(*) Avenarius, *Poggendorffs Annalen*, CXIX, 406 (1863).
(**) Tait, *Trans. of the R. S. of Edinb*, XXVII, 125 (1872-73).

Esperienze sulle leghe Bismuto-Antimonio.

Ho sperimentato sopra undici leghe di Bismuto e Antimonio affine di esaminare minutamente l'influenza delle proporzioni e studiare anche leghe in cui entrino grandi eccessi di ciascuno dei due metalli rispetto all'altro.

La composizione di tali leghe è indicata nel seguente prospetto.

LEGHE	COMPOSIZIONE ATOMICA		RAPPORTI IN PESO	
	Antimonio	Bismuto	Antimonio	Bismuto
1ª	25	1	14,50	1
2ª	8	1	4,64	1
3ª	4	1	2,32	1
4ª	2	1	1,16	1
5ª	1	1	1	1,72
6ª	1	2	1	3,44
7ª	1	6	1	10,32
8ª	1	7	1	12,04
9ª	1	8	1	13,76
10ª	2	17	1	14,62
11ª	1	10	1	17,20

E qui debbo subito notare che per la grandissima fragilità del bismuto, dell'antimonio e delle loro leghe, riusciva assolutamente impossibile il piegarle ad U, onde ho ricorso a quest'altro espediente per costruirle. Ho preso dei tubi di vetro della lunghezza di $20^{cm.}$ e del diametro interno di $5^{mm.}$; e li ho rivestiti con strisce di carta, legandoli poi strettamente con refe. Quando i metalli e le leghe erano fusi, li versavo in queste specie di forme; il vetro, per l'alta temperatura a cui passava d'improvviso, si rompeva, ma però manteneva la sua forma, perchè era ben fasciato dalla carta. Quando tutto si era raffreddato non v'era che da togliere gli strati di carta ed i frantumi di vetro, onde avere la lega adatta per essere collocata nell'apparecchio.

Riferisco nelle tabelle che seguono i valori delle forze elettromotrici ottenute coll'osservazione per ogni coppia, a diversi intervalli di temperatura. E avendo poi

per mezzo di questi determinate le costanti A_0 T_0 nella formola sopra indicata, ho notato in una colonna di ciascuna tabella i valori delle forze elettromotrici calcolati per mezzo di detta formola.

Faccio ricordare che, nelle tabelle stesse, E è espressa in microvolt.

I^a COPPIA — (ANTIMONIO-PIOMBO)				II^a COPPIA — (BISMUTO-PIOMBO)			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
41, 0	15°, 8	+ 888, 90	+ 897, 31	45,00	16°, 0	− 925, 00	− 925, 97
58, 9	15 , 8	+1611, 40	+1604, 89	61,00	16 , 2	−1449, 30	−1451, 41
81, 0	16 , 0	+2552, 00	+2553, 23	80,20	16 , 2	−2109, 50	−2108, 86
101, 5	16 , 4	+3500, 80	+3506, 70	103, 4	16 , 4	−2931, 00	−2925, 23
116, 4	16 , 6	+4261, 50	+4250, 61	121, 5	16 , 6	−3580, 20	−3585, 51
131, 0	17 , 0	+5011, 10	+5012, 00	134,00	16 , 8	−4047, 50	−4045, 30
150, 5	17 , 2	+6108, 00	+6101, 30	149,50	17 , 0	−4632, 00	−4633, 32

$$E = -0,1833\,(t_1 - t_2)\left(-165,86 - \frac{t_1+t_2}{2}\right) \qquad E = 0,0576\,(t_1 - t_2)\left(-523,86 - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

III^a COPPIA — (LEGA 1^a - PIOMBO)				IV^a COPPIA — (LEGA 2^a - PIOMBO)			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38, 2	14°, 2	809, 70	+ 805, 66	40, 00	15°, 4	607, 20	609, 91
59, 0	14 , 4	1547, 60	+1543, 72	64, 50	15 , 8	1061, 40	1059, 62
80, 5	15 , 0	2380, 00	+2338, 65	89, 30	16 , 0	1919, 20	1916, 17
98, 0	15 , 4	+3020, 50	+3022, 12	107, 40	16 , 2	2420, 40	2428, 40
118, 8	16 , 0	+3859, 70	+3869, 78	131, 00	16 , 4	3125, 60	3126, 82
132, 2	16 , 2	+4456, 20	+4444, 39	147, 40	16 , 8	3774, 20	3772, 56
149, 0	16 , 4	+5190, 00	+5191, 79				

$$E = -0,00987\,(t_1 - t_2)\left(-314° - \frac{t_1+t_2}{2}\right) \qquad E = -0,05417\,(t_1 - t_2)\left(-430° - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

Va COPPIA — (LEGA 3a - PIOMBO)
Lega: $Sb_4\,Bi_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38,00	16°, 0	364, 5	367, 0
57, 4	16 , 2	703, 0	712, 0
78, 2	16 , 4	1137, 0	1107, 60
101, 4	16 , 4	1562, 0	1592, 62
119,20	16 , 8	1952, 4	1957, 15
140, 0	17 , 2	2432, 2	2420, 0
151,20	17 , 4	2690, 0	2684, 50

$$E = -0{,}03800\,(t_1 - t_2)\left(-446^\circ - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

VIa COPPIA — (LEGA 4a - PIOMBO)
Lega: $Sb_2\,Bi_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
42, 8	15°, 4	41, 20	40, 00
55, 8	15 , 4	59, 20	59, 16
85, 5	15 , 4	102, 50	103, 33
100, 0	16 , 0	123, 60	124, 21
125, 5	16 , 6	161, 90	161, 95
153, 5	17 , 2	205, 30	204, 02

$$E = -0{,}00065\,(t_1 - t_2)\left(-2217{,}6^\circ - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

VIIa COPPIA — (LEGA 5a - PIOMBO)
Lega: $Sb_1\,Bi_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
46, 8	17°,	— 29,50	— 29,83
69, 8	17 , 4	— 80,20	— 81,82
87, 2	18 , 2	— 139,00	— 137,82
105, 0	18 , 2	— 210,40	— 210,37
127, 5	18 , 2	— 322,50	— 323,80
145, 5	17 , 7	— 432,60	— 432,18

$$E = 0{,}0479\,(t_1 - t_2)\left(11^\circ - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

VIIIa COPPIA — (LEGA 6a - PIOMBO)
Lega: $Sb_1\,Bi_2$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
42°, 0	16°, 8	— 310,50	— 309,64
68 , 8	17 , 0	— 809,30	— 806,97
91 , 5	17 , 4	— 1362,20	— 1363,00
112 , 4	17 , 6	— 1985,60	— 1987,62
129 , 4	17 , 8	— 2570,20	— 2569,80
150 , 0	18 , 0	— 3378,30	— 3379,00

$$E = 0{,}2438\,(t_1 - t_2)\left(-21^\circ - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

IX[a] COPPIA — (LEGA 7[a] - PIOMBO) Lega: $Sb_1 Bi_6$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
47°, 2	16°, 2	— 9141,20	— 9143,60
58 , 4	16 , 4	— 1330,00	— 1324,68
69 , 8	16 , 6	— 1709,60	— 1711,58
88 , 5	16 , 6	— 2467,50	— 2470,51
115 , 0	17 , 0	— 3671,80	— 3673,00
139 , 4	17 , 4	— 4929,50	— 4924,62

$$E = 0.2328\ (t_1 - t_2)\left(-95^\circ - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

X[a] COPPIA — (LEGA 8[a] - PIOMBO) Lega: $Sb_1 Bi_7$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
39, 4	16°, 0	— 721,20	— 723,50
57, 2	16 , 2	— 1349,50	— 1353,60
80, 00	16 , 6	— 2270,30	— 2262,38
95, 50	16 , 6	— 2961,20	— 2960,67
109, 4	16 , 8	— 3626,50	— 3626,80
130, 2	17 , 2	— 4708,40	— 4704,82
148, 3	17 , 6	— 5690,00	— 5694,31

$$E = 0{,}233\ (t_1 - t_2)\left(-105^\circ - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

XI[a] COPPIA — (LEGA 9[a] - PIOMBO) Lega: $Sb_1 Bi_8$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
37, 4	16°, 0	— 1315,20	— 1320,68
60, 0	16 , 0	— 2762,80	— 2765,12
89, 8	16 . 4	— 4716,90	— 4723,71
108, 0	16 , 8	— 5960,30	— 5954,33
129, 2	17 , 0	— 7448,20	— 7444,55
150, 0	17 . 2	— 8950,00	— 8952,30

$$E = 0{,}01002\ (t_1 - t_2)\left(-589{,}2 - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

XII[a] COPPIA — (LEGA 10[a] - PIOMBO) Lega: $Sb_2 Bi_{17}$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
44° ,7	16°, 4	2060, 20	2060, 60
55 , 6	16 , 4	2842, 20	2834, 15
79 , 4	16 , 6	4458, 60	4463, 00
92 , 8	16 , 8	5320, 30	5321, 50
115 , 0	17 , 0	6786, 40	6783, 32
127 , 0	17 , 4	7268, 80	7269, 60
150 , 8	17 , 8	8951, 70	8953, 65

$$E = 0{,}1027\ (t_1 - t_2)\left(740 - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

(XIII[a] COPPIA (LEGA 11[a]-PIOMBO)
Lega $Sb_1\ Bi_{10}$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
39, 0	17°, 0	1645, 20	1640, 52
51, 8	17 , 2	2560, 30	2554, 92
69, 2	17 , 4	3786, 30	3789, 25
84, 4	17 , 4	5095, 80	5096, 85
100, 0	17 , 6	5855, 90	5860, 80
121, 5	17 , 8	7080, 60	7082, 68
146, 8	18 , 2	8770, 20	8765, 00

$$E = 0118\,(t_1 - t_2)\left(695 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Pongo da ultimo in un prostretto i valori dei punti neutrali e delle tangenti trigonometriche per ogni metallo e per ogni lega, affinchè più facilmente se ne possa fare il confronto.

Metalli e Leghe		Punto neutro rispetto al piombo	Tangente trigonometrica dell'angolo con la linea del Piombo
	Sb	— 166°, 86	— 0, 1833
1[a]	$Sb_{25}\ Bi_1$	— 314 , 00	— 0, 0987
2[a]	$Sb_8\ Bi_1$	— 430 , 00	— 0, 05417
3[a]	$Sb_4\ Bi_1$	— 446 , 00	— 0, 03800
4[a]	$Sb_2\ Bi_1$	— 2217 , 6	— 0, 00065
5[a]	$Sb_1\ Bi_1$	+ 11 , 00	+ 0, 0479
6[a]	$Sb_1\ Bi_2$	— 21 , 00	+ 0, 2438
7[a]	$Sb_1\ Bi_6$	— 95 , 00	+ 0, 2338
8[a]	$Sb_1\ Bi_7$	— 105 , 00	+ 0, 2320
9[a]	$Sb_1\ Bi_8$	— 589 , 2	+ 0, 1002
10[a]	$Sb_1\ Bi_{8,5}$	+ 740 , 00	+ 0, 1027
11[a]	$Sb_1\ Bi_{10}$	+ 659 , 00	+ 0, 1118
	Bi	— 524 , 96	— 0, 0576

Per mezzo poi di tali costanti applicando la formola

$$\frac{dE}{dt}=A(t_0-t) ,$$

ho costruito nella tavola I^a i diagrammi che rappresentano graficamente il fenomeno. Se si pon mente così al prospetto, come ai diagrammi, si scorgono subito alcune particolarità degne di nota. Innanzi tutto il diagramma della lega quinta in cui i due metalli sono in proporzioni eguali, si accosta di molto al bismuto, e quello della lega sesta che contiene il doppio d'antimonio, si trova quasi alla medesima distanza dai diagrammi dei due metalli.

I diagrammi delle leghe in cui prevale il bismuto si avvicinano al diagramma del metallo stesso, tanto più, quanto più il bismuto è prevalente, finchè lo raggiungono e poi lo sorpassano. La lega decima ($Sb_1\ Bi_{8.5}$) fra tutte ha il diagramma più lontano, mentre quello dell'undecima ($Sb_1\ Bi_{10}$) comincia nuovamente ad abbassarsi.

Invece non v'è nessuna lega, il cui diagramma oltrepassi entro i limiti delle esperienze, quello dell'antimonio, quantunque nella lega I^a ($Sb_{25}\ Bi_1$) vi sia un grandissimo eccesso di tale metallo.

Se si considera poi l'andamento dei punti neutri e delle tangenti trigonometriche, si vede che la prima lega ha il punto neutro più basso che quello dell'antimonio, e la tangente trigonometrica più piccola; e di mano in mano che vanno diminuendo le proporzioni dell'antimonio, il punto neutro va abbassandosi, e la tangente trigonometrica impicciolendosi fino a che l'uno e l'altra raggiungono un valore infimo per la lega quarta, la cui retta, fra quelle che stanno al di sotto della linea del piombo è la più vicina a questa; al di sopra della linea stessa, i punti neutri che dapprincipio sono relativamente alti, si vanno sempre più scostando fino a punti lontanissimi, e finiscono per trasportarsi dalla parte opposta, diventando positivi; le tangenti trigonometriche vanno sempre abbassandosi fino a raggiungere un minimo per ricominciare poi a crescere quando i punti neutri sono passati dalla parte positiva.

In altre parole, cominciando dalla prima lega, i diagrammi si fanno sempre meno inclinati alla linea del piombo, sino a diventarle pressochè paralleli; poi le si inclinano della parte opposta, le passano al di sopra, e poi cominciano nuovamente a diminuire la loro inclinazione fino a raggiungere quasi il parallelismo una seconda volta; e finalmente tornano ad inclinarsi dalla parte opposta.

I diagrammi stessi danno la forza elettromotrice di una coppia composta da due dei metalli o delle leghe studiate. Basta valutare l'area del quadrilatero che ha per lati le ordinate spettanti alle temperature delle due saldature, e i tratti compresi tra quelle dei diagrammi spettanti alle due sostanze che formano la lega. Prendendo 0 e 100 per temperature delle saldature, e dando segno positivo alle forze elettromotrici che hanno lo stesso segno della coppia antimonio-piombo, si vede che nessuna delle coppie studiate ha forza elettromotrice maggiore della coppia antimonio-piombo; e che prendendo a considerare le coppie nell'ordine in cui va crescendo la proporzione del bismuto, si trovano valori delle forze elettromotrici che vanno sempre più accostandosi a quello della coppia bismuto-piombo, lo oltrepassano e raggiungono un massimo (lega decima), dopo di che discendono fino al valore stesso di quella coppia.

Se per rappresentare le esperienze, si adotta il partito di costruire i valori delle forze elettromotrici dei singoli metalli e delle leghe in funzione della temperatura, si vede che le curve spettanti alle leghe invece di distribuirsi nello spazio compreso fra le curve spettanti ai due metalli in modo corrispondente alla composizione delle leghe stesse, s'accostano alla curva del bismuto, e per certe leghe, oltrepassandola, escono da quello spazio.

Tutto questo si potrebbe anche rappresentare graficamente portando sulle ascisse i numeri rappresentanti le parti di bismuto che con 1 di antimonio, costituiscono ciascuna lega; e sulle ordinate i valori delle rispettive forze elettromotrici. Si avrebbe una curva che comincia dall'ordinata dell'antimonio, s'avvicina all'asse dell'ascisse, lo taglia e sale dall'altra parte fino a raggiungere un'ordinata massima che è più grande di quella spettante al bismuto; poi discende sino all'estremità dell'ordinata stessa del bismuto.

Già il Becquerel, mantenendo sempre a 0° e a 100° le saldature delle coppie su cui sperimentava, avea trovate delle leghe che, accoppiate col rame, davano una forza elettromotrice maggiore di quella del bismuto, ma egli non ha raggiunta la lega, che dà in tali condizioni l'effetto massimo, e che, secondo le mie esperienze, è composta di 1 di Antimonio a 14,6 di Bismuto in peso.

Esperienze sulle leghe Cadmio e Stagno.

Per vedere se anche per leghe Cadmio-Stagno si verificasse il fenomeno che ho notato per quelle di Antimonio e Bismuto, mi è stato pure necessario sperimentare sopra un gran numero di dette leghe. Come varii la loro composizione, apparisce nella tabella che segue:

LEGHE	IN COMPOSIZIONE ATOMICA		IN PESI	
	Stagno	Cadmio	Stagno	Cadmio
1ª	18	1	18, 99	1
2ª	7	1	7, 385	1
3ª	4	1	4, 22	1
4ª	2	1	2, 11	1
5ª	1	1	1, 055	1
6ª	1	2	1	1, 89
7ª	1	4	1	3, 79
8ª	1	6	1	5, 67
9ª	2	15	1	7, 10
10ª	1	9	1	8, 505
11ª	1	10	1	9, 45
12ª	1	11	1	10, 395

Riporto senz'altro, nel modo già seguìto per la serie antecedente, i risultati delle esperienze eseguite sulle varie coppie.

COPPIA I[a] — (CADMIO-PIOMBO)			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38, 6	16°, 0	79, 80	80, 65
55, 4	16 , 2	153, 20	153, 06
79, 0	16 , 4	277, 10	275, 27
90, 0	17 , 0	338, 10	339, 30
112, 20	17 , 4	485, 50	485, 62
125, 30	18 , 0	582, 20	580, 52
149, 0	18 , 6	773, 30	772, 03

$$E=-0{,}0420\,(t_1-t_2)\left(-57{,}17-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

COPPIA II[a] — (STAGNO-PIOMBO)			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
36, 0	15°, 0	+ 0, 9	+ 1, 00
51, 20	15 , 0	— 0, 040	— 0, 032
82, 0	15 , 2	— 6, 50	— 6, 30
97, 40	15 , 2	— 11, 90	— 12, 25
115, 6	15 , 4	— 22, 00	— 20, 83
130, 40	15 , 6	— 29, 50	— 29, 36
151, 60	16 , 6	— 43, 20	— 44, 04

$$E=0{,}006388\,(t_1-t_2)\left(32{,}96\,\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

III[a] COPPIA — (LEGA 1[a]-PIOMBO) Lega: $Sn_{15}\ Cd_1$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
42, 0	17°, 0	0, 8	0, 73
61, 0	17 , 2	4, 70	4, 78
83, 20	17 , 4	13, 20	13, 32
104, 50	17 , 4	23, 50	25, 36
122, 40	17 , 6	37, 80	58, 41
148, 80	18 , 0	65, 80	62, 54

$$E=-0{,}00833\,(t_1-t_2)\left(26-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

IV[a] COPPIA — (LEGA 2[a]-PIOMBO) Lega: $Sn_7\ Cd_1$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38, 6	16°, 4	5, 80	5, 60
60, 4	16 , 4	15, 12	15, 71
87, 4	16 , 6	33, 80	34, 52
99, 8	16 , 8	46, 20	45, 50
115, 6	17 , 0	61, 60	61, 62
140, 5	17 , 4	91, 30	91, 88

$$E=-0{,}00960\,(t_1-t_2)\left(1°,2-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

V^a COPPIA — (LEGA 3^a-PIOMBO)
Lega: $Sn_4\ Cd_4$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
41, 0	16, 4	12, 70	12, 73
61, 2	16, 8	30, 80	31, 82
73, 4	17, 0	53, 20	53, 23
98, 2	17, 2	97, 20	96, 19
126, 4	17, 4	159, 50	159, 62
148, 2	17, 8	220, 10	219, 18

$$E = 0{,}0195\,(t_1 - t_2)\left(-3{,}2 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

VI^a COPPIA — (LEGA 4^a-PIOMBO)
Lega: $Sn_2\ Cd_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
39, 0	17°, 0	31, 00	30, 26
59, 0	17 , 2	68, 70	68, 77
77, 40	17 , 4	117, 20	117, 33
101, 50	17 , 8	195, 00	194, 30
13[illegible], 40	18 , 0	357, 20	351, 00
144, 50	18 , 0	370, 00	375, 40

$$E = -0{,}029\,(t_1 - t_2)\left(-18 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

COPPIA VII^a — (LEGA 5^a-PIOMBO)
Lega: $Sn_1\ Cd_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38, 8	17°, 0	45, 10	45, 00
51, 5	17 , 4	76, 50	77, 77
79, 0	17 , 8	162, 80	167, 47
100, 8	18 , 0	247, 80	246, 67
119, 2	18 , 2	327, 20	327, 19
38, 0	18 , 4	420, 30	419, 26

$$E = -0{,}028\,(t_1 - t_2)\left(-47° - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

COPPIA VIII^a (LEGA 6^a-PIOMBO)
Lega: $Sn_1\ Cd_2$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
43, 0	17°, 2	73, 20	73, 69
59, 8	17 , 4	133, 50	134, 12
84, 4	17 , 8	239, 80	240, 72
111, 2	18 , 0	384, 20	382, 30
128, 2	18 , 2	485, 60	485, 38
149, 0	18 , 4	653, 80	654, 55

$$E = -0{,}03611\,(t_1 - t_2)\left(-49° - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

IXª COPPIA — (LEGA 7ª-PIOMBO)
Lega: $Sn_1\ Cd_4$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
42, 0	18°, 0	80, 50	80, 81
68, 8	18 , 2	190, 20	195, 38
84, 4	18 , 6	273, 80	273, 34
101, 6	18 , 8	372, 80	370, 33
125, 4	19 , 2	524, 50	522, 00
148, 6	19 , 6	690, 20	689, 79

$$E = -0{,}0366\,(t_1 - t_2)\left(-62^\circ - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Xª COPPIA — (LEGA 8ª - PIOMBO)
Lega: $Sn_1\ Cd_6$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
40, 0	17°, 6	39, 20	39, 26
71, 8	17 , 8	251, 10	249, 19
92, 6	18 , 0	372, 00	370, 06
110, 4	18 , 4	488, 50	488, 67
130, 6	18 , 6	635, 40	639, 46
151, 4	19 , 0	810, 00	810, 65

$$E = -\,0{,}0560\,(t_1 - t_2)\left(-25 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

XIª COPPIA — (LEGA 9ª - PIOMBO)
Lega: $Sn_2\ Cd_{15}$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
35, 6	18°, 6	82, 70	82, 84
49, 4	18 , 8	156, 80	157, 98
64, 8	19 , 0	250, 80	251, 29
83, 6	19 , 4	378, 50	377, 68
100, 6	19 , 8	505, 20	504, 45
121, 2	20 , 2	674, 20	674, 46
146, 4	20 , 8	902, 90	903, 70

$$E = -0{,}04140\,(t_1 - t_2)\left(-90{,}6 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

XIIª COPPIA — (LEGA 10ª - PIOMBO)
Lega: $Sn_1\ Cd_9$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
40, 6	18°, 0	126, 80	128, 68
53, 4	18 , 4	208, 20	208, 40
78, 6	18 , 8	388, 60	389, 30
98, 4	19 , 0	552, 40	551, 35
114, 6	19 , 4	698, 30	695, 33
131, 0	19 , 6	852, 60	853, 80
148, 6	20 , 0	1038, 10	1035, 85

$$E = -0{,}0434\,(t_1 - t_2)\left(-101{,}3 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

XIII^a COPPIA — (LEGA 11^a - PIOMBO) Lega: $Sn_1\ Cd_{10}$				XIV^a COPPIA — (LEGA 12^a - PIOMBO) Lega: $Sn_1\ Cd_{11}$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
37, 4	16°, 0	113, 24	113, 34	40, 2	15°, 8	112, 20	112, 58
60, 0	16 , 0	227, 54	227, 92	58, 4	16 , 0	210, 50	212, 18
79, 4	16 , 2	278, 08	281, 00	80, 0	16 , 0	351, 60	349, 58
89, 8	16 , 4	428, 04	427, 42	99, 5	16 , 2	493, 78	492, 74
108, 0	16 , 8	567, 32	567, 21	116, 2	16 , 8	618, 80	620, 93
129, 2	17 , 0	748, 22	748, 48	134, 0	17 , 2	774, 80	774, 20
150, 0	17 , 2	945, 78	945, 85	152, 2	17 , 8	946, 30	945, 00
$E=-0{,}0426\,(t_1-t_2)\left(-83{,}6-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$				$E=-0{,}04241\,(t_1-t_2)\left(-80{,}8-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$			

Riassumo qui pure in un prospetto i valori dei punti neutri e delle tangenti trigonometriche:

METALLI E LEGHE		PUNTO NEUTRO RISPETTO AL PIOMBO	TANGENTE TRIGONOMETRICA dell'angolo colla linea del Piombo
1^a	Sn	+ 32°, 95	+0,006388
2^a	$Sn_{18}\ Cd_1$	+ 26 , 0	−0,00833
3^a	$Sn_7\ Cd_1$	+ 1 , 2	−0,00960
4^a	$Sn_4\ Cd_1$	− 3 , 2	−0,0195
5^a	$Sn_2\ Cd_1$	− 18 , 0	−0,0279
6^a	$Sn_1\ Cd_1$	− 47 , 0	−0,0289
7^a	$Sn_1\ Sd_2$	− 49 , 0	−0,03611
8^a	$Sn_1\ Cd_4$	− 62 , 0	−0,0366
9^a	$Sn_1\ Cd_6$	− 71 , 8	−0,0390
10^a	$Sn_1\ Cd_{7,5}$	− 90 , 6	−0,04140
11^a	$Sn_1\ Cd_9$	−101 , 3	−0,0434
12^a	$Sn_1\ Cd_{10}$	− 83 , 6	−0,04260
13^a	$Sn_1\ Cd_{11}$	− 80 , 8	−0,04241
14^a	Cd	− 57 , 17	−0,0420

Nella tavola II[a] si trovano descritti i diagrammi relativi al cadmio, allo stagno e alle loro leghe. Dalla tavola stessa si vede subito, che anche la prima lega $(Sn_{18}\ Cd_1)$, in cui lo stagno si trova in grandissimo eccesso, ha un diagramma che si scosta già molto dal diagramma di quel metallo. Nelle successive leghe diminuendo continuamente le proporzioni dello stagno e aumentando quelle del cadmio, i diagrammi si accostano sensibilmente a quello di quest'ultimo; sino a che il diagramma della lega ottava $(Sn_1\ Cd_6)$ passa al di là del diagramma stesso del cadmio. Quelli della lega nona $(Sn_1\ Cd_{7,5})$ e decima $(Sn_1\ Cd_9)$ seguitano sempre più ad allontanarsi, mentre quelli della lega undecima $(Sn_1\ Cd_{10})$ e dodicesima $(Sn_1\ Cd_{11})$ già tornano a riaccostarvisi.

Se si osserva nel prospetto l'andamento dei punti neutri e delle tangenti trigonometriche, si scorge che esso assomiglia moltissimo a quello delle leghe antimonio-bismuto.

Infatti, cominciando dallo stagno, i punti neutri vanno nelle leghe successive sempre abbassandosi finchè raggiungono il punto neutro del cadmio e lo oltrepassano; e seguitano poi ancora ad abbassarsi arrivando a toccare un valore massimo, da cui nuovamente tornano verso quello del cadmio. I valori delle tangenti trigonometriche invece vanno aumentando, cominciando da quello dello stagno; oltrepassano quello del cadmio, raggiungono un massimo, e tornano indietro.

I punti neutri e le tangenti trigonometriche in queste leghe seguono un andamento più ordinato che in quelle di antimonio e bismuto.

Per le forze elettromotrici valgono considerazioni simili a quelle fatte per la serie precedente.

Esperienze sulle leghe Piombo-Stagno.

Ho formato dieci leghe di piombo e stagno, le cui proporzioni si vedono nel seguente prospetto:

LEGHE	COMPOSIZIONE ATOMICA		IN PESI	
	Stagno	Piombo	Stagno	Piombo
1[a]	25	1	14, 25	1
2[a]	9	1	5, 13	1
3[a]	4	1	2, 28	1
4[a]	2	1	1, 14	1
5[a]	1	1	1	1, 754
6[a]	1	2	1	3, 508
7[a]	1	5	1	8, 77
8[a]	1	6	1	10, 56
9[a]	1	7	1	12, 32
10[a]	1	10	1	17, 60

Ecco i risultati delle esperienze:

COPPIA I^a — (LEGA 1^a-PIOMBO) *Lega:* $Sn_{25}\ Pb_1$				COPPIA II^a — (LEGA 2^a-PIOMBO) *Lega:* $Sn_9\ Pb_1$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38, 0	18°, 0	— 0, 20	— 0, 24	39, 2	18°, 4	1, 32	1, 75
51, 8	18 , 2	— 1, 20	— 1, 14	58, 4	18 , 4	3, 25	3, 37
69, 8	18 , 4	— 3, 20	— 3, 20	73, 4	18 , 8	5, 42	5, 45
92, 5	18 , 8	— 7, 30	— 7, 22	97, 6	19 , 0	9, 80	9, 75
115, 6	19 , 2	—13, 00	—12, 97	115, 0	19 , 4	13, 62	13, 56
131, 2	19 , 4	—17, 80	—17, 78	126, 2	19 , 6	16, 40	16, 31
150, 4	19 , 8	—24, 60	—24, 68	148, 4	20 , 0	22, 60	22, 60

$$E=0{,}0031\,(t_1-t_2)\left(24-\frac{t_1+t_2}{2}\right) \qquad E=0{,}0020\,(t_1-t_2)\left(-3^\circ{,}8-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

COPPIA III^a — (LEGA 3^a-PIOMBO) *Lega:* $Sn_4\ Pb_1$				COPPIA IV^a — (LEGA 4^a-PIOMBO) *Lega:* $Sn_2\ Pb_1$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
41, 0	18°, 0	1, 78	1, 87	39, 0	18°, 2	1, 02	1, 04
62, 4	18 , 2	4, 10	4, 08	60, 8	18 , 4	2, 30	2, 27
86, 8	18 , 6	7, 14	7, 14	84, 4	18 , 8	3, 80	3, 93
100, 0	18 , 8	9, 10	9, 05	99, 8	19 , 0	5, 10	5, 03
122, 2	19 , 2	12, 60	12, 66	114, 5	19 , 0	6, 35	6, 31
149, 8	19 , 4	17, 80	17, 80	140, 2	19 , 4	8, 65	8, 68

$$E=0{,}00101\,(t_1-t_2)\left(-51^\circ-\frac{t_1+t_2}{2}\right) \qquad E=0{,}000421\,(t_1-t_2)\left(-90^\circ{,}8-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

COPPIA V^a — (LEGA 5^a-PIOMBO) Lega: $Sn_1\ Pb_1$				COPPIA VI^a — (LEGA VI^a-PIOMBO) Lega: $Sn_1\ Pb_2$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
40, 0	19°, 0	0, 60	0, 62	36, 2	18°, 5	0, 40	0, 43
61, 2	19 , 4	1, 22	1, 29	60, 0	18 , 8	1, 05	1, 03
78, 8	19 , 4	1, 94	1, 90	84, 2	19 , 0	1, 58	1, 67
93, 2	19 , 9	2, 40	2, 42	97, 2	19 , 6	2, 10	2, 00
112, 4	20 , 0	3, 22	3, 16	115, 0	19 , 6	2, 68	2, 79
130, 4	20 , 4	3, 54	3, 53	131, 0	19 , 8	2, 96	2, 89
149, 0	20 , 8	4, 58	4, 60	152, 0	20 , 2	3, 68	3, 61

$E = 0{,}00012\,(t_1 - t_2)\left(-218° - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$ $E = 0{,}000050\,(t_1 - t_2)\left(-462{,}2 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$

COPPIA VII^a — (LEGA 7^a-PIOMBO) Lega: $Sn_1\ Pb_5$				COPPIA VIII^a — (LEGA 8^a-PIOMBO) Lega: $Sn_1\ Pb_5$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
45, 0	18°, 0	3, 20	2, 15	38°, 0	18°, 0	1, 30	1, 31
63, 4	18 , 2	3, 80	3, 75	58 , 0	18 , 5	2, 85	2, 79
81, 4	18 , 6	5, 20	5, 30	80 , 0	18 , 8	5, 80	5, 84
96, 4	18 , 8	6, 90	6, 92	99 , 8	19 , 0	7, 75	7, 84
120, 4	19 , 2	9, 45	9, 48	121 , 6	19 , 4	11, 10	11, 06
142, 4	19 , 6	12, 00	12, 01	147 , 2	19 , 8	15, 40	15, 46

$E = -0{,}000369\,(t_1 - t_2)\left(-184 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$ $E = -0{,}001007\,(t_1 - t_2)\left(-37{,}0 + \frac{t_1 - t_2}{2}\right)$

COPPIA IX^a — (LEGA 9^a-PIOMBO) *Lega:* $Sn_1\ Pb_7$				COPPIA X^a — (LEGA 10^a-PIOMBO) *Lega:* $Sn_1\ Pb_{10}$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
41, 0	17°, 2	1, 30	1, 25	53°, 0	17°, 4	0, 40	0, 45
57, 0	17 , 4	2, 32	2, 35	62 , 2	18 , 2	0, 66	0, 68
79, 0	18 , 0	4, 20	4, 11	76 , 2	17 , 8	1, 10	1, 08
104, 8	18 , 4	6, 80	6, 93	102 , 2	19 , 0	2, 25	2, 23
130, 1	18 , 9	10, 20	10, 14	122 , 0	19 , 4	3, 20	3, 29
154, 8	17 , 2	13, 75	13, 70	145 , 2	20 , 4	4, 92	4, 83

$$E = -0{,}00085\,(t_1 - t_2)\left(-32°{,}8 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \qquad E = -0{,}000547\,(t_1 - t_2)\left(12°{,}0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Faccio seguire il prospetto dei valori dei punti neutrali e delle tangenti trigonometriche.

METALLI E LEGHE		PUNTO NEUTRO RISPETTO AL PIOMBO	TANGENTE TRIGONOMETRICA dell' angolo colla linea del Piombo
	Sn	— 32°, 96	+ 0,006388
1	$Sn_{25}\ Pb_1$	— 24 , 0	+ 0,0031
2	$Sn_9\ Pb_1$	— 3 , 8	+ 0,0020
3	$Sn_4\ Pb_1$	— 51 , 0	+ 0,00101
4	$Sn_2\ Pb_1$	— 90 , 8	+ 0,000421
5	$Sn_1\ Pb_1$	— 218 , 0	+ 0,00012
6	$Sn_1\ Pb_2$	— 462 , 2	+ 0,000050
7	$Sn_1\ Pb_5$	— 184 , 0	— 0,000369
8	$Sn_1\ Pb_6$	— 37 , 0	— 0,001007
9	$Sn_1\ Pb_7$	— 32 , 8	— 0,00085
10	$Sn_1\ Pb_{10}$	+ 12 , 0	— 0,000547

Da tale prospetto e dai diagrammi segnati nella Tavola III, si deduce che anche questa specie di leghe segue nelle proprietà termoelettriche le leggi che regolano le due specie precedenti; perchè anche i diagrammi di quelle leghe, in cui si trova lo stagno alcun poco in eccedenza, si accostano piuttosto alla retta del Piombo: e vanno via via avvicinandosi sempre più a questa retta, a misura che diminuiscono le proporzioni dello stagno. Sino alla lega 6ª ($SnPb_2$) i diagrammi si mantengono fra quelli dello Stagno e del Piombo, ma poi passando al di là della retta del Piombo, raggiungono un massimo e retrocedono.

L'andamento dei punti neutri e delle tangenti trigonometriche mostra, che i diagrammi si fanno sempre meno inclinati alla linea del Piombo sino alla lega 6ª. — Cominciando dalla 7ª che è passata al di là di detta linea, i diagrammi si vanno allontanando per ritornare poi ad avvicinarsi alla linea stessa del Piombo.

Esperienze sulle leghe Antimonio-Cadmio.

Mi sono accontentato di studiare sei leghe soltanto di questa specie perchè le ho credute sufficienti a mostrare l'andamento dei fenomeni.

La loro composizione si vede nella seguente tabella:

LEGHE	COMPOSIZIONE ATOMICA		IN PESI	
	Cadmio	Antimonio	Cadmio	Antimonio
1ª	20	1	18, 36	1
2ª	4	1	3, 67	1
3ª	2	1	1, 836	1
4ª	1	1	1	1, 089
5ª	—	—	1	1, 154
6ª	5	9	1	1, 96

Queste leghe presentano l'inconveniente di essere fragilissime; malgrado tutte le cautele non poteva mai impedire che si frantumassero nel maneggiarle. Perciò prima d'avvolgere con carta i tubi di vetro, che dovevano servire da forme per le asticelle, li fasciavo strettamente alle loro estremità con filo di rame. E quando erasi raffreddata la lega che avevo dentro versata, riscaldavo successivamente le due estremità del tubo sino alla fusione della lega stessa; e vi immergevo i fili di pakfong, avendo avuto prima cura di bagnarli con cloruro di zinco, onde non si formasse all'interno uno strato di ossido.

In tal modo preparate le aste, si collocavano nell'apparecchio senza togliervi il rivestimento di carta; e allora si denudavano le due estremità rompendo con cautela i fili di rame, mentre i frantumi di vetro cadevano da per se stessi. In questo caso naturalmente si aveva una conduzione di calore molto più grande; ma tuttavia, agitando continuamente anche il bagno più freddo, si riusciva a mantenere costante la temperatura della saldatura che v'era immersa.

Le tabelle che seguono danno i risultati delle esperienze.

COPPIA I[a] — (LEGA 1[a]-PIOMBO)
Lega: $Cd_{20}\ Sb_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
38°, 0	20°, 0	120, 40	119, 960
49 , 5	20 , 4	208, 40	207, 914
63 , 0	20 , 8	320, 60	329, 522
91 , 4	21 , 0	586, 20	583, 262
114 , 5	21 , 2	840, 10	831, 310
133 , 4	21 , 8	1051, 20	1052, 76
148 , 6	22 , 0	1220, 80	1226, 86

$$E = -0{,}05362(t_1 - t_2)\left(-98{,}2 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

COPPIA II[a] — (LEGA 2[a]-PIOMBO)
Lega: $Cd_4\ Sb_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
40°, 0	20°, 2	450, 50	454, 81
56 , 4	20 , 6	862, 40	871, 31
78 , 6	20 , 8	1522, 20	1512, 00
93 , 5	21 , 2	1980, 20	1981, 52
109 , 6	21 , 4	2539, 60	2534, 30
129 , 2	21 , 8	3262, 60	3260, 80
147 , 6	22 , 2	3990, 10	3999, 22

$$E = -0{,}1628\,(t_1 - t_2)\left(-111 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

COPPIA III[a] — (LEGA 3[a]-PIOMBO)
Lega: $Cd_2\ Sb_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
44°, 8	18°, 6	1989, 60	1993, 62
61 , 0	18 , 8	3280, 60	3287, 70
85 , 2	19 , 2	5334, 20	5321, 60
109 , 3	19 , 8	7480, 50	7479, 52
133 , 0	20 , 0	9590, 70	9597, 89
158 , 0	20 , 6	12184, 30	12171, 50

$$E = -0{,}3214\,(t_1 - t_2)\left(-312 - \frac{t_1 - t_2}{2}\right)$$

COPPIA IV[a] — (LEGA 4[a]-PIOMBO)
Lega: $Cd_1\ Sb_1$

t_1	t_2	E osservato	E calcolato
46°, 0	20°, 0	6615, 30	6611, 25
58 , 0	19 , 8	9830, 20	9813, 28
81 , 0	17 , 0	16715, 30	16727, 8
103 , 0	17 , 2	22838, 40	22847, 10
130 , 2	17 , 6	30674, 50	30671, 50
148 , 0	18 , 0	35928, 20	35936, 00

$$E = -0{,}4430\,(t_1 - t_2)\left(-541 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

COPPIA V[a] — (LEGA 5[a]-PIOMBO) Lega: $Cd_1\ Sb_{1.06}$				COPPIA VI[a] — (LEGA 6[a]-PIOMBO) Lega: $Cd_1\ Sb_{1,8}$			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
56, 2	21°, 2	15436, 0	1545, 45	57, 5	20°, 6	9412, 60	2403, 00
79, 0	21 , 2	20598, 5	20577, 2	74, 2	20 , 8	13825, 60	13800, 80
91, 3	21 , 4	28116, 20	28148, 1	91, 5	21 , 2	18426, 40	18431, 20
101, 2	21 , 6	36208, 20	36200, 0	106, 5	22 , 0	22417, 60	22438, 00
124, 8	22 , 0	47690, 50	47687, 5	124, 8	22 , 0	27700, 20	27701, 50
148, 0	22 , 4	58872, 20	58858, 0	148, 8	22 , 6	34388, 60	34392, 20

$$E = -0{,}5820\,(t_1 - t_2)\left(-720 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \qquad E = -0{,}426\,(t_1 - t_2)\left(-559 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Il prospetto dei valori dei punti neutri delle tangenti trigonometriche è il seguente:

N°	LEGHE	PUNTI NEUTRI rispetto al Piombo	TANGENTI TRIGONOMETRICHE dell'angolo colla linea del Piombo
1[a]	$Cd_{20}\ Sb_1$	— 98, 2	— 0, 05362
2[a]	$Cd_4\ Sb_1$	— 111	— 0, 1628
3[a]	$Cd_2\ Sb_1$	— 312	— 0, 2214
4[a]	$Cd_1\ Sb_1$	— 541	— 0, 4430
5[a]	— —	— 720	— 0, 5820
6[a]	$Cd_5\ Sb_9$	— 559	— 0, 4261

Questi numeri e i diagrammi della tavola IV bastano già a mostrarci chiaramente che nelle leghe di Antimonio e Cadmio avvengono in maniera molto più distinta e molto più rapida i fenomeni notati per le leghe antecedenti. E invero la 1[a] lega, sebbene contenga eccesso di Cadmio, ha un diagramma già relativamente discosto da

quello del Cadmio stesso; e aumentando le proporzioni dell'Antimonio, i diagrammi delle leghe rapidamente si muovono verso la retta di questo metallo, tantochè nelle proporzioni di 2 di Cadmio a 1 di Antimonio in atomi, il diagramma della lega ha oltrepassato di molto quello dell'Antimonio. In breve si arriva alla lega quinta che ha il diagramma più lontano: e la lega successiva $(Cd_5\ Sb_9)$ che da essa poco differisce, possiede già un diagramma che s'è riaccostato di molto a quello dell'Antimonio. Anche i punti neutri e le tangenti trigonometriche molto rapidamente si scostano da quelli del Cadmio verso quelli dell'Antimonio, li sorpassano, raggiungono un massimo, e ritornano indietro.

Tutto questo m'ha fatto pensare che esista una legge generale che regoli l'andamento dei diagrammi e dei poteri termoelettrici nelle leghe formate di due metalli presi in proporzioni diverse. Tanto più che osservando le esperienze del Naccari e del Bellati, si vede che i diagrammi delle leghe studiate tendono sempre ad avvicinarsi ad uno dei due metalli, piuttosto che all'altro; anzi nella 2ª specie, quello della lega $(Sn_9\ Sb_1)$ oltrepassa la retta dello stagno.

Perciò formai altre leghe d'ambedue queste specie, esagerando le proporzioni dei due metalli per vedere se seguivano del tutto l'andamento di quelle da me studiate. I risultati ch'io ho ottenuti, dalle esperienze su queste due specie di leghe, li ho riferiti al Pakfong, perchè a questa lega li avevano pure riferiti i Prof. Naccari e Bellati.

COPPIA — [LEGA $(Sb_1\ Pb_{12})$-PAKFONG]				COPPIA — [LEGA $(Sb_1\ Pb_{16})$-PAKFONG]			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
42 , 0	18 , 4	224, 60	223, 85	39 , 0	18 , 6	107, 20	107, 46
58 , 8	18 , 8	386, 40	390, 40	61 , 0	19 , 0	528, 40	268, 45
79 , 2	19 , 0	508, 80	507, 66	83 , 4	19 , 2	362, 50	360, 52
103 , 0	19 , 4	878, 40	876, 48	99 , 0	19 , 4	460, 80	456, 60
122 , 4	19 , 6	1108, 30	1110, 00	116 , 5	19 , 8	566, 20	568, 02
148 , 0	20 , 0	1434, 20	1436, 10	143 , 6	20 , 2	752, 80	751, 01
$E=0{,}03224(t_1-t_2)\left(-264-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$				$E=0{,}015412(t_1-t_2)\left(-313-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$			

COPPIA — [LEGA (Sb_1 Pb_{20})-PAKFONG]				COPPIA — [LEGA (Sb_{25} Pb_1)-PAKFONG]			
t_1	t_2	E osservato	E calcolato	t_1	t_2	E osservato	E calcolato
48 , 4	18 , 2	236, 20	235, 04	41 , 3	18 , 4	326, 20	328, 48
60 , 0	18 , 4	331, 60	328, 65	70 , 0	19 , 0	793, 90	794, 66
88 , 6	18 , 8	568, 80	571, 58	96 , 4	19 , 4	1350, 20	1340, 10
101 , 3	19 , 2	682, 30	682, 90	105 , 6	19 , 6	1545, 70	1540, 60
122 , 4	19 , 8	874, 40	875, 48	123 , 4	19 , 8	1955, 50	1957, 42
151 , 6	20 , 2	1158, 20	1159, 82	148 , 6	20 , 0	2608, 20	2607, 52
$E=0{,}01984\,(t_1-t_2)\left(-359-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$				$E=0{,}10884\,(t_1-t_2)\left(-102-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$			

Si noti che la lega (Sb_1 Pb_9) studiata da Naccari e Bellati ha, rispetto al Pakfong, la formola:

$$E=0{,}04315\,(t_1-t_2)\left(-205-\frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Il Piombo invece ha la formola:

$$E=0{,}027646\,(t_1-t_2)\left(-365{,}3-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

e l'Antimonio:

$$E=0{,}10963\,(t_1-t_2)\left(-273{,}55-\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

Dalle formole esposte si ricava il seguente prospetto:

METALLI E LEGHE		PUNTO NEUTRO rispetto al Pakfong	TANGENTE TRIGONOMETRICA dell'angolo della linea del Pakfong
	Sb	— 273, 55	+ 0, 10963
1ª	Sb_{25} Pb_1	— 102, 00	+ 0, 10884
2ª	Sb_1 Pb_9	— 205, 00	+ 0, 04315
3ª	Sb_1 Pb_{12}	— 264, 00	+ 0, 03224
4ª	Sb_1 Pb_{16}	— 313, 00	+ 0, 015412
5ª	Sb_1 Pb_{20}	— 359, 00	+ 0, 01984
	Pb	— 365, 3	+ 0, 02764

Da questo prospetto e dal confronto delle tabelle e delle formole si vedono verificarsi per queste leghe fatti simili a quelli che si hanno nelle altre specie; notando che qui i valori dei punti neutri vanno al di là di quello dell'Antimonio, e i valori delle tangenti invece al di là di quello del Piombo. Costruendo i diagrammi si vede chiaramente come essi vanno sempre più accostandosi alla retta del Piombo, la oltrepassano e, raggiunta una posizione massima, ritornano indietro.

Ho fatto pure due leghe di Stagno e Antimonio, delle quali riferisco i risultati:

COPPIA — [LEGA $(Sb_1\ Sn_{11})$-PAKFONG]				COPPIA — [LEGA $(Sb_{25}\ Sn_1)$-PAKFONG]			
t_1	t_2	E		t_1	t_2	E	
		osservato	calcolato			osservato	calcolato
51°, 6	18°, 4	218, 40	216, 58	48 , 0	18 , 0	878, 40	876, 08
74 , 6	18 , 6	378, 80	383, 83	64 , 4	18 , 4	1390, 30	1381, 90
98 , 2	19 , 0	573, 60	574, 45	86 , 3	18 , 6	2108, 20	2112, 00
115 , 3	19 , 4	720, 60	717, 88	103 , 4	18 , 9	2705, 20	2705, 51
132 , 0	19 , 6	870, 20	870, 28	124 , 8	20 , 2	3462, 60	3467, 80
149 , 5	20 , 0	1039, 60	1037, 70	151 , 0	20 , 6	4494, 80	4496, 50
$E = 0{,}03041\,(t_1 - t_2)\left(-178{,}9 - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$				$E = 0{,}10001\,(t_1 - t_2)\left(-259 - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$			

Ricordo che per lo Stagno, secondo Naccari e Bellati, si ha:

$$E = 0{,}048208\,(t_1 - t_2)\left(-181^\circ - \frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Queste poche formole dicono senz'altro, che abbiamo qui pure lo stesso andamento che per le serie antecedenti.

Si può ritenere con ragione che lo stesso fatto si verifichi anche per la leghe di Antimonio e Zinco; ne abbiamo una prova nelle leghe di Clamond e di Noè, nella prima delle quali i metalli si trovano nel rapporto dei rispettivi pesi atomici, e nella seconda, nel rapporto di 62 Sb a 36 Zn; queste leghe, come è noto, hanno un potere termoelettrico molto superiore a quello dell'Antimonio.

Ma un'altra prova più soddisfacente la porge il Becquerel (*), che ho studiate alcune di queste leghe fra 0^0 e 100^0 accoppiate con Rame; da tale studio risulta che le forze elettromotrici di queste leghe arrivano a oltrepassare quelle dell'Antimonio e vanno crescendo al crescere delle proporzioni dell'Antimonio stesso, raggiungono un massimo e prendono poi a diminuire.

(*) Becquerel, *Ann. de Chim. et Physique*, IV, T. VIII.

Tenendo conto soltanto del modo di comportarsi delle leghe entro i limiti delle esperienze da me eseguite, si riscontra un fatto che è comune a tutte le combinazioni studiate, e che si può enunciare così.

Per i due metalli d'una di quelle combinazioni e per le leghe relative, si traccino le curve che danno le forze elettromotrici in funzione delle temperature; le curve relative alle leghe non si distribuiscono nello spazio interposto fra le curve spettanti ai due metalli, in modo conforme alla composizione delle leghe stesse; ma s'accostano di preferenza e in modo notevole alla curva d'uno dei due metalli, e per certe proporzioni escono da quello spazio, passando al di là della curva spettante a quel metallo.

Questo fatto che era già noto per alcune combinazioni, secondo le mie esperienze, apparirebbe generale, ed io cercherò di porre in chiaro se esso sia tale, estendendo lo studio a leghe di diversa composizione.

E qui debbo rendere i più vivi ringraziamenti al Professore NACCARI, che nel compire questo studio mi fu sempre cortese di consigli, e lasciò a mia disposizione tutti gli strumenti che furono necessarii per le esperienze.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino,
20 Maggio 1884.

Tavola I

Diagrammi delle leghe di Antimonio e Bismuto

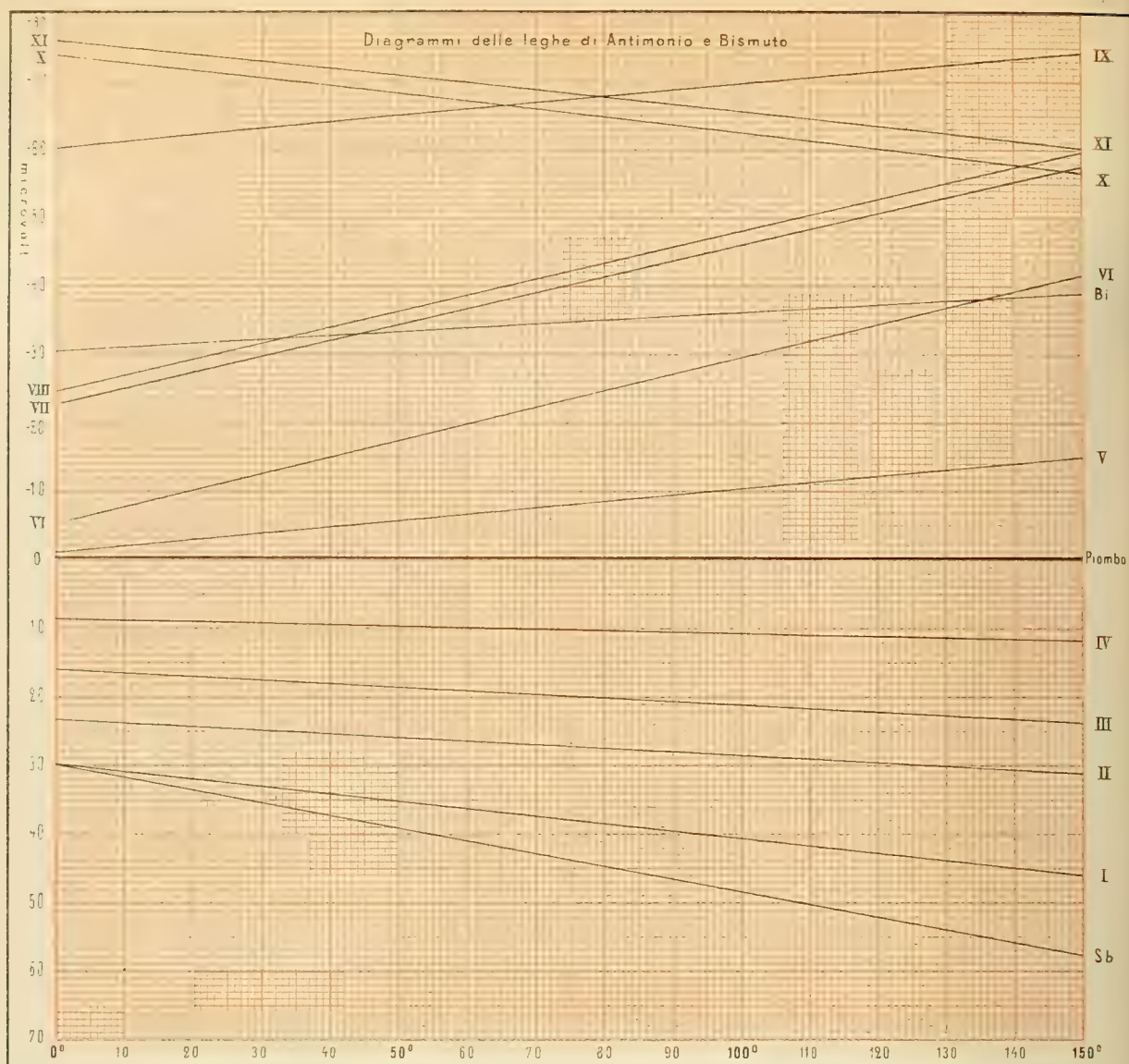
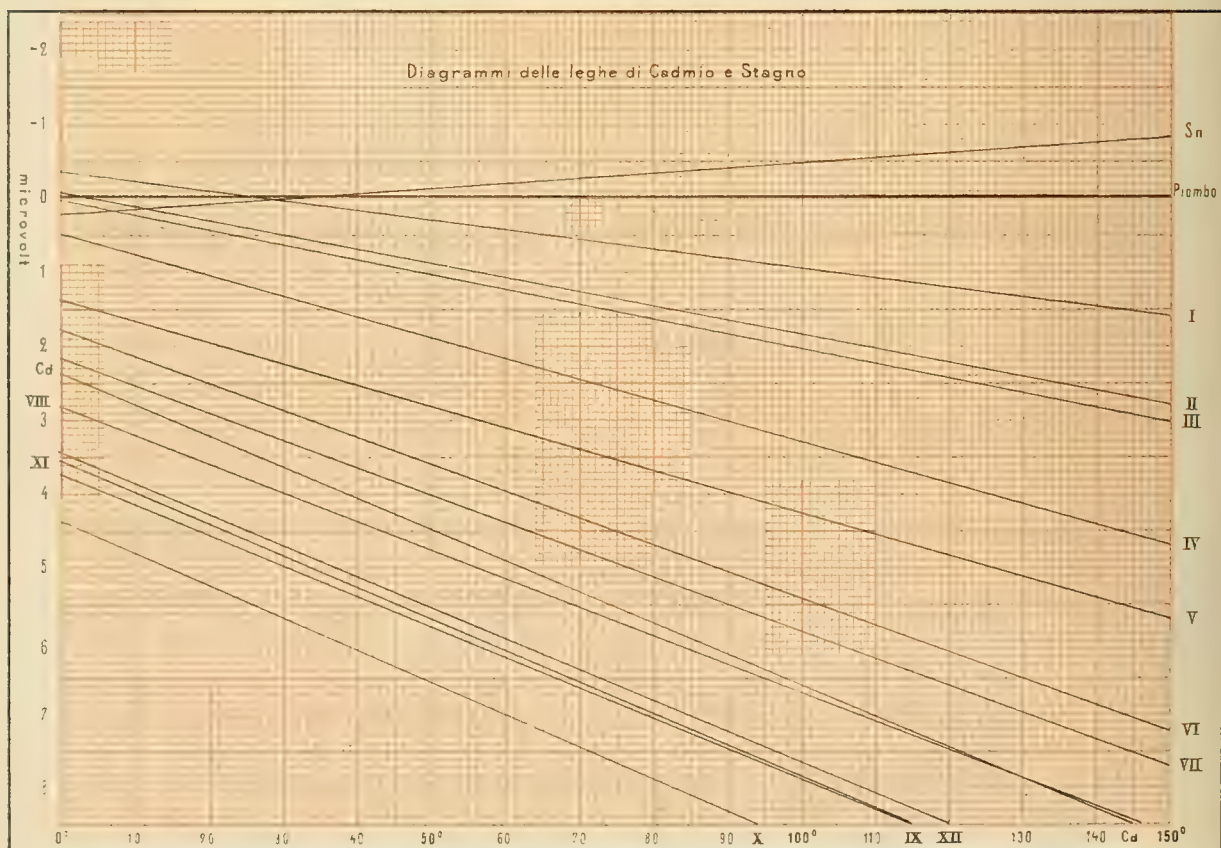
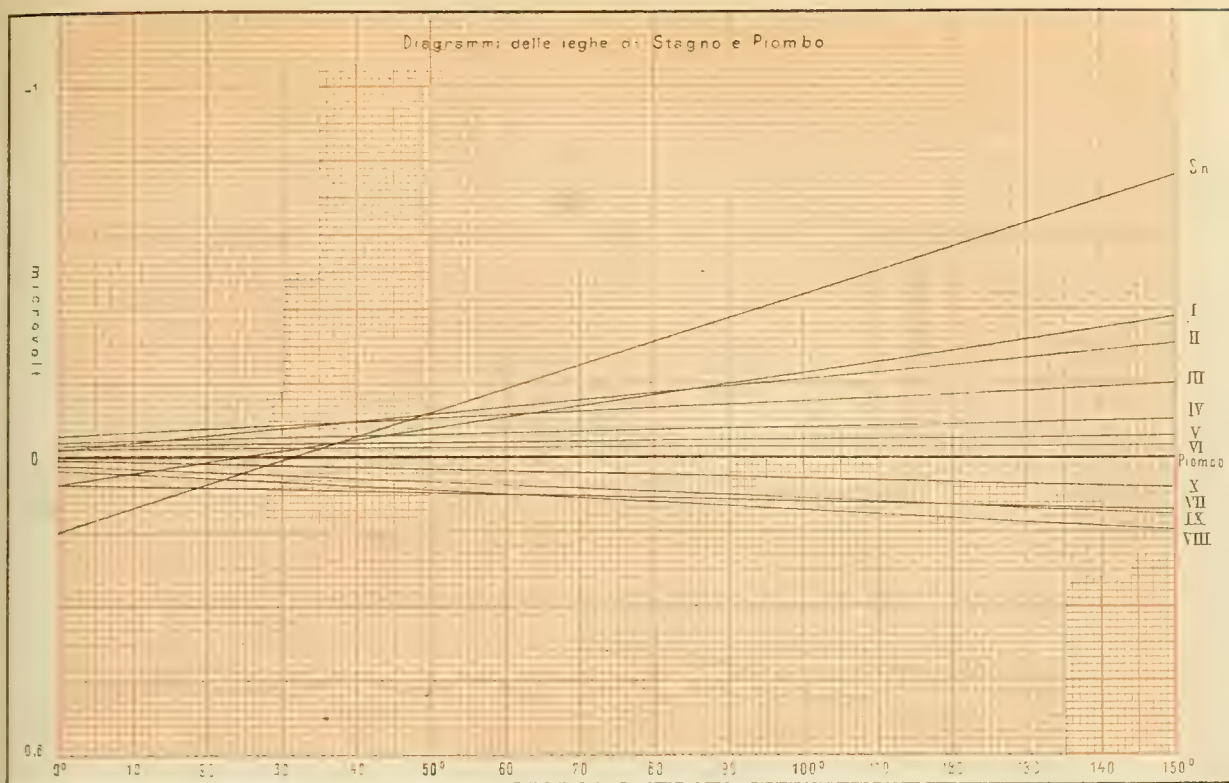
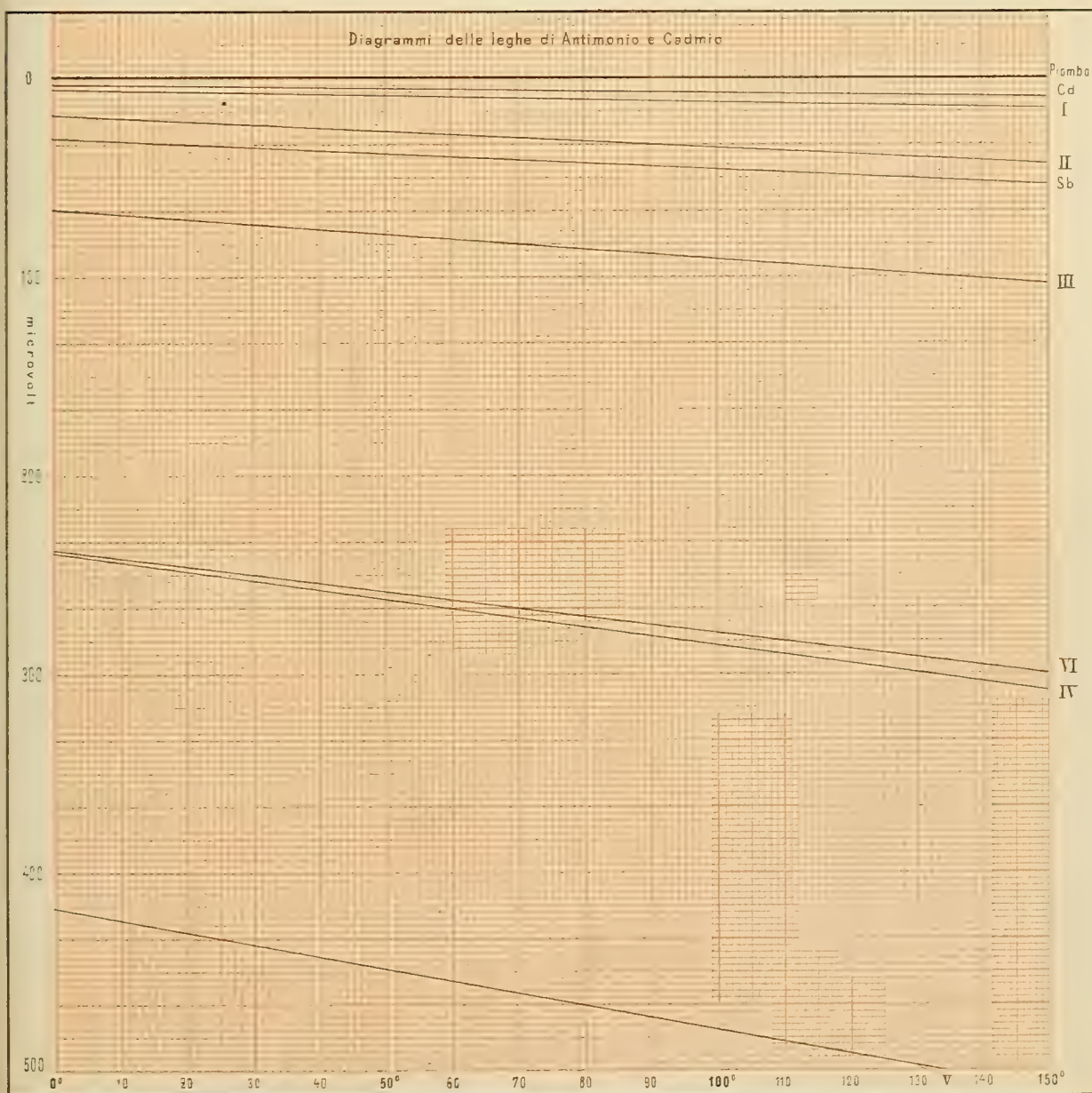



Tavola II

Tavola III

Tavola IV

Diagrammi delle leghe di Antimonio e Cadmio

microvolt

Piombo
Cd
I
II
Sb
III
VI
IV
V

ERRATA-CORRIGE

Pag. 202	*linea*	19	dall'alto:	invece di	*risultano*	leggasi	*risulta.*
» 204	»	15	dal basso:	»	*modo*	»	*metodo.*
» 214	»	ultima		»	s_e	»	s_l
» 220	Nell'ultimo determinante il 2° elemento della 3ª orizzontale dev'essere ecc.						
» 222	*linea*	10	dall'alto:	invece di	I^i_*	leggasi	I_{ik}.
» 233	»	12	dal basso	si cancellino le parole: *e sono ortogonali a una sfera fissa.*			
» 245	»	5	dall'alto				
» 234	»	ultima: si cancellino le parole: (*n.* 5, *nota*)					
» 256	»	15	dal basso: si cancelli la parola: *che*				
» 257	»	9	id.,	la formola (III) va scritta come segue:			

$$4\left\{a^2(a-x)^2+b^2(\beta-y)^2\right\}=\left\{\alpha^2+\beta^2-\rho^2-(x^2+y^2+z^2)^2\right\}$$

» 270	»	18	dall'alto:	invece di	*scisso*	leggasi	*scissa*
» »	»	21	id.	id.	*doppii*	»	*ciclici*
» 272	»	15	id.	id.	§ 3.	»	§ 4.
» 281	»	13	dal basso: si cancelli la parola *cioè*				
» 283	»	16	dall'alto: dopo la parola doppii si ponga ;				

SCIENZE

MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE.

ISCRIZIONI E RICERCHE NUOVE

INTORNO

ALL' ORDINAMENTO DELLE ARMATE

DELL' IMPERO ROMANO

DI

ERMANNO FERRERO

Approvata nell'adunanza del 4 Maggio 1884

PREFAZIONE.

Dopo la pubblicazione del mio lavoro intorno all'*ordinamento delle armate romane*, fatta sullo scorcio del 1878, alcune parziali ricerche e specialmente nuove iscrizioni vennero ad aumentare le notizie, che possediamo intorno a sì fatto argomento. Anzi tutto mi corre l'obbligo di rammentare l'accurata recensione, che del mio libro volle fare il professore Hermann Haupt, il quale, passando a benevola rassegna nella *Revue historique* di Parigi (1) la materia da me esposta, si soffermò a notare alcuni punti da me troppo brevemente trattati nella parte concernente l'età repubblicana. Di questa brevità io stesso era persuaso, allorchè licenziai alle stampe questo volume, nel quale premevami sopra tutto di studiare, col sussidio dei testi filologici ed epigrafici, l'ordinamento della romana marineria nell'età imperiale. E sin d'allora m'era proposto di ritornare sull' argomento per alcune questioni spettanti al periodo repubblicano, sulle quali spero in tempo non troppo lontano di

---

(1) Année V (1880), t. XIII, p. 158-164.

dare alla luce il risultamento di nuove mie indagini. Per quel che appartiene all'evo imperiale mi fu grato il giudizio appieno favorevole dell'erudito tedesco, tanto più prezioso in quanto frutto di una diligente disamina fatta da chi mostra accurata conoscenza della materia.

Lavori generali sull'ordinamento della romana marineria non apparvero in questi ultimi anni. Una chiara e diligente notizia sulle armate romane fu inserita nel 1882 dal signor Antonio Héron de Villefosse nel *Dictionnaire des antiquités grecques et romaines* del Daremberg e del Saglio (1). In questa sommaria notizia l'autore ebbe cura di avvertire i lettori di essersi giovato specialmente del manuale del Marquardt e del mio libro, mettendo però a profitto le nuove notizie, che potè raccogliere.

Come opera di valore scientifico, dalla quale sia fatta progredire la conoscenza di questa materia, non si può tenere quella, che nel medesimo anno 1882 il signor Francesco Corazzini pubblicò sulla storia della marineria militare dell'Italia antica (2); giacchè è da dolere che l'argomento bello e nobile sia stato trattato con insufficiente preparazione filologica ed archeologica.

La condizione dei classiarii fu studiata insieme con quella degli equiti singolari dal Mommsen (3), il quale in recentissimi lavori intorno alla coscrizione militare dell'impero ed alla patria de' soldati (4) trattò pure di questo soggetto in quanto concerne la milizia navale.

Un breve scritto sulla marineria militare al tempo dell'impero fu pubblicato dal vice ammiraglio Jurien de la Gravière nella *Revue des Deux mondes* (5), in cui l'illustre uomo di mare inserì altri suoi pregevoli

---

(1) *Classis, flotte romaine*, p. 1230-1236.

(2) *Storia della marina militare italiana antica*, Livorno, 1882.

(3) Nell'*Hermes*, XVI, 1881, p. 463 e segg.

(4) *Militum provincialium patriae*, nella *Ephemeris epigraphica*, V, p. 159 e segg.; *Die Conscriptionsordnung der römischen Kaiserzeit*, nell'*Hermes*, XIX, 1884, p. 1-79, 210-234.

(5) *La marine de l'empire et les flottilles des Goths*, nel quaderno del 15 febbraio 1884.

Sebbene in queste mie ricerche sull'ordinamento delle armate, non sia mio obbligo occuparmi delle quistioni attinenti alla costruzione delle navi, non debbo però dimenticare d'accennare gli studii del nostro contro ammiraglio Fincati sulla posizione dei remiganti nelle polieri, i quali, sebbene si rivolgano specialmente alle navi delle repubbliche marittime italiane, giovano però a rischiarare la controversa quistione rispetto alle polieri dell'antichità, soggetto di ricerche e di esperienze

studii sulla storia della antica marineria. Ma in questo nuovo scritto si tace affatto dell'ordinamento navale, e non vi si trova se non una rapida rassegna delle spedizioni marittime dell'età imperiale, fatta senza scopo di ricerca erudita.

La suppellettile epigrafica si è alquanto accresciuta in questi ultimi anni. Del *Corpus inscriptionum Latinarum* sono usciti nuovi volumi. Pochissime epigrafi nuove o a me sconosciute mi furono date sì dal volume ottavo, comparso nel 1881, contenente le iscrizioni dell'Africa romana, raccolte dal Wilmanns e, dopo la morte immatura dell'autore, pubblicate dal Mommsen, come dalla seconda parte del volume sesto (iscrizioni di Roma) uscita nel 1882. Nell'anno passato vennero alla luce i volumi nono e decimo, comprendenti, notevolmente aumentata, la silloge epigrafica dell'Italia inferiore pubblicata dal Mommsen nel 1852, con l'aggiunta di quella delle isole italiane. Due sole iscrizioni nuove mi sono state fornite dal volume nono, in cui si contengono le lapidi della Calabria, dell'Apulia, del Sannio, del paese de' Sabini e del Piceno. Al contrario, non pochi nuovi testi epigrafici ho raccolto nel volume decimo, in cui sono comprese le iscrizioni de' Bruzzii, della Lucania, della Campania e delle isole e quindi i marmi classiarii provenienti dalle vicinanze di Miseno, i quali vanno sempre aumentando di numero.

In periodici archeologici ed in qualche altra opera ho trovato pure parecchi nuovi testi epigrafici concernenti le armate dell'impero, alcuni dei quali furono già soggetto di particolari mie osservazioni (1). In tutto raccolsi un centocinquanta nuove iscrizioni. M'è parso di far cosa non inutile ai benevoli lettori del mio libro nel riunire queste epigrafi e nel porgerle accompagnate dalle osservazioni e deduzioni, che da esse si possono

---

(V. *Le triremi*, 2ª ed., Roma, 1881). Dello stesso autore è da vedere lo scritto: *La pugna navale antica* (*Rivista marittima*, anno XII, 1879, p. 5-33; utile per la conoscenza della tattica navale dell'antichità.

(1) *Sulle iscrizioni classiarie dell'Africa* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, XVII, 1881-82, p. 88-93); *Inscriptions de l'Afrique relatives à la flotte* (*Bull. épigr. de la Gaule*, II, 1882, p. 157-162), *Intorno ad una iscrizione classiaria scoperta a Castelvolturno* (*Atti dell'Acc. delle Scienze*, XVII, p. 379-382); *Intorno ad un nuovo diploma militare romano* (*Ibid.*, XVIII, 1882-83, p. 353-356); *La marine militaire de l'Afrique romaine* (*Bulletin trimestriel des antiquités africaines*, III, 1884, p. 157-181).

fare scaturire intorno a questo argomento, sul quale scarse sono sempre le notizie, che si posseggono, e v'è solo da sperarne maggiori da nuove e più importanti scoperte epigrafiche.

Avrei desiderato aggiungere testi inediti. Non mi fu dato trovarne, salvo uno, che debbo alla gentilezza del mio amico, il professore Ettore Pais, il quale m'assicurò che nelle sue ricerche nell'Italia superiore per compilare il supplemento al volume quinto del *Corpus* niun altro marmo classiario era stato da lui veduto. Uguale assicurazione mi fece il cortese professore Giulio de Petra, al quale mi rivolsi per sapere se inedite iscrizioni dell'armata fossero entrate nel museo nazionale di Napoli da lui diretto (1). Altri cortesi mi diedero desiderate notizie circa questa o quella lapide. Fra i quali con animo commosso ricordo i miei due ottimi e cari amici, il signor Florian Vallentin ed il P. D. Luigi Bruzza, la cui perdita è pianta dalla scienza, è pianta da coloro, che poterono apprezzare come essi, in mezzo agli studii, sapevano coltivare durevolmente l'amicizia.

Torino, 7 di aprile 1884.

ERMANNO FERRERO.

---

(1) Debbo al chiaro epigrafista spagnuolo, don Manuel Rodriguez de Berlanga, il quale ne interrogò la Reale Accademia di Storia di Madrid, la notizia che niuna nuova iscrizione classiaria fu trovata in Ispagna.

INDICE

INDICI DELLE ISCRIZIONI

Altre armate, oltre a quelle, di cui ho dato lo specchio nel mio libro, non ci furono fatte conoscere dalle nuove iscrizioni. Debbo però aggiungere che da un passo di Strabone si può supporre che sin dal tempo di Augusto esistesse un' armatetta sul lago Brigantino, ora di Costanza (1), dalla quale abbia tratto origine il *numerus barcariorum*, il cui prefetto nel quinto secolo risiedeva a *Confluentes* (Coblenz nel cantone di Argovia) ovvero a *Bregantia* (*Brigantium*, Bregenz nel Tirolo austriaco), siccome ci è fatto conoscere dalla *Notitia dignitatum* (2). Dell'esistenza di un'armata nella Spagna citeriore non basta a persuadermi l'epigrafe tarragonese posta al console Tiberio Claudio Candido, legato *pro praetore* di questa provincia *et in ea duci terra marique adversus rebelles h(omines) h(ostes) p(opuli) R(omani)* (3), nella quale si accenna o alle incursioni de' Mauri contro questa provincia, al tempo di Marco Aurelio (4), ovvero alle reliquie della fazione di Clodio Albino, vinta da Settimio Severo (5). Il comando straordinario di Candido si può spiegare benissimo senza ammettere l'esistenza di una speciale armata sulle coste ispaniche, e si può credere con le terrestri si unissero forze navali, raccolte altrove, sotto gli ordini del legato della Spagna citeriore. Nè troppo sicura mi pare la *cohors nautarum* menzionata in epigrafi di Nizza ora perite (6).

Accrescerò all'opposto le milizie navali dei due imperi al principio del secolo V. Appartenevano, senza dubbio, a frazioni dell'antica *classis Moesica*, insieme con le altre piccole armate dell'impero d'Oriente, stanziate sul Basso Danubio, i *milites tertii nauclarii*, posti ad Appiaria (forse presso Rusciuk), e i *milites nauclarii Altinenses* ad Altino (Altenova nella Dobruscia, secondo il Böcking (7)), i quali trovavansi sotto il duca della Mesia seconda (8), e i *milites nauclarii* a Flaviana (luogo sconosciuto) stanti sotto il duca della Scizia (9).

(1) ἔχει δὲ (ἡ λίμνη) καὶ νῆσον, ᾗ ἐχρήσατο ὁρμητηρίῳ Τιβέριος ναυμαχῶν πρὸς Οὐινδελικούς. (VII, I, 5). Cf. Dione Cassio, LIV, 22.

(2) Vedi *Armate*, p. 185.

(3) *C. I. L.*, II, n. 4114.

(4) Capitolino, *M. Antoninus*, 21.

(5) Cf. Wilmanns, *Exempla inscr.*, n. 1201; Schiller, *Geschichte der römischen Kaiserzeit*, t. I, Gotha, 1883, p. 717.

(6) Le iscrizioni, in cui compare tale coorte, sono tutte di Nizza (*C. I. L.*, V, n. 7884, 7887, 7888, 7892), e si conoscono solo perchè conservate dal Gioffredo. Nota l' Henzen: « rem plane singularem « caveas ne temere pro certa accipias. Quamquam male potius descriptos quam confictos titulos di- « xerim. » (In Orelli, III, ad n. 3620).

(7) *Not.*, Or., p. 467.

(8) *Not.*, Or., XL, 22, 28,

(9) *Not.*, Or., XXXIX, 20.

Pensa il Böcking (1) che alla milizia navale appartenessero altresì i *milites exploratores*, *superventores*, *supervenientes*, *praeventores*, *directores*, menzionati dalla *Notitia*, a cagione dei luoghi loro assegnati da tale documento (2). La congettura del dottissimo illustratore della *Notitia* può essere probabile, ma nulla v'ha che persuada ad accettarla, anzi dal ricordo, che Vegezio fa degli *exploratores* (3), e da quello, che Ammiano Marcellino fa de' *superventores* e de' *praeventores* (4), non si può in alcun modo dedurre che si tratti di militi navali piuttosto che di terrestri.

Neppure è certo, come crede l'Haupt (5), che alla marineria appartengano la coorte prima Flavia Sapaudica, stanziata a Calarona (probabilmente Carens sul lago di Ginevra), e la coorte Novempopulana, stanziata a Lapurdo (Baiona), perchè i loro tribuni sono enumerati nella *Notitia* insieme coi comandanti delle armatette dell'Italia e delle Gallie nella lista delle *praepositurae magistri militum praesentalis a parte peditum* (6).

Crede il Mommsen (7) che al principio dell'età imperiale le armate non avessero ancora ricevuto un ordinamento veramente militare, tanto le ciurme quanto i capitani fossero schiavi e liberti imperiali, e probabilmente da Claudio l'armata sia stata per la prima volta ordinata in modo militare. Che agl'inizii dell'impero schiavi appartenenti alla *familia imperatoris* siano stati comandanti di nave ci è insegnato da parecchie epigrafi comprese in questo supplemento (8). Che liberti imperiali abbiano

---

(1) *Not.*, Or., p. 447.

(2) Nell'impero orientale trovavansi sotto il duca della Mesia prima il *praefectus militum exploratorum*, *Novis*, il *praefectus militum exploratorum*, *Taliatae* (forse Milanovatz nella Serbia) ed il *praefectus militum exploratorum*, *Zmirnae* (Or., XLI, 34, 35, 37); sotto il duca della Dacia Ripense il *praefectus militum exploratorum*, *Transdiernis* (Vecchia Orsova) (XLII, 29); sotto quello della seconda Mesia i *milites praeventores*, *Ansamo* (luogo così chiamato dal fiume di ugual nome affluente del Danubio, ora Osma nella Bulgaria) (XL, 22); sotto quello della Scizia i *milites superventores*, *Axiupoli* (forse presso Rossova nella Dobruscia) (XXXIX, 21).

Nell'impero d'Occidente sotto il *comes litoris Saxonici per Britanniam* sta il *praepositus numeri exploratorum*, *Portum Adurni* (alla foce del fiume Adur, contea di Sussex) (Occ., XXXVIII, 21); sotto il *dux Britanniarum* si trovano il *praefectus numeri exploratorum*, *Lavatris* (Boves nel North Riding, Yorkshire), il *praefectus numeri directorum*, *Verteris* (Brough nella contea di Westmoreland), il *praefectus numeri supervenientium Petueriensium*, *Derventione* (probabilmente luogo sulla Derwent nell'East Riding, Yorkshire) (XL, 25, 26, 31); sotto il *dux tractus Armoricani*, il *praefectus militum superventorum*, *Mannatias* (cioè *Namnetes*, *civitas Namnetum*, Nantes) (XXXVII, 18).

(3) III, 6.

(4) XVIII, 9, a proposito dell'assedio di Amida nel 359, a difendere la quale concorsero sei legioni ed altre milizie « et superventores atque praeventores ».

(5) *Rev. hist.*, XIII, p. 162.

(6) « In provincia [Gallia] Riparensi:............ Tribunus cohortis primae Flaviae Sapaudicae, « Calaronae.

« In provincia Novempopulana: Tribunus cohortis Novempopulanae, Lapurdo ». (Occ., XLII, 17-19).

(7) *Hermes*, XVI, 1881, pag. 463 e segg.

(8) *Malchio Caesaris trierarchus* (Brindisi, n. 721); *Anthus Caesaris trierarchus Livianus* (Fréjus, n. 703); *Helios Caesaris trierarchus* (Roma, n. 720); *Caspius trierarchus Ti. Caesaris* (Roma, n. 719). I tre primi possono essere schiavi di Ottaviano non ancora chiamato col nome di Augusto, epperò anteriori al 27 av. C. L'ultimo è uno schiavo di Tiberio.

avuto sì fatto ufficio noi possiamo provare non solo per i tempi di Augusto e di Tiberio, ma altresì per quelli di Claudio e di Nerone ed anche di Domiziano (1), il che d'altra parte concorda con quanto ho osservato circa il comando delle armate affidato, sotto Claudio e i suoi primi successori, a liberti imperiali, come già erasi praticato da Sesto Pompeo e da Ottaviano, durante le guerre civili (2). Ma che le ciurme fossero tratte esclusivamente dalla *familia imperatoris* è cosa, che da niun documento ci è attestato, e per cui si può solo fare una supposizione. Neppure possiamo con sicurezza affermare che l'armata mancasse negl'inizii dell'impero di un ordinamento militare ed abbia avuto questo soltanto da Claudio. Il diploma di questo imperatore portante la data del 52, a mio avviso, può in parte contraddire a ciò. Da questo diploma (3) la cittadinanza appare concessa *trierarchis et remigibus qui militaverunt in classe quae est Miseni et sunt dimissi honesta missione*. Il diploma poi appartiene ad un Besso designato come *gregalis*. Dunque la legge di concessione della romana cittadinanza era fatta in favore di peregrini, uomini liberi, epperò non ischiavi e neppure liberti imperiali. Nel primo caso mal s'accorderebbe con la condizione servile l'indicazione del militare servizio; nel secondo la concessione della cittadinanza. Per questo rispetto il diploma concorda pienamente con gli altri posteriori, che possediamo, appartenenti all'armata. Le voci poi *militaverunt* e *gregalis* accennano ad un proprio e vero servigio militare; onde possiamo affermare che nel 52 l'armata di Miseno era composta, tanto ne' comandanti di nave, quanto negli uomini delle ciurme (designati col vocabolo di *remiges*, sul cui valore altra volta ho discorso (4)), di peregrini, il cui servigio era tenuto come servigio militare. Ma notiamo ancora che dopo *militaverunt* sta scritto *et sunt dimissi honesta missione*. Dunque gli anni di servigio di questi *trierarchi* e *remiges* erano compiuti. Quanti erano questi anni? Il diploma nol dice; non si fa però troppo ardita supposizione nel pensare che fossero ventisei, come vediamo indicati, diciannove anni dopo, nei due diplomi di Vespasiano in favore dei veterani dell'armata misenense e della ravennate, *qui sena et vicena stipendia aut plura meruerunt* (5). Se dall'anno 52 togliamo ventisei, siamo condotti all'anno 26, duodecimo dell'impero di Tiberio, nel qual anno possiamo conchiudere il servizio navale già essere tenuto come servizio militare e a questo essere chiamati peregrini.

Conveniamo poi col Mommsen nell'ammettere che soltanto dal tempo circa di Adriano in poi le iscrizioni ci consentono di formarci una più esatta idea della costituzione della romana marineria.

---

(1) Può essere liberto di Ottaviano o di qualcuno de' principi della famiglia augustea, che portarono il nome di Caio Giulio Cesare, *C. Iulius Caesaris l. Automatus trierarchus* (Miseno, n. 590). Liberto di Tiberio è *Ti. Iulius Aug. l. Hilarus navarchus Tiberianus* (Roma, n. 717); di Tiberio e Livia: *Ti. Iulius Aug(usti) et Aug(ustae) l. Diogenes trierarchus* (Miseno, n. 41); di Claudio o Nerone: *Ti. Claudius Aug. l. Seleucus trierarchus* (dell'armata britannica, Boulogne, n. 507); *Ti. Claudius Aug. l. Eros trierarchus..... exactus classis Augustae Alexandrinae* (Scerscel, n. 705); Τι. Κλαύδιος Σεβαστοῦ ἀπελεύθερος Ζῆνα τριήραρχος κλάσσης Περινθίας (ossia del Ponto, dell'età di Domiziano; Perinto, n. 498).

(2) *Armate*, p. 32. Agli esempii quivi citati si aggiunga quello di un sottoprefetto dell'armata di Alessandria dopo Claudio, il quale era liberto di Tiberio, fattoci conoscere dal marmo n. 704.

(3) N. 23.

(4) *Armate*, p. 40 e segg.

(5) N. 29, 368.

Nel mio libro ho dato (1) uno specchio della patria de' classiarii, quale risulta dalle epigrafi, dividendoli fra le armate. Da questo specchio si è tosto potuto vedere come i soldati per questa o per quell'armata non si levavano in provincie determinate, ma come una medesima regione dava uomini ad armate diverse.

Qui ripeto questa tavola, con le aggiunte forniteci dalle nuove iscrizioni e con le correzioni recate da alcune lezioni più esatte di marmi misenensi riprodotti nel volume X del *Corpus*. Ho mutato altresì l'ordine di questa tavola, distribuendo i numeri delle iscrizioni secondo le provincie; in ciascuna poi ho tenuto la divisione delle armate (2).

SARDINIA . . . . *Sardus*. M., 114 a, 124, 181, 201, 267, 279, 296, 305, 312, 314, 323, 613, 672, 674, 687. — R., 475, 481, 491. — Cl. inc., 577, 579.
Fifensis ex Sardinia. M., 26.

CORSICA . . . . *Corsus*. M., 202, 657. — R., 479. — Cl. inc., 578.
Cursicanus. R., 463.
Corsus Vinacenus. M., 202.
Opinus ex Corsica. Cl. inc., 581.

GERMANIA . . . . *Germanus*. M., 243. — R., 470.

ALPES . . . . *Camunnus*. R., 426.

ITALIA . . . . *Italicus*. M., 109, 664, 677. — R., 442.
Italus. R., 442.
Domo Ateste. R., 371.
Formianus. M., 48.
Italicus domo Miseno. M., 28.
Verna Misenas. M., 81.
Misenensis. M., 599.
Italus domo Nola. M., 85.
Verna Ostensis. M., 331.
Verna (Miseni). M., 321. — (Ravennae). R., 392, 406.

PANNONIA . . . . *Pannonius*. M., 210, 217, 268, 307bis, 315, 353, 612. — R., 369, 376, 419, 425, 445, 449, 467. — Cl. Brit., 511.
Pannonius domo Flavia Sirmio. M., 55.

DALMATIA . . . . *Dalmata* seu *Delmata*. M., 86, 185, 212, 213, 215, 260, 286, 646, 690. — R., 375, 396, 399, 408, 413, 427, 434, 437bis, 446, 447, 454, 456, 459, 462, 471, 488, 702. — Cl. inc., 569.
Delmata Castri Planae. R., 393.
Desidias. *C. I. L.*, III, *priv.* VI (3).

(1) Pag. 42.
(2) *M* indica l'armata di Miseno, *R* quella di Ravenna.
(3) Alla legione II adiutrice, formata con soldati tratti dalla marineria, appartiene il milite, di cui è il diploma di Vespasiano del 70.

DALMATIA . . . . *Ditio.* Cl. inc., 570.
Liburnus Varvarinus. R., 407.
Maezeius. R., 368.

MOESIA . . . . *Musiaticus.* M., 316.

THRACIA . . . . *Bessus.* M., 23, 53*b*, 54, 56, 106, 159, 177, 190, 195, 196, 208, 211, 219, 251, 270, 290, 295, 302, 320, 328, 332, 337, 338, 340, 341, 344, 349, 658, 662, 670, 675, 676, 689. — R., 384, 414, 440, 452, 468, 474.

ACHAIA . . . . *Graecus* (1). M., 183, 188, 262, 278 (?), 319, 330, 347. R., 441.
Actiacus Nicopolitanus. M., 424.

ASIA . . . . *Asianus.* M., 143. 654.
Phryx. M., 653.
Phrygius Laudicenus. *C. I. L.*, III, *priv.* IV (2).

PONTUS ET BITHYNIA. *Bithynus.* M., 242, 254, 647, 671. — R., 448.
Bithynus civitate Plusiada (*Prusiade*). R., 433.
Nicaensis. M., 102, 117, 125. — R., 701 (?).
Ponticus. M., 76, 95, 116, 153, 231, 345. — R., 700 (?).

CAPPADOCIA etc. . . . *Cappadox.* M., 150.
Gnigissus ex civitate Coropisso vico Asseridi (Lycaoniae). Cl. inc., 723.

LYCIA ET PAMPHYLIA. *Pamphylus.* M., 617.

CILICIA . . . . *Cilix.* M., 53*a*, 69, 74, 115, 165, 198, 227, 265, 274, 291, 325, 346, 356, 673, 678. — R., 480. — Cl. inc., 578.

SYRIA . . . . *Syrus s. Surus.* M., 58*b*, 103, 110, 121, 234, 326, 329, 606, 679. — R., 382, 402, 412, 421, 422, 438. — Cl. inc., 727, *C. I. L.*, III, *priv.* V (3).
Surus Garasenus. M., 24.
Surus . . . . . enus. Cl. Brit., 510.
Aradeus. R., 430.
Seleuciensis. M., 123.

ARABIA . . . . *Syrus natione Arabus.* M., 187.

AEGYPTUS . . . . *Aegyptius.* M., 82, 93, 100, 112, 134, 151, 154, 170, 173, 174, 221, 228, 229, 237, 248, 250, 261, 280, 284, 287, 310, 336, 609, 634, 656, 665. — R., 404, 431, 461, 486, 493.
Aegyptius Lycopolites. M., 603,

---

(1) *Graecus* non significa già oriundo della Grecia propriamente detta od Acaia, ma di qualsivoglia provincia greca.

(2) Diploma di Galba (68) spettante ad un soldato della legione I adiutrice, già classiario.

(3) Diploma di Galba (68) ad un milite della I adiutrice.

AEGYPTUS	*Alexandrinus.* M., 73, 120, 130, 152, 158, 175, 178, 179, 205, 226, 281, 288, 334, 633, 638, 642, 663. — R., 432. — Cl. Germ., 530. — Cl. inc., 363.
	Coptita. Cl. Alex., 494.
CRETA ET CYRENAICA.	*Axo natione Graecus* (Oaxi Cretae oppidi?). Cl. inc., 573.
	Cyrenensis. M., 239.
	Libycus seu *Libucus.* M., 317. — R. 400, 416, 485.
	Paraetonius. Cl. inc., 556.
AFRICA.	*Afer.* M., 63, 180, 224, 306, 311, 350, 357 (?), 618, 684. — Cl. inc., 555.
	Afer Bizacinus. Cl. Brit., 706.
INCERTA	*Agradiensis.* M., 223. — R., 460.
	Vibiensis. M., 604.

Una doppia specie di osservazioni noi possiamo fare, osservando questa tavola, cioè sul modo, con cui la patria è indicata nei titoli de' classiarii, e sulle regioni, donde questi soldati provenivano.

Circa il modo di designare la patria, il più ovvio nelle epigrafi sepolcrali era l'indicazione delle provincie col solo aggettivo etnico, ovvero con questo preceduto da *natione* (1); quindi *Sardus*, *Corsus*, *Pannonius*, ecc. Tale regola vale per i nativi delle provincie di Sardegna, Corsica, Germania, Pannonia, Dalmazia, Mesia, Ponto, Cappadocia, Panfilia, Cilicia, Africa. Rara è la menzione della città. Così non abbiamo se non un Pannonio, il quale col nome della provincia congiunge quello della patria Sirmio; un Dalmata, che indica pure il castro Plana, in cui avea sortito i natali; un Africano, che si designa Afro Bizacino o dalla città di *Byzacium* o dalla regione dell'Africa Bizacene; finalmente due Dalmati, che, omesso il nome generico del loro popolo, si appellano l'uno Liburno Varvarino dalla città di Liburnia Varvaria, l'altro accennando il nome della patria *Ditio.* Gli originarii della Tracia indicano il popolo de' Bessi, a cui appartengono, giammai la provincia: forse il vocabolo Besso può qui avere un senso più esteso e comprendere in generale i nativi di tutta la Tracia (2). Un analogo esempio ci è offerto da un Licaonio, il quale, ponendo un epitafio a sua moglie, ne indica la gente (finora sconosciuta) de' Gnigissi, ed aggiunge ancora la menzione della città di Coropisso e del vico, a cui ella apparteneva, notando ch'egli era *ex eadem civitate et vico* (3). I nativi delle provincie greche s'appellano *Graeci:* è da notare che con questo nome non s'indicano solo gli oriundi della Grecia propria od Acaia, come dicevano i Romani. Un nativo di Nicopoli d'Epiro si chiama Azziaco

---

(1) Cf. *Armate*, p. 42, nota 3.

(2) Il Mommsen (*Hermes*, XVI, 1881, p. 455, nota 2; XIX, 1884, p 33 e seg.) crede che la voce *Bessus* indichi non solo chi apparteneva a questo popolo della Tracia, ma in generale tutti i nativi della Tracia e della Dardania, osservando come, in epigrafi di equiti singolari, cittadini di Apri e di Scupi, città che non erano dei Bessi propriamente detti, sian detti Bessi (*C. I. L.*, VI, 3177, 3205). V'è però da notare la formola *natione Thrax*, che occorre in titoli militari.

(3) N. 723. L'iscrizione, scoperta a Terracina, appartiene ad un *nauphylax*, che potrebbe anche non essere della marineria militare. Terracina non era porto militare: però presso gli antichi non esisteva tutta la differenza, che è presso i moderni fra i porti militari e i mercantili (La Blanchère, nella *Rev. arch.* 3ª s., 1884, III, p. 139).

Nicopolitano. Quelli della provincia d'Asia esprimono la loro provenienza o col nome generico della provincia o con quello della regione speciale: cosicchè insieme con due esempii di Asiani abbiamo uno di un Frigio. Parecchi esempii troviamo di Bitini; alcuni pure, che indicano solo la città di Nicea; unico il Bitino di Prusiade. Frequenti sono quelli, che indicano la patria Siria, talora ricordando solo il nome della città, cosicchè troviamo un Aradeo ed un Seleuciese. Assai numerosi sono coloro, che si chiamano Egizii; numerosi sono pure gli Alessandrini; unico è il nativo di Licopoli, che insieme col nome generico di Egizio enuncia quello della città.

È dubbio assai se il classiario, che al suo nome aggiunse le voci *Axo natione Graecus*, fosse un Cretese nativo di *Oaxus*. Fra gli originarii della Cirenaica abbiamo un Cirenese ed un Paretonio: di questa provincia, non dell'Africa propriamente detta, reputo siano oriundi i Libici, che appaiono in alcune poche iscrizioni.

Gli originarii dell'Italia erano indigeni della regione, in cui stava ordinariamente stanziata l'armata, e convien supporre fossero figliuoli de' soldati in guarnigione nei porti della penisola. Essi o chiamansi *Italici*, ovvero indicano con maggior precisione il luogo della nascita (per esempio *natione Formianus*, *natione Misenensis*, *natione Italus domo Nola*), premettendovi anche la voce *verna* (*verna Misenensis*, *verna Ostensis*), o dicendo *verna* senz'altro, dovendosi intendere del luogo, in cui la lapide fu diseppellita. Del Nolano e del Formiano riparlerò più innanzi. Si ricordi poi ancora la presenza di un alpigiano del paese dei Camunni fra i militi dell'armata di Ravenna.

Nei documenti ufficiali (tali sono per il nostro argomento gli estratti delle leggi di privilegio concesse ai militi, ossia i così detti diplomi militari) la menzione della patria è fatta con maggiore specificazione. Così noi abbiamo in un diploma (1) un Siro Garaseno, in un altro un Corso Vinaceno (2), in un terzo un *Fifensis ex Sardinia* (3), in un quarto un Italico *domo Miseno* (4), in un quinto un Dalmata, che è chiamato col nome del popolo de' Mezei (5), in un sesto un Coptita (6) e finalmente in un settimo un *Opinus ex Corsica* (7). Abbiamo però semplicemente in diplomi un Besso (8) ed un Pannonio (9).

Se poi ricerchiamo la provenienza de' classiarii dalle singole regioni dell'impero troveremo che alcune provincie ne forniscono un numero maggiore, altre un numero più ristretto, finalmente alcune provincie mancano affatto. Lasciamo stare l'Italia, i cui figli menzionati nelle lapidi dell'armata sono, come abbiamo notato, per l'ordinario nati dai soldati di mare di stanza nei porti militari di questo paese, o, come diremo appresso, appartengono ad età più recente; lasciamo stare pure la Grecia, per il valore troppo generico della parola *Graecus*, come abbiamo osservato; e con le rimanenti lapidi potremo avere la seguente proporzione:

---

(1) N. 24.
(2) N. 25.
(3) N. 26.
(4) N. 28.
(5) N. 368.
(6) N. 494.
(7) N. 781.
(8) N. 23.
(9) N. 369.

Classiarii originarii di	Egitto	53
»	Tracia	39
»	Dalmazia	32
»	Sardegna	21
»	Siria	21
»	Ponto e Bitinia	17
»	Cilicia	17
»	Pannonia	16
»	Africa	11
»	Corsica	7
»	Creta e Cirenaica	7
»	Asia	4
»	Cappadocia e Licaonia	2
»	Germania	2
»	Alpi	1
»	Mesia	1
»	Licia e Panfilia	1
»	Arabia	1.

Trarre conseguenze assolute dalla mancanza di certe provincie nell'elenco di quelle, che diedero uomini alle armate, e dal maggiore o minor numero di classiarii di questa o quella provincia, che ci sono fatti conoscere dalle epigrafi, sarebbe cosa assurda, siccome già ho notato nel mio libro (1). Tuttavia la persistenza della mancanza di certe provincie, come le ispaniche, le galliche, la Britannia, già da me segnalata, e la quale dura nella centuria e mezza di nuove lapidi classiarie, qui riunita, sempre più deve farci tendere a cangiare in affermazione il forte dubbio che non si traessero militi per l'armata da queste provincie, nelle quali, come ho osservato, si levavano coorti ed ale ausiliarie. Assai presto Gallia e Spagna ebbero la romana cittadinanza: le tre Gallie già n'erano in possesso sotto Claudio; la Spagna è verosimile l'ottenesse da Adriano: per ciò i nativi di queste provincie, godenti della cittadinanza, non venivano a militare nell'armata, ove, come si dirà appresso, assai tardi compaiono i cittadini romani. Fra le provincie, che non fornirono uomini all'armata, annovera il Mommsen altresì l'Acaia, la Macedonia, Cipro (2) e Creta. A quest'ultima, come fu veduto, può forse appartenere un milite di mare; quanto alle due prime (oltre all'Azziaco Nicopolitano sovra citato) nulla ci vieta di assegnare ad esse qualcuno dei *Graeci*, anche essendo certi che questo vocabolo ha un significato esteso oltre ai limiti della Grecia propria.

Che le provincie imperiali fornissero in massima parte gli uomini all'armata è ciò, che bene osservò il Mommsen nei notevoli e sagaci suoi studii sulla coscrizione

---

(1) P. 45.

(2) Nel mio libro indicai questa isola fra le regioni, che diedero uomini alla marineria. Se non che la lapide n. 154, con *natione Cypr.*, pubblicata dal Mommsen (*I. R. N.*, n. 2748) e dal Garrucci (*Cl. pr. Mis.*, n. 54) sulla fede del Vignoli e del Gori, esiste a Londra, fu riletta per il *Corpus* (X, n. 3516) e vi si trova *nation. Aegypt.*

nell'impero romano (1). Provincie imperiali erano la Pannonia e la Dalmazia, per le quali ripeterò quanto pure ho già notato che, al tempo di Vitellio, Tacito afferma l'armata ravennate essere stata in gran parte composta di indigeni di questi paesi (2); imperiali erano la Mesia, la Tracia, la Cappadocia, la Licia e Panfilia, la Cilicia, la Siria, l'Arabia, l'Egitto. Senatoria fu la provincia di Ponto e Bitinia, ma, imperante Traiano, diventò imperiale. La Sardegna, assegnata al senato nella ripartizione delle provincie fatta da Ottaviano nel 27 av. C., passò nel 6 di C. all'imperatore, per tornare, sotto Nerone, al senato; ma è da notare che, sotto l'aspetto militare, benchè retta da un proconsole, si poteva tenere come provincia imperiale (3). Tuttavia, anche le provincie senatorie non erano affatto escluse dal servigio navale. L'Asia, l'Africa, la Cirenaica e Creta ce ne porgono esempii certi, probabili soltanto la Macedonia e l'Acaia. Manca la provincia di Cipro, mancano le provincie senatorie della Betica e della Narbonese, ma mancano pure le altre provincie imperiali della Spagna e della Gallia, salvo la Germania. Insomma si può conchiudere con molta verisimiglianza che al servizio navale fossero sopra tutto chiamati indigeni delle provincie imperiali e più specialmente della Sardegna e Corsica, Pannonia, Dalmazia, Tracia, Siria, Egitto e di quelle dell'Asia Minore.

Sulla condizione giuridica de' classiarii poi, oltre a quanto ho discorso nel mio libro, si debbono ancora aggiungere alcune osservazioni, per le quali giovano assai le ricerche del Mommsen sulla condizione degli equiti singolari, alla quale egli congiunge altresì quella dei militi della marineria (4).

Agl'inizii dell'impero, siccome ho detto, se fuvvi, come suppone il Mommsen, un periodo, in cui di schiavi e liberti imperiali si componesse la romana marineria, questo ha dovuto avere brevissima durata e non eccedere il principato augusteo e l'inizio del tiberiano, conciossiachè verso l'anno 26 già possiamo stabilire esservi peregrini nell'armata di Miseno. Questo elemento perdura. Peregrini sembrano il centurione classiario Obarito ed il trierarco Erculeio, ricordati da Tacito come assassini di Agrippina giuniore (5); peregrini sono il centurione Platore e il soldato Marco, a cui spettano i diplomi di Vespasiano del 71 (6); peregrini sono poi altri classiarii (7),

(1) *Hermes*, XIX, p. 46.
(2) *Hist.*, III, 12.
(3) Vedi Mommsen nel *C. I. L.*, X, p. 777.
(4) *Hermes*, XVI, p. 458 e segg.
(5) *Ann.*, XIV, 8.
(6) N. 24, 368.
(7) Eccone la lista:

Athenio coron. cl. Rav., n. 403.
Basus Virti f. mil. cl. Rav., n. 428.
Bato Laedionis f. mil. cl. inc., n. 566.
Crescens Silvani mil. cl. Syr., n. 502.
Dassis Ca... mil. cl. inc., n. 568.
Horus Pabeci f. pror. cl. Germ., n. 530.
Idiopantus Alexandri f. mil. cl. inc., n. 572.
Μάιωρ Φιλίππι mil. cl. Syr., n. 504.
Menander hort. cl. inc., n. 557.
Paius Verzonis f. mil. cl. inc., n. 566.

circa i quali, se per determinare il tempo, in cui vissero, mancano le note cronologiche, non è improbabile tuttavia supporre che appartenessero al primo secolo o al principio del secondo.

I diplomi posteriori, salvo i due ultimi appartenenti alla metà del terzo secolo, spettano a soldati designati non più con nome peregrino, ma bensì con la forma italica dei due o tre nomi (1). Essi indicano il nome peregrino del genitore: peregrino è pure in uno d'essi il nome del figliuolo del classiario, che insieme col padre ebbe la cittadinanza. La massima parte poi dei nomi de' soldati di mare, che incontriamo nelle iscrizioni, presenta la forma italica. Talvolta insieme col nome romano il classiario congiunge quello peregrino (2). In questi casi sempre è notato il nome peregrino del genitore (3). Alcune altre volte il nome del padre peregrino è indicato dal figlio classiario, senza che questi noti il doppio suo nome latino e peregrino (4). Salvo questi esempii, la paternità non è quasi mai espressa nelle lapidi dei classiarii. Onde il Mommsen crede d' inferire che le armate si componessero altresì di libertini, i quali, entrando in servigio, perdevano il patrono, ed acquistavano così una ingenuità fittizia, e quindi non si curavano d'indicare il pre-

---

Phallaeus Dioclis f. gub. cl. Rav., n. 380.
Scaeva Liccai f. mil. cl inc., n. 730.
Verus Misai f. mil. cl. Rav., n 477.
....*ilus Pinthsi f.* symph. cl. inc., n. 559.
Niuno di questi accenna la patria, salvo *Horus*, che indica la sua origine alessandrina.

(1) Dipl. di Domiziano, a. 85 (cl. Alex.): *C. Gemellus Croni f.* (Coptita), n. 494.
Dipl. di Adriano, a. 127 (cl. Rav.): *C. Fusius Curadronis f.*, n. 370.
Id. a. 129 (cl. Mis.): *M. Numisius Saionis f. Nomasius* (Corso Vinaceno), n. 25.
Id. a. 134: *Numitorius Agisini f. Tarramo et Tarpalar filius eius* (Sardo Fifense), n. 26.
Dipl. di Antonino Pio? (cl. inc.): *L. Valerius Cainenis f. Tarvius* (Corso Opino), n. 581.

(2) Eccone gli esempii conosciuti:
L. Antonius Leo qui et Neon Zoili f. mil. cl. Mis. (della Cilicia), n. 165.
M. Atlius Nepos qui Zecaebr id., n. 182.
M. Caecilius Valens qui Chilo Bilhi f. mil. cl. inc., n. 567.
Iallius Valens qui et Licca Bardi f. opt. cl. Mis., n. 83.
C. Iulius Silvanus qui et Diophanis Diophani mil. cl. Mis. (della Bitinia), n. 254.
C. Iulius Pudens qui Dines Sautis f. id. (Besso), n. 670.
C. Iulius Valens qui et Diza Serri f. scriba cl. Mis., n. 627.
C. Iulius Victor qui et Sola Dini f. mil. cl. Mis., n. 256.
M. Plotius Paulus qui et Zosimus trier. cl. inc., n. 549.
C. Ravonius Celer qui et Bato Scenobarbi mil. cl. Mis. (Dalmata), n. 213.
M. Seius Longinus qui et Menophilus Antoni... id. (di Nicea), n. 297.
T. Suillius Albanus qui et Timotheus Menisci f. arm. cust. cl. Mis. (di Nicea), n. 102.
L. Virridius Celer qui et Temans... f. mil. cl. Mis. (Dalmata), n. 690.

(3) Fa eccezione *M. Plotius Paulus qui et Zozimus* (n. 549), unico fra i trierarchi, che abbia un oppio nome. La sua qualificazione di *trierarchus Augusti* lo assegna al principio dell'impero.

(4) Si trova ciò nei seguenti esempii, oltre a quelli già citati da' diplomi:
L. Atilius Xenonis f. Pudens scriba vet. cl. Mis., n. 133.
Sex. Baebius Bai. f. vet. cl. inc., n. 562.
Cassius Veneti f. Venetus vet. cl. Mis., n. 200.
L. Decimius Scava Dercelonis f. missic. cl. Mis., n. 214.
Dionysius Plestarchi f. Trallianus scriba cl. Germ., 713.
L. Domitius Demetri f. Demetrius subunct. cl. Mis., n. 122.
M. Sabinius Fadi f. Hera fab. cl. Mis., n. 625.
Tarulius Tatenti f. mil. cl. Mis. (Sardo), n. 314.

nome del manomissore nei loro marmi (1). Questa congettura non è improbabile, neppure è interamente persuasiva: nulla si oppone a credere che molti classiarii trascurassero di esprimere il nome del loro padre peregrino. I *vernae*, per esempio, erano evidentemente ingenui, eppure nelle lapidi, che conosciamo, mai niuno di essi enuncia il nome paterno.

Qualche esempio (rarissimo è vero) abbiamo di classiarii col nome del genitore non peregrino. Lasciamo in disparte un navarco principe ed un trierarco, che, oltre al nome del padre, indicano ancora la tribù (2), i quali esempii non servono per il nostro caso; come neppure ci serve quello di un architetto dell'armata di Miseno (3). Noi non troviamo che un veterano dell'armata misenense (4), un altro d'incerta armata (5), un piloto dell'armata germanica (6) ed uno scriba della ravennate (7), oltre a due esempii fornitici da diplomi, l'uno da quello dei Filippi del 247 di un opzione dell'armata di Miseno (8), l'altro dal diploma di Decio del 249 di un librario sesquipliciario della ravennate (9). Questi è nativo di Ateste; l'opzione è di Miseno; il luogo della nascita fa supporre ch'egli fosse figlio di un soldato già di stanza in quel luogo. La tribù non è menzionata nei citati esempii che in due casi (10), l'uno di un veterano, l'altro dello scriba (11).

Pensa poi il Mommsen che a partire dal secondo secolo la condizione dei peregrini all'entrare in servizio nel corpo degli equiti singolari, ovvero nell'armata, divenisse la latinità (12). Che equiti singolari e militi dell'armata non fossero per regola generale cittadini romani è dimostrato dal fatto della concessione della cittadinanza, finiti gli anni del servizio (13); che non fossero più peregrini nel senso proprio del vocabolo risulta dal modo più comune, con cui esprimono i loro nomi, vale a dire la forma plurinominale italica. A ciò aggiungendo la costante mancanza della tribù,

---

(1) *Hermes*, XIX, p. 17, nota 3. Una lapide ci fa conoscere *M. Arrius M. l. Princeps* soldato dell'armata di Miseno (n. 641). Ma non può darsi che in vece di *M. l.* vi si dovesse scrivere *M. f.*? Anche, ammettendo l'esattezza dell'epigrafe, è pur sempre un esempio isolato.

(2) *C. Iulius C. f. Fal. Magnus* nav. princ. cl. Mis., n. 584 (probabilmente dell'anno 198).
C. Marcius Volson. f. Serg. Maximus trier. cl. Mis., n. 44.
Si può ancora aggiungere *C. Sulgius L. f. Pap. Caecilianus*, che fu navarco nell'armata di Miseno, e poi occupò altri gradi più alti nell'armata e nell'esercito sino a quello di prefetto della legione III Cirenaica (n. 31).

(3) *C. Vettius C. f. Claud. Gratus*, n. 113.

(4) *....nius C. f. An. Silvanus*, n. 307.

(5) *L. Trebius L. f. Ruso*, n. 576.

(6) *L. Octavius L. f. Elaites*, n. 713.

(7) *M. Valerius M. f. Claud. Colonus*, n. 407.

(8) *T. Flavius T. fil. Alexander*, n. 28.

(9) *.....merinus L. f. Sempronianus*, n. 371.

(10) N. 307.

(11) Nell'epigrafe: *M. Valerio M. f. Claud. Colono Liburn. Varvari. scrib. cl. pr. Raven.* il Mommsen crede che *Claud.* non esprima la tribù Claudia, ma sia il soprannome della città di Liburnia Varvarina (*Hermes*, XVI, p. 466, nota 3, cf. *C. I. L.*, III, n. 6418). La mancanza delle tribù nelle lapidi dei veterani dell'armata, che avevano ricevuto la cittadinanza, terminati gli anni di servizio, proviene anche in parte, come ben nota il Mommsen, da ciò che molte di tali iscrizioni appartengono al secolo terzo, in cui la tribù era già andata in disuso ed anche chi la possedeva non si curava di enunciarla.

(12) *Hermes*, XVI, p. 458 e segg.

(13) Un soldato dell'armata di Ravenna, che ha militato ventisei anni, è detto *Romana civitate donatus*, ciò che equivale probabilmente a *missus honesta missione* ossia a *veteranus*.

devesi ammettere ch'essi necessariamente doveano essere Latini (1). Questo diritto di latinità od era posseduto dal loro luogo natio, ovvero ad essi personalmente conferito all'entrare in servizio. Il nome poi di colonia, che si trova dato a parecchie città indicate nei titoli di questi soldati, non ha nulla di contradditorio: niuna ragione, in fatti, vieta di ammettere che dopo Adriano vi fossero colonie di diritto latino.

La celebre costituzione di Caracalla concedente la romana cittadinanza a tutti gli uomini liberi, domiciliati nell'impero romano, non ebbe, com'è noto, quell'indole generale, che le si volle un tempo attribuire. Non solo essa non tolse di mezzo le cause, che potevano produrre differenze nello stato delle persone suddite dell'impero; ma nemmeno tutti i non cittadini ebbero da essa la romana cittadinanza (2). Ed in fatti gli equiti singolari sembra non abbiano profittato di tale concessione. Il contrario avvenne per i militi dell'armata. Di Caracalla abbiamo un diploma da poco conosciuto (3) in favore dell'armata di Ravenna; ma ci manca il nome del soldato. Posteriori a Caracalla sono i due diplomi sopra rammentati, spettanti a soldati di mare, l'uno del 247, imperanti i due Filippi, l'altro di Decio del 249. I soldati menzionati in essi sono evidentemente cittadini; il primo diploma spetta all'*ex optione T. Fl(avio) T. fil. Alexandro n(atione) Ital(ico) d(omo) Misen(o)*, l'altro all'*ex librar(io) sesqu(ipliciario). . . . . merinò L. f. Sempro[nia]no dom(o) Ateste.* I privilegii, contenuti nelle leggi di questi imperatori non giovavano già a far conseguire a questi militi la cittadinanza, di cui già essi erano in possesso, ma a regolare le loro unioni con donne non cittadine e la condizione giuridica della moglie e della prole. In fatti il primo diploma è dato in favore, oltre che dell'opzione, anche della moglie e di quattro figli, di cui il primo appare nato da questa, gli altri da genitrice diversa: l'altro diploma insieme col librario sesquipliciario ne rammenta pure il figlio. Se il luogo della nascita poi, come ho detto, può far supporre che l'opzione misenense fosse figlio di un milite dell'armata, altrettanto non si può dire del nativo di Ateste, librario nell'armata di Ravenna. Al contrario, pensando alla cittadinanza da questo posseduta, si deve ammettere che verso la seconda metà del secolo terzo anche nella milizia navale si trovassero Italiani, oltre ai *vernae*, che ci furono palesati dalle epigrafi. Ora sappiamo che gl'Italiani, appunto perchè cittadini, non militavano prima nell'armata: ed al terzo secolo parimente si possono assegnare le due epigrafi, in cui come soldati di marineria appaiono un nativo di Formia ed uno di Nola e probabilmente altresì alcune di quelle, in cui solo si legge la generica menzione di *Italicus* o d'*Italus*.

Conchiudendo, nella composizione dell'armata romana noi possiamo stabilire i seguenti periodi:

1° Un periodo di formazione, in cui liberti imperiali non solo, ma anche schiavi del principe, si trovano essere capitani di nave: secondo il Mommsen, durante questo periodo, da lui prolungato sino a Claudio, le ciurme altresì sarebbero state formate con

---

(1) L'opinione del Mommsen è accettata dal Willems, *Le droit public romain*, 5e éd., Louvain, 1883, p. 411.

(2) Vedi Mommsen, nell'*Hermes*, XVI, p. 474 e segg. Cf. Mispoulet, *Institutions politiques des Romains*, t. II, Paris, 1883, p. 168.

(3) N. 698.

gente della *familia imperatoris*, e l'armata non avrebbe avuto un vero ordinamento militare. Noi al contrario crediamo che questo periodo abbia avuto breve durata, presto essendo scomparsi gli schiavi dell'imperatore dagli ufficii superiori classiarii, essersi mantenuti, al contrario, ancora per qualche tempo liberti imperiali a capitanare navi ed a comandare talora le armate. Quanto alle ciurme niuna notizia positiva ci è fornita nè dagli scrittori, nè dai testi epigrafici.

2° Un periodo, che possiamo giudicare già cominciato sotto l'impero di Tiberio, e la cui durata possiamo potrarre alla fine del primo secolo, forse anche ai primi decennii del secondo. In questo periodo le armate sono composte di peregrini, che conservano la peregrinità durante il servigio ed alla fine di esso acquistano la romana cittadinanza per privilegio imperiale.

3° Un periodo, comprendente il secondo secolo e parte del terzo, durante il quale si deve ammettere che i militi di mare levati fra i peregrini di determinate provincie acquistino la latinità per il fatto solo dell'ingresso nell'armata.

4° La costituzione di Caracalla modifica probabilmente questa condizione. I classiarii diventano cittadini. Alla metà del terzo secolo noi possiamo stabilire la presenza di cittadini nell'armata Ciò ha conseguenza altresì sulla provenienza regionale de' classiarii. Italiani entrano nell'armata, laddove prima i nativi della penisola non erano che figliuoli di soldati della marineria seguenti la professione de' loro genitori.

La serie dei diplomi militari fu accresciuta in questi ultimi anni, per fortunate scoperte, sino a settantotto (1); un solo diploma nuovo spettante all'armata ci fu dato dalla Sardegna, quello sopra rammentato di Caracalla, il quale è pertanto il decimosesto di tali documenti concernenti la marineria romana (2). Mancando in questo mutilo diploma, appartenente ad un ignoto milite dell'armata di Ravenna, l'indicazione della potestà tribunicia ed essendovi solo enunciata la terza salutazione imperatoria ed il quarto consolato, il diploma può appartenere ad uno degli anni fra il 213 ed il 217.

La formola di questo diploma *ipsis filisque eorum, quos susceperint ex mulieribus, quas secum concessa consuetudine vixisse probaverint*, etc., uguale a quella, che si trova nei posteriori diplomi del 247 e del 249, e diversa da quella, che s'incontra nei diplomi anteriori, ove le donne dei soldati sono chiamate *uxores*, richiede alcune osservazioni.

---

(1) I diplomi militari pubblicati nel *Corpus* e nella *Ephemeris epigraphica* erano sessantadue, allorchè venne alla luce il mio libro (1878), oltre ad uno, allora inedito, ma a me noto. Appresso ne apparvero altri quindici nell'*Ephemeris* (IV, p. 183-187; p. 495-515; V, p. 93-104), ai quali è da aggiungere il diploma di Domiziano dell'anno 83 scoperto a Coptos e pubblicato dal Desjardins, *Comptes rendus de l'Acad. des inscr. et belles lettres*, 1883, p. 441-449.

(2) N. 698. V. il mio scritto *Intorno ad un nuovo diploma militare romano*, negli *Atti dell'Acc. delle Sc.*, XVIII, p. 353 e segg. Quivi ho osservato che il Mommsen, pubblicando un frammento di diploma di Domiziano (*Eph. ep.*, IV, *priv.* n. LXIV), pensò fosse menzionata nella parte perita l'armata germanica. Tra le parole *equitibus et p*[*editibus*] e *qui militaver*[*unt*] vi è uno spazio, per il quale non si trova facilmente un altro supplemento; onde il Mommsen propone di leggere *et classiariis*, supplemento « aptum omnino exercitui Germaniae inferioris ». Mi parve dubbia la cosa; ad ogni modo in vece di *et classiariis* preferirei aggiungere *et classicis*, come si legge nel diploma di Domiziano per l'armata alessandrina (n. 491) ed in uno di Traiano per le milizie ausiliarie e l'armata della Mesia (n. 542, cf. n. 541).

L'opinione del Mommsen sul matrimonio de' soldati romani è stata in parte contraddetta dal Wilmanns nel suo lavoro intorno al campo di Lambesa (1). Il Mommsen pensa che ai soldati cittadini fosse vietato il matrimonio, durante il servizio, laddove i non cittadini potevano tor moglie, secondo le loro leggi e consuetudini particolari e queste unioni acquistavano dalle leggi di privilegio gli effetti di quelle contratte fra cittadini. Da Settimio Severo poi sarebbe stato concesso ai soldati di tener seco concubine (2).

Il Wilmanns suppone che i legionarii avessero facoltà di contrarre simulacri di matrimonio con cittadine romane. Della quale facoltà avran goduto altresì le milizie privilegiate destinate al presidio di Roma. Se non che, mentre i soldati delle coorti pretorie ed urbane potevano vivere in concubinato con donne peregrine, e, in virtù di speciale privilegio, il matrimonio diveniva legittimo alla fine del servizio, come risulta dai diplomi; i legionarii, al contrario, non potevano venire a tali unioni, non esistendo alcun diploma per essi che le riveli (3) e non essendo ben viste le unioni fra i soldati cittadini e gli abitanti delle provincie.

Il Wilmanns dà un'altra spiegazione al passo di Erodiano, dal quale il Mommsen credette d'inferire la facoltà del concubinato concessa da Settimio Severo. Erodiano fra i decreti da questo imperatore emanati dopo la sconfitta di Albino (decreti, che Macrino reputò dannosi alla disciplina militare) annovera quello di potere *γυναιξὶ συνοικεῖν* (4). In questa espressione il Wilmanns scorge il diritto dato ai soldati di coabitare legalmente con le loro donne. Ed osservando la diversa disposizione, che appare nel campo di Lambesa, a partire appunto dal regno di Severo, conchiude che sino allora il soldato abitava nel campo, adesso eragli concesso dimorare nel vicino villaggio con la moglie o la concubina e venire soltanto nel campo nelle ore di servizio (5).

Testè un erudito francese, il Mispoulet, riprese l'esame della quistione del matrimonio de' soldati romani (6). Egli stima che il divieto del matrimonio non esistesse, e fonda la sua opinione sopra i seguenti argomenti: disaccordo, che sarebbe fra sì fatto divieto e l'indole della legislazione romana, che stabilisce privilegii in favore dei soldati; disaccordo speciale fra questa proibizione, la quale dovrebbe essere opera di Augusto, ordinatore dell'esercito permanente, e la tendenza della legislazione augustea favorevole al matrimonio e contraria al celibato; mancanza di un testo speciale, che provi questo divieto; esistenza di epigrafi, in cui non solo i soldati del presidio di

---

(1) Pubblicato nelle *Commentationes philologicae in honorem Th. Mommseni*, tradotto poi, annotato ed accresciuto di un'appendice epigrafica dall'ab. Thédenat, nel *Bulletin trimestriel des antiquités africaines*, II, 1883, p. 185-200, 238-251, 320-344, 393-417.

(2) *C. I. L.*, III, p. 906 e segg. Cf. *Armate*, p. 53. Tale opinione è pure quella del Marquardt, *Röm. Staatsverw.*, vol. II, p. 542; e del Madvig, *Röm. Staatsverf.*, vol. II, p. 566.

(3) Salvo per militi delle due adiutrici di poco posteriori alla formazione di queste legioni costituite con soldati della marineria allora peregrini.

(4) III, 8.

(5) Lo Jung (*Die roman. Prov.*, p. 134, nota 1) osserva che non conviene dimenticare le differenze degli usi locali, altro essersi praticato in Africa, altro nelle regioni danubiane.

(6) *Le mariage des soldats romains*, nella *Revue de philologie, de littérature et d'histoire ancienne*, VIII, 1884, p. 123-126.

Roma, gli ausiliarii e quelli dell'armata, ma anche i legionarii appaiono ammogliati, e difficoltà di ammettere che sempre si tratti di matrimonii celebrati prima di entrar in servizio, stante la giovane età, in cui tale servizio principiava (1); testi giuridici, che accennano a soldati ammogliati, fra i quali testi alcuni evidentemente si riferiscono a matrimonio contratto durante il servizio (2); interpretazione diversa al passo di Dione Cassio, in cui si volle scorgere espressa tale proibizione (3). Egli tuttavia osserva che, se in diritto i matrimonii de' soldati erano ammessi, nel fatto tali matrimonii non dovevano essere frequenti, sopra tutto per l'impossibilità della vita comune a cagione del servizio militare: quindi comprendesi da ciò perchè Tacito (4) e Tertulliano (5) rappresentino i soldati come viventi nel celibato.

Il Mispoulet accetta per il passo d'Erodiano la spiegazione, che il Wilmanns e altri prima di lui vi avean dato, la facoltà cioè concessa ai soldati da Settimio Severo di poter vivere in comune con le lor donne (6).

Egli soggiunge alcune osservazioni intorno all' *ius conubii* indicato nei diplomi. Questo *conubium* è la facoltà di contrarre un matrimonio retto dal diritto civile romano di guisa che un tale matrimonio produrrà tutti gli effetti derivanti dalle *iustae nuptiae*. Se il soldato, nel momento, in cui riceveva il privilegio, era ammogliato, il suo matrimonio *ex iure gentium*, ove avesse sposato una Latina od una peregrina, convertivasi in *iustae nuptiae;* se era ancora celibe, acquistava la facoltà di contrarre matrimonio non solo con una cittadina, ma altresì con una donna *peregrini iuris*. Questo beneficio del *conubium* si estende anche al concubinato, la volontà dei due concubini lo può trasformare in matrimonio. Ciò il Mispoulet deduce dalle espressioni del diploma dei Filippi, uguali a quelle citate del diploma di Caracalla. Egli poscia combatte l'opinione della retroattività del *conubium*, vale a dire nega che il *conubium* concesso al soldato ammogliato durante il servizio faccia sì che i figliuoli nati prima di tale concessione siano trattati come se fossero nati da due

---

(1) Vedi sull'età, in cui si cominciava a militare, Foerster, *Das heerespflichtige Alter bei den Römern*, nel *Rheinisches Museum für Philologie*, XXXVI, 1881, p. 158-160. Egli compose una tabella coi vol. II, III, V, VI p. 1ª, VII del *Corpus* e con Renier, *I. R. de l'Alg.*, dalla quale si avrebbe, aver cominciato il servizio a 13 anni un soldato legionario ed uno di coorte urbana; a 14 un legionario, un ausiliario, un vigile, un milite di corpo sconosciuto; a 15 un pretoriano, un equite singolare, tre legionarii, tre ausiliarii; il numero va crescendo a 16 anni, ecc. Per l'armata ho dato una tavola nel mio libro, alla quale variazioni non importanti son date dalle nuove iscrizioni. Aggiungo tuttavia alla fine questa tavola rifatta.

(2) Papiniano (fr. 16 D., *De castr. pec.* (XLIX, 17)) esamina la questione se la dote data o promessa ad un figlio di famiglia soldato faccia parte del peculio castrense. — Ulpiano (fr. 45, § 3 D., *De ritu nupt.* (XXIII, 2)) parla di schiava comprata col peculio castrense dal figlio di famiglia soldato e quindi manomessa e del diritto di sposarla. — Papiniano (fr. 35 D., *eod.*) afferma: « filiusfamilias miles matrimonium sine patris voluntate non contrahit ».

(3) Questo storico dice che Claudio τοῖς στρατευομένοις, ἐπειδὴ γυναῖκας οὐκ ἐδύναντο ἔκ γε τῶν νόμων ἔχειν, τὰ τῶν γεγαμηκότων δικαιώματα ἔδωκε. (LX, 24). In vece d'intendere una impossibilità legale del matrimonio, il Mispoulet ravvisa nelle parole di Dione un'impossibilità di vita comune fra un soldato e sua moglie stante le leggi militari, quindi dispensa da parte di Claudio ai soldati celibi delle pene sancite dalla legge Papia Poppea per i non ammogliati.

(4) *Ann.*, XIV, 27.

(5) *De exhort. cast.*, 12.

(6) Osservo ancora che Dione Cassio, dicendo i soldati γυναῖκας οὐκ ἐδύναντο ἔχειν, si riferisce a cosa non più esistente al suo tempo. Sappiamo in fatti ch'egli scrisse la sua storia dopo Settimio Severo.

cittadini romani. Finalmente egli crede che questo *ius conubii* fosse concesso altresì ai legionarii, e stima che la mancanza di diplomi per questi non possa essere un argomento negativo.

Gli argomenti dal Mispoulet addotti a sostegno dell'opinione che tutti i soldati romani potessero contrarre matrimonio mi sembrano persuasivi, del pari che la spiegazione del passo di Erodiano, dal Wilmanns e da lui ammessa. Sulla natura del *conubium* indicato da' diplomi non v'ha dubbio: differisco però da lui sull'interpretazione della formola sopra riferita dei diplomi di Caracalla e dei posteriori, e tosto ne darò la ragione. Parmi poi che giustamente sia notata la non retroattività del *conubium* rispetto alla prole nata innanzi alla concessione di esso (1).

Ora, venendo a ciò, che più strettamente si connette col nostro soggetto, cioè il matrimonio de' classiarii, dobbiamo, come già ho fatto nel mio libro (2), osservare la diversità delle formole usate nei diplomi, ma dando ad essa una diversa spiegazione. Sino al 145 il *conubium* è dato ai soldati di mare *cum uxoribus, quas tunc habuissent cum est civitas iis data, aut, siqui caelibes essent, cum iis quas postea duxissent.* Nei due primi secoli i classiarii furono peregrini e poi Latini, quindi, mentre acquistano la cittadinanza, hanno convertito in *iustae nuptiae* il loro matrimonio, o, se celibi, quello che contrarranno con donne non cittadine.

Dal 213-17 in poi si parla di figli, *quos susceperint ex mulieribus, quas secum concessa consuetudine vixisse probaverint*, e di connubio *cum iisdem, quas tunc secum habuissent cum est civitas iis data, aut, si qui tunc non habuissent, cum iis quas postea uxores duxissent.* Il Mommsen ravvisa in queste *mulieres, quas secum concessa consuetudine* etc. le concubine permesse da Severo, e, pubblicando il diploma di Caracalla, trova confermata la sua congettura sul diritto di concubinato concesso dal padre di questo imperatore (3). Il Mispoulet pure crede che qui si tratti di concubine, e soggiunge che non bisogna dare troppa importanza alla modificazione della formola e ritardare sino al tempo, in cui questa appare così mutata, l'applicazione del *conubium* al concubinato.

Al contrario io son d'avviso che questa mutazione di formola abbia importanza e si riferisca ad un cangiamento nello stato dei classiarii. Nei due primi secoli non vi può essere per i classiarii quistione di matrimonio o di concubinato nelle loro unioni con

---

(1) I diplomi parlano solo dei figli per ciò che concerne il diritto di cittadinanza. Gaio, dopo aver enunciato gli effetti del *conubium* di cittadini con Latine o peregrine (I, 57), soggiunge: « Unde et veteranis « quibusdam concedi solet principalibus constitutionibus conubium cum his Latinis peregrinisve quas « primas post missionem uxores duxerint; et qui ex eo matrimonio nascuntur, et cives Romani et in « potestate parentum fiunt ». Il giureconsulto qui non parla che del *conubium cum uxoribus, quas postea duxissent*, non con quelle, *quas tunc habuissent*, quindi non può essere invocato contro la retroattività del *conubium*. È da notare che nel palinsesto veronese fra il § 57 e il seguente v'è uno spazio bianco, in cui sembra non esistesse scrittura. Osserverò che le prime parole *unde et* ammesse da quasi tutti gli editori di Gaio, compresi il Krüger e lo Studemund (anche nella loro recentissima edizione, Berlino, 1881), non si leggono così nel codice, dove, giusta l'apografo studemundiano, si vedrebbe *Und c c'*. Il Polenaar nella sua edizione di Gaio (Leida, 1876) propone *unde causa cognita;* lo segue il Muirhead (ed. di Edimburgo, 1880); il Dubois (ed. di Parigi, 1881) nota: « Cette ingénieuse restitution est très-plau- « sible », ciò che non credo, essendo contraria all'espressione usata ne' diplomi.

(2) Pag. 53.

(3) *C. I. L.*, X, p. 996, ad n. 8325; *Eph. ep.*, V, p. 104.

donne, non essendo essi cittadini. Queste unioni diventano col *conubium* acquistato matrimonii regolati dal diritto romano. Ma, come abbiamo veduto, dal tempo di Caracalla in poi nell'armata entrano cittadini romani, i quali o celebrano *iustae nuptiae* con cittadine, e quindi non hanno d'uopo di privilegio alcuno, ovvero convivono in concubinato con donne di lor condizione o di condizione peregrina, ed allora il *conubium* è necessario per legittimare sì fatta unione.

Insomma i classiarii vengono a trovarsi nell'analoga condizione de' militi delle coorti pretorie ed urbane, ai quali il *conubium* è espressamente dato per le loro unioni con donne *peregrini iuris*. Ma per gli equiti singolari, che, a quanto sembra, non hanno avuto il vantaggio della romana cittadinanza al tempo di Caracalla, perdura nei diplomi l'antica formola, uguale a quella un tempo pure usata per i classiarii (1).

Importante poi è la notizia dal nuovo diploma fornita circa la durata del servizio navale già accresciuta da ventisei a ventott'anni. Dai diplomi precedentemente noti potevasi stabilire soltanto che sì fatto prolungamento del servizio nell'armata fosse stato introdotto nello spazio di novantotto anni fra il 145 ed il 247. Ora questo spazio si riduce di trenta e più anni fra il 145 e il 213-217. Forse tale innovazione è da ascriversi a Settimio Severo, autore di molte riforme nella milizia.

Le nuove iscrizioni nulla aggiungono alle nostre cognizioni sui comandanti delle armate.

Un nuovo prefetto della misenense (2), uno della ravennate (3), un sottoprefetto della prima (4), ed un sottoprefetto dell'alessandrina (5) (primo esempio di un sottoprefetto di un'armata provinciale), oltre ad un nome mutilato di un prefetto o di un sottoprefetto di una delle due armate pretorie (6), compaiono nei testi epigrafici riuniti in questo supplemento. Il prefetto dell'armata di Miseno, che la nuova iscrizione ci fa conoscere, è insignito del titolo di *vir perfectissimus*, portato, a partire dal terzo secolo, da personaggi dell'ordine equestre e che già s'è incontrato in tre altre lapidi di prefetti dell'armata (7). Il sottoprefetto dell'alessandrina, posteriore a Claudio, è un liberto di Tiberio. Concorda ciò con quanto sappiamo sul comando delle armate affidato nei primi tempi dell'impero altresì a liberti imperiali.

Ho trattato con la maggior ampiezza possibile nel mio libro degli ufficiali superiori della marineria, navarchi e trierarchi, ho parlato dei centurioni classiarii, che nel primo secolo sembrano diversi dai navarchi e trierarchi, ma dopo la metà del secondo secolo sembrano essere la stessa cosa, ed ho mostrato come i *principes* fossero navarchi assunti a tal grado equivalente a quello dei centurioni primipili nella milizia di terra (8).

---

(1) Diploma di Severo Alessandro a. 230 (*C. I. L.*, III, *priv.* LI). Lo stesso si dica per certi corpi di ausiliarii, come risulta dal diploma d'ignoto imperatore fra il 216 e il 247 (*Eph. ep.*, IV, p. 508, *priv.* LXXII).

(2) N. 582.

(3) N. 698.

(4) N. 583.

(5) N. 704.

(6) N. 716.

(7) N. 18, 19, 20.

(8) P. 34 e segg.

Le nuove iscrizioni ci fanno conoscere un certo numero di navarchi e trierarchi, alcuni del primo secolo schiavi o liberti imperiali (1). La mia congettura che i navarchi ed i trierarchi designassero comandanti di navi diverse, questi delle minori, triremi cioè e liburne, quelli delle maggiori, quadriremi, quinqueremi, *hexeres*, seguìta pure dal Mommsen (2), è confermata da un secondo esempio epigrafico, quello cioè di un trierarco comandante di una liburna dell'armata alessandrina (3). Una lapide ci fa conoscere un *adiutor trierarchi quadriere Venere* (4). Si può spiegare ciò in due maniere, od ammettendo che i comandanti delle quadriremi si appellassero altresì trierarchi (allora le sole quinqueremi ed *hexeres* saranno state capitanate dai navarchi), ovvero pensando che l'ufficio di *adiutor trierarchi* qui volesse designare in generale aiutante del capitano di nave, anche allorchè questi propriamente non era un trierarco. Non dimentichiamo il diploma di Claudio (5), dove la voce *trierarchi* ha certamente un senso lato.

Che la nave di qualunque specie corrispondesse (almeno dopo un certo tempo) ad una centuria è ciò, che non ha più d'uopo di essere provato. Ai numerosi esempii già noti altri sono aggiunti dalle nuove iscrizioni (6). Fra le quali è notevole quella di un naufilace, che dice di essere *centuriae Aeliani* (7), esempio, che fa riscontro e reca appoggio a quello già conosciuto del piloto (come il naufilace ufficio strettamente marinaresco), che designa non il nome della nave, ma quello del centurione (8).

I centurioni compaiono pure in parecchie lapidi di questa nuova silloge (9), fra le quali in una d'incerta armata un centurione è designato col nome di centurione *classicus* (10).

Lo Hêron de Villefosse notò che le iscrizioni, in cui compaiono i centurioni, sono state trovate per lo più lungi dalla stazione principale dell'armata, a Roma (11), a Atene (12), a Centuncelle (13), ad Ostia (14), e giudicò probabile che questi centurioni comandassero drappelli di soldati di mare (15). Avvertasi tuttavia che anche i dintorni di Miseno e di Ravenna diedero non pochi marmi con nomi di centurioni (16).

---

(1) Navarchi: *Cl. Mis.*, n. 585, (586?), 587; *cl. Germ.*, n. 712; *cl. inc.*, n. 717. — Trierarchi: *Cl. Mis.*, n. 588-595; *cl. Foroiul.*, n. 703; *cl. Alex.*, n. 705; *cl. inc.*, n. 718-721.

(2) Ad *C. I. L.*, X, n. 3340.

(3) N. 705.

(4) N. 621.

(5) N. 23.

(6) Il nome della nave è preceduto dalla indicazione di centuria nei n. 640, 654, 657, 661, 677. Col nome della nave il classiario indica il nome del centurione (*mil. de lib. Triton. cent. M. Vetti*) nel n. 730. Invece del nome della nave trovasi quello del centurione nei n. 607, 676.

(7) N. 607.

(8) N. 58. V. *Armate*, p. 39.

(9) *Cl. Mis.*, n. 596, 597, 599; *cl. Rav.*, n. 699. Abbiamo un *centurio veteranus* nel n. 600 ed un *emeritus ex c(enturione)* nel n. 598, entrambi dell'armata di Miseno.

(10) N. 722.

(11) N. 47, 50, 51, 158, 162, 318, 337, 357, 699.

(12) N. 251, 309, 338.

(13) N. 270.

(14) N. 196. Aggiungansi le seguenti lapidi: trovata in Sardegna, n. 220; a Calcedonia, n. 379; a Luco presso il lago Fucino, n. 443, a Cesarea di Mauretania, n. 722.

(15) *Classicus* ou *classiarius centurio*, in Daremberg et Saglio, *Dictionn. des antiquités*, p. 1223.

(16) N. 52-56, 295, 330, 376-378, 596-600.

Se poi centurioni comandarono piccole divisioni di armate o squadre di classiarii, ciò pure è noto per trierarchi (1).

Affermai altra volta comparire i *principes* dell'armata in quattro epigrafi (2). Due di esse, meglio esaminate, non appartengono a *princ(ipes)*, ma sì a *princ(ipales)* (3). Rimangono adunque l'iscrizione di Petronio Afrodisio *ex trierarc[ho] navar[cho] et principe* dell'armata ravennate (4) e quella di Tito Flavio Antonino primopilo nella legione I adiutrice, dopo essere stato *ex n. princ. classis* nell'armata di Miseno (5). Lessi queste sigle *ex n(umero) princ(ipum) classis;* col Mommsen, che ripubblicò questo marmo (6), preferisco ora di leggere *ex n(avarcho) princ(ipe)*. Un'iscrizione da pochi anni scoperta menziona un *navarchus princeps* (7); onde si deve credere che il titolo di *princeps* fosse accompagnato con quello di navarco, designando il primo dei navarchi e corrispondendo, come già abbiamo notato, a quello del centurione primopilo dell'esercito. Non è poi improbabile la supposizione del Mommsen che il *navarchus archigybernes* di un' epigrafe napolitana (8) e l'*archigubernus* ricordato dal giureconsulto Giavoleno (9) siano la medesima cosa del *navarchus princeps* (10).

Lo stesso Mommsen nel ripubblicare la mutila lapide baiana (11), intorno a cui ragionai nella mia opera, riportando i due supplementi diversi del Mommsen e dell'Henzen ed accostandomi a quest'ultimo, abbandona la restituzione proposta nella sua prima edizione delle epigrafi dell' Italia inferiore, e ne propone una nuova, che però differisce anche dall'henzeniana. Ai titoli di Marco Aurelio e Lucio Vero, di cui solo rimane più quello di *Divi Nervae abnepotib(us)* egli fa seguire: *navarchi et trier*ARCHI . CLASSIS . PRAETOR . MISEN | *quod ad alteros ce*NTVRIONATVS . QVIBVS . DIVVS . PIVS | *classem . suam . hono*RAVERAT . ADIECTO . TERTIO . ORDINE | *optimum princi*PEM . AEQVAVERINT. Soggiunge: *Iam cum ex titulo quamvis mutilo satis intelligatur Pium alterum centurionatum in classe instituisse,*

---

(1) *Armate*, p. 56. Parlando della *vexillatio* dell'armata e dei *vexillarii classis* non ho già inteso, come crede l'Haupt (*Revue histor.*, XIII, p. 163), piccole squadre di armate provinciali; ma *distaccamenti* di soldati della marineria, anche per il servizio di terra, com'egli è d'avviso. Lo stesso dotto nota che reciprocamente vi furono legionarii, i quali servivano talora nella marineria; ciò che appare dall'iscrizione orelliana n. 6959 (= *C. I. L.*, V, n. 2501), spettante ad un soldato legionario, che prese parte ad un *proelium navale*. Può essere che qui si tratti di soldati imbarcati per qualche spedizione terrestre, ovvero per imitazione della tattica navale della repubblica, in cui frequentemente sulle navi ponevansi militi di terra, destinati altresì a pugnare ne' combattimenti marittimi. Nè diverso è il caso degli ὁπλῖται καὶ τοξόται, che Dione rammenta a bordo delle navi traversanti il Tigri nella spedizione partica di Traiano (LXVIII, 26). L'Haupt cita pure l'iscrizione orelliana n. 3454, come esempio di un centurione legionario insignito della corona navale. Convien notare che questa epigrafe fu conservata soltanto nei manoscritti del Giocondo e del Mazochi, che il primo nella lin. 4ª e nella 7ª legge *coronavali*, dagli editori del vol. VI del *Corpus* (n. 3584) a ragione corretto in *corona vall(ari)*.

(2) *Armate*, p. 36.

(3) N. 58 *b* e 335.

(4) N. 372.

(5) N. 35.

(6) *C. I. L.*, X, n. 3348.

(7) N. 584. V. il mio scritto *Intorno ad una iscrizione classiaria scoperta a Castelvolturno*, negli *Atti dell'Acc. delle Sc. di Torino*, XVII, p. 379 e segg.

(8) N. 38. V. *Armate*, p. 40 e seg.

(9) Fr. 46 D., *Ad S. C. Trebell.* (XXXVI, 1).

(10) Ad *C. I. L.*, X, n. 3348

(11) *Armate*, n. 33. V. p. 37 e seg.

Marcum et Verum tertium ordinem addidisse, verisimile est trierarchos a Pio ita exornatos et ordinatos esse, ut alteri quodammodo centuriones fierent. Ad id exemplum fratres imperatores aliud genus principalium similiter commodis et honoribus ad centurionum exemplum exornavisse videntur, fortasse gubernatorum, qui centuriones et trierarchos dignitate proxime secuti videntur esse. Probabile est ad hanc ordinationem imperatorum fratrum aliquo modo pertinere titulum nuper repertum Alexandreae: ΔΕΚΑΝΩΝ ΤΩΝ ΕΝ ΣΤΟΛΩ ΠΡΑΙΤΩΡΙΩ *etc.* (1), *sed quid significet et quinam sint decani frustra quaesivi* (2). E termina giudicando, come è vero e come ho notato io pure, scarsa ed errata (*non minus exilem quam perversam*) l'esposizione di Vegezio sulla marineria romana (3), ciò che non seppe avvertire taluno, da cui recentemente si volle studiare sì fatto argomento.

Dichiarai congetturale ogni restituzione della lapide di Baia, così malauguratamente spezzata, chè, intera, sarebbe una delle più notevoli per il nostro soggetto, e per averla tale si sacrificherebbero volontieri tanti marmi classiarii così avari di notizie. Tuttavia fra la supposizione nuova del Mommsen, che nel *tertius ordo* scorge l'inalzamento dei *gubernatores* agli onori del centurionato per opera di Marco Aurelio e Lucio Vero, dopochè il loro genitore adottivo già vi avea inalzato i comandanti delle navi, e l'opinione accettata dall'Henzen che il *tertius ordo* indichi il grado di decurione municipale conferito ai navarchi e trierarchi, già insigniti del grado o delle insegne del centurionato, mi sento sempre inclinato di più verso questa. Noterò ancora il navarco principe dell'iscrizione n. 584 essere stato ascritto all'ordine dei decurioni, anzi fra i duumvirali di *Volturnum*. Il che, siccome altrove ho avvertito (4), sino ad un certo punto può corroborare l'opinione dall'Henzen ammessa; tuttavia non basta da sola per sostenere la riferita congettura sull'interpretazione del titolo baiano, per la quale ha come sappiamo, maggior valore la promessa d'Ottaviano, vincitore di Sesto Pompeo, d'iscrivere i suoi centurioni fra i decurioni dei rispettivi loro municipii (5).

Per ciò, che spetta ai *principales* dell'armata, non troviamo ricche notizie nei titoli, che qui ho raccolto. Tre soli nuovi ufficii classiarii ci furono rivelati: il *cornicularius praefecti*, l'*adiutor trierarchi*, l'*exactus*. Dubbio è il *vexillarius;* pare che le sigle *bix. pri.* di una lapide del museo di Napoli si possano sciogliere in *bix(illarius) pri(ncipalis)* (6), nel qual caso si può assegnare il marmo all'armata: dubbio è pure se nello. . . . . *officiorum* di un frammento di lapide delle vicinanze di Miseno si celi un ufficio classiario (7). Probabile soltanto si è che un *Diadumenus a rationibus* menzionato in una iscrizione scoperta a Miseno (8) fosse uno schiavo impe-

---

(1) È l'iscrizione n. 580 *bis* della nostra raccolta.

(2) Ad C. *I. L.*, X, n. 3340.

(3) Sulla fede di Vegezio, anche per ciò, che concerne la milizia terrestre, vedi I. G. Foerster, *De fide Flavi Vegeti Renati*, Bonnae, 1879.

(4) *Atti dell'Acc. delle Sc.*, XVII, p. 381.

(5) Dione Cassio, XLIX, 14. La base onoraria di questo navarco principe ha note cronologiche, che possono convenire tanto all'anno 93 quanto al 198; ma è assai più probabile che sia di questo ultimo anno.

(6) N. 620.

(7) N. 693.

(8) N. 629.

riale destinato a tenere i conti dell'armata stanziata in quel porto, come schiavo imperiale era il *dispensator classis* e liberto imperiale il *tabularius* od archivista dell'armata di Ravenna, entrambi già noti (1).

I tre nuovi ufficii classiarii si spiegano facilmente. L'esistenza dei cornicularii presso i legati e i tribuni delle legioni, il prefetto del pretorio, il tribuno delle coorti pretorie, il prefetto della città, i tribuni delle coorti urbane, il prefetto, il sotto-prefetto, i tribuni dei vigili, i comandanti dei corpi ausiliarii ed altresì presso il prefetto dell'annona e procuratori provinciali (2) ci faceva sperare di trovare col tempo uguale ufficio presso i prefetti delle armate. Tale speranza è soddisfatta da una lapide disseppellita nell'antica Bauli (3). È probabile si trovi altresì col tempo il corniculario del sottoprefetto, dacchè quest'ultimo nell'armata aveva col prefetto la medesima relazione, che i comandanti di tal nome avevano nei vigili.

Al *secutor trierarchi* dobbiamo aggiungere l'*adiutor trierarchi*, menzionato in una lapide del museo Britannico proveniente dall'agro napolitano (4), il qual *principalis* trova il suo riscontro nell'*adiutor tribuni* delle coorti urbane e dei vigili.

Un'iscrizione di Cesarea di Mauretania è posta a *Ti. Claudio Aug. l. Eroti trierarcho liburnae Nili exacto classis Aug. Alexandrinae* (5). L'ufficio di *exactus* (lo stesso che *ab actis*, od *actuarius*, od *actarius*), noto nell'esercito, ove abbiamo *actuarii* di legioni e di corpi ausiliarii (6), ancor mancava alla marineria. Ignoro se in questa iscrizione *exactus* designa un ufficio amministrativo nell'armata alessandrina, avuto prima di quello di trierarco, ovvero se il trierarco era nel medesimo tempo *exactus* di tutta o di una parte dell'armata.

Nuove iscrizioni furono aggiunte a quelle già possedute sovra parecchi degli ufficii classiarii, che passai in rassegna nel mio libro. Se non che l'oscurità, che ravvolge l'ordinamento dei *principales* nell'armata per la esistenza di gradi speciali, che non s'incontrano nella milizia di terra, perdura nè potrà essere diradata che dalla scoperta di latercoli. Le lapidi singolari, che possediamo, non sono di natura tale da gittare luce sovra questo argomento.

Due dei nuovi titoli spettano a *gubernatores* o piloti dell'armata di Miseno (7), un terzo scoperto sul Reno rammenta pure un *gubernator* evidentemente dell'armata germanica (8). Tre nuovi proreti della misenense (9); tre naufilaci della stessa armata (10) ed uno di armata incerta (11); parecchi opzioni (12); due subopzioni (13) ci sono fatti conoscere da queste epigrafi. Fra gli *optiones* della milizia di terra se ne trovano designanti

(1) *Armate*, p. 62, n. 139, 409.
(2) V. Marquardt, *Röm. Staatsverw.*, vol. II, p. 528 e seg.; Cauer, *De muneribus militaribus centurionatu inferioribus*, nell'*Eph. ep.*, IV, p. 412.
(3) N. 621.
(4) N. 622.
(5) N. 705.
(6) Marquardt, *op. cit.*, vol. II, p. 533; Cauer, p. 431.
(7) N. 601, 602.
(8) N. 713.
(9) N. 603, 604.
(10) N. 605, 607.
(11) N. 724.
(12) *Cl. Mis.*, n. 608-614, 618, 665. — *Cl. Rav*, n. 700. — *Cl. Germ.*, n. 714.
(13) *Cl. Mis.*, n. 615, 616.

un ufficio speciale; nell'armata abbiamo trovato con questo vocabolo indicati pure preposti ad un'amministrazione militare come gli *optiones navaliorum* di *Moguntiacum* (Magonza) e l'*optio factionis artificum* dell'armata misenense (1). Nei vigili noi abbiamo l'*optio conv.* di ufficio incerto (2). Un *optio conv.* di una quadrireme troviamo pure in una lapide del museo Britannico, che per la sua provenienza va ascritta all'armata misenense, e nella quale a torto il Klein suppose si dovesse leggere *opt. corn(icen)* (3) ed io credei fosse da leggere *opt. cent(uriae)* ovvero l'indicazione dell'armata (4).

Alcuni *armorum custodes* compaiono nei nuovi marmi (5), ove troviamo pure alcuni *fabri* (6), un de' quali è *dupliciarius* (7).

Dai sei medici, che annoverai nel mio libro, uno va tolto. In fatti nella lapide segnata col n. 121 posta a *M. Lollio Valenti med. III Fide mani(pulari)* la sigla *med.* non va sciolta in *med(ico)*, ma designa certamente il nome della patria (8); così i rimanenti medici dell'armata sarebbero tutti dupliciarii, come dupliciario è il nuovo datoci da un marmo misenense (9).

Dagli ufficii del commissariato dell'armata dobbiamo cancellare il *rationalis*, che inesatta lettura di una lapide del Museo napolitano (10) mi aveva fatto iscrivere. All'*exceptor* col nome della quinquereme *Victoria*, che incontriamo in un'epigrafe ravennate, devesi aggiungere l'*except(or) tr(ierarchi)*, se è indovinata la mia restituzione di una linea guasta di una lapide del museo arcivescovile di Ravenna (11).

Ricordisi, oltre all'*exceptor praefecti praetorio* (12), all'*exceptor praesidi(s)* della provincia di Mesia (13) ed all'*exceptor praefecti* dei vigili (14), sopra tutto l'*exceptor tribuni* in questa stessa milizia (15). Quale fosse il suo uffizio è indicato dall'etimologia: colui che raccoglieva *(excipiebat)* le parole in fretta dettate. Un titolo puteolano ci palesa un nuovo *librarius* col nome della nave (16); altri marmi forniscono nomi di nuovi scribi (17).

Finalmente, oltre a parecchie nuove epigrafi di soldati dupliciarii (18), noi possediamo ora altresì quella di un soldato sesquipliciario o *sescuplarius* (19). Rammento il diploma atestino di Decio, da cui già si avea notizia di un librario sesquipliciario dell'armata di Ravenna. Le nuove epigrafi di veterani non aggiungono altre notizie; segnalo soltanto il nome di un secondo *veteranus Augusti*, che s'incontra in due lapidi di Pozzuoli (20).

(1) *Armate*, p. 58 e seg.
(2) *C. I. L.*, VI, 1058, cent. 7, n. 10.
(3) *Jen. Literaturzeit.*, 1876, p. 384.
(4) N. 558.
(5) *Cl. Mis.*, n. 617-619, 673, 686.
(6) *Cl. Mis.*, n. 624, 625. — *Cl. Rav.*, n. 701.
(7) *Cl. Mis.*, n. 623.
(8) Il Mommsen (*C. I. L.*, X, n. 3599) crede si debba leggere *Med(iolanensi)*.
(9) N. 626.
(10) N. 130.
(11) N. 702.
(12) Muratori, p. 864, 3.
(13) *C. I. L.*, VI, n. 2977.
(14) *C. I. L.*, VI, n. 1056, cent. 2, 69.
(15) *C. I. L.*, VI, n. 1057, c. 7, 34; n. 1058, c. 3, 12.
(16) *Cl. Mis.*, n. 628.
(17) *Cl. Mis.*, n. 627. — *Cl. Germ.*, n. 713. — *Cl. inc.*, n. 724.
(18) *Cl. Mis.*, n. 630, 631. — *Cl. Rav.*, n. 702. — *Cl. inc.*, n. 725.
(19) *Cl. inc.*, n. 726
(20) N. 668, 669.

CLASSIS MISENENSIS

Del centinaio e mezzo di epigrafi, che sono contenute in questo supplemento, più di due terzi appartiene all'armata di Miseno, la quale già nella mia prima silloge epigrafica classiaria era quella più largamente rappresentata (1). Niuna denominazione nuova venne fuori per quest'armata.

---

(1) Di 581 iscrizioni (alcuni numeri sono ripetuti), 357 appartengono all'armata misenense; aggiungendo le nuove lapidi, noi abbiamo più di 450 spettanti all'armata di Miseno, mentre meno di tre centinaia appartengono alle altre. Fra queste 141 sono dell'armata di Ravenna, una sessantina circa di incerta armata, il resto spetta alle armate provinciali.

Nel vol. X del *C. I. L.*, il Mommsen collocò fra le iscrizioni dell'armata di Miseno parecchie, in cui non v'è che l'indicazione di *miles* o di *veteranus*. Ciò pure ho fatto io nella mia collezione (cf. p. 57, nota 10) ed in questo supplemento, allorquando le lapidi provengono o da Miseno o da Ravenna o da luoghi molto vicini al porto misenense (Baia, Pozzuoli, ecc.); ma ho trascurato di farlo allorchè non se ne conosce esattamente il luogo dello scoprimento, sebbene, trattandosi di lapidi esistenti a Napoli, si possa dubitare che siano state rinvenute nei luoghi, presso cui era stanziata l'armata. Tali sarebbero:

C. I. L., X, n. 3513 = Fiorelli, *Cat.*, n. 612;

N. 3519; n. 3537-38 = *C. I. L.*, VI, n. 3572 (per isbaglio fra le romane; apparteneva al Museo Valletta a Napoli; indi passò presso l'Andreini, poscia a Firenze presso il Gori (*I. E.*, I, p. 250; III, p. 65), finalmente nel Museo di questa città);

N. 3541 = Fiorelli, n. 818;

N. 3544 = Fiorelli, n. 852;

N. 3548;

N. 3549 = Fiorelli, n. 632;

N. 3659 (già nelle collezioni Valletta, Andreini, Gori, ora nel Museo di Firenze);

N. 3665.

L'esclusione di queste lapidi (che possono essere classiarie) dalla silloge nostra non ci priva della più piccola notizia per il nostro soggetto.

Fra le classiarie il Mommsen colloca ancora il n. 8374, da Napoli portato nel collegio delle Querce presso Firenze (non potrebbe nelle lin. 2-3 in vece dell'inintelligibile *vetera. Aeg. IX* leggersi *vetera(nus) Aug(usti) n(ostri)* o *leg(ionis) IX?*); n. 1969 = Fiorelli, n. 1043 (è un epitafio posto ad una donna *natione Cilicissa* dal marito, che nemmeno si designa come milite); n. 1981 (epitafio di una donna *natione vernae Nucherinae* (di Nuceria) eretto del figlio, anch'esso senza alcuna designazione militare; v. nelle correzioni ed aggiunte in fine la nota al n. 119 della nostra raccolta). Nell'iscrizione, dal Guarini detta pompeiana, n. 3448 = Fiorelli, n. 1681, egli legge *n(aufylax)*, che nell'indice degli ufficii classiarii corregge in *n(avarchus)*. — Non credo appartenga alla marineria militare il servo imperiale ricordato con molti altri servi e liberti imperiali nella tavola anziate: *Argaeus gfber* (*gubernator?*) *Censorin(ianus)* (*C. I. L.*, X, n. 6638, C. 5). Può forse essere dell'armata la lapide sarda di Grugna (fra Sulci e Tharros) n. 7537: *D. M.* | *Farsonio Oc* | *ciario mil. s* | *tip. XX q(ui) v(ixit) a(nnos) XL.*

Ecco quelle, che incontriamo in questi marmi:

Classis praetoria Misenensis, 582-584, 588, 591, 592, 597, 601, 604, 607, 608, 627, 631, 632, 638, 639, 643, 649, 650 *b*, 651, 652, 655, 658, 662, 663, 665, 667, 671, 672, 676, 677, 680, 683, 688, 689, 694, 697.

Classis praetoria Misenatium, 677, 716 (?).

Classis praetoria Misenensis pia vindex, 639.

Classis praetoria Misenensis pia vindex Philippiana, 661.

Κ(λάσσις) Μ(εισ.), 644 (1).

La massima parte de' nuovi titoli di quest'armata pretoria proviene da Miseno o da luoghi vicini. Un'iscrizione trovata a Mariana nella Corsica (2), un'altra dissep- pellita ad Aleria (3) ed una terza, venuta pure alla luce in questo luogo e la quale pare classiaria (4), ci persuadono ad assegnare nei due principali porti della Corsica stazioni dell'armata misenense, il che d'altra parte si poteva conoscere anche da Tacito, il quale rammenta, al tempo di Otone (69), un trierarco delle liburne stanti in Corsica (5). Si può pure sup- porre l'esistenza di altre navi da guerra sulle spiagge della vicina Sardegna (6).

Ai diciotto prefetti dell'armata di Miseno un nuovo fu aggiunto da una lapide scoperta fra le rovine di Bijga (l'antica Bisica) nella Tunisia (n. 582). Fu questi *M. Cornelius Octavianus*, che per la designazione di *vir perfectissimus* e per il comando straordinario avuto, col titolo di *dux per Africam, Numidiam Mauretaniamque* mostra di essere posteriore a Settimio Severo, dopo cui

582.

M CORNELIO OC
TAVIANO V · P · PRAEF
CLASSIS · PRAET · MISEN ·
DVCI . PER · AFRICAM
NVMIDIAM · MAVRETA
NIAMQVE · SPLENDI
DISSIMVS · ORDO ·
MVNICIPI · BISICENSIS
PATRONO · INCOMPARA
BILI . OB . MERITA

Al Mommsen non riesce sicura (v. ind. del *C. I. L.*, X) l'attribuzione all'armata di Miseno delle iscrizioni con nomi di scribi n. 1953 (Pozzuoli) = Fiorelli, n. 1019;

N. 1955 (agro napolitano) = Fiorelli, n. 1617;

N. 1957 (Pozzuoli) = Fiorelli, n. 981;

N. 1958 (origine incerta; già a Napoli).

Persisto poi per le ragioni addotte nel mio libro (p. 36, nota 11) ad escludere dalle genuine, o almeno da quelle di sicura lezione, l'iscrizione palermitana riferita dal Garrucci, *Cl. pr. Mis.*, n. 224, sulla fede del Torremuzza (*Iscr. di Palermo*, Palermo, 1762, n. 64; *Siciliae vet. inscr. coll.*, Panormi, 1769, IX, n. 3), che il Mommsen ammette nel *C. I. L.*, X, n. 7288.

(1) Inoltre le forme errate: *Clasis pretorio Mesenatium*, n. 630; *Clasis pret. Misent.*, n. 630; *Classis praetoria Misensis*, n. 660; *Class. Misensis*, n. 660.

(2) N. 660.

(3) N. 639.

(4) N. 675bis.

(5) « Claudium Pyrrhicum trierarchum liburnicarum ... navium. » *Hist.*, II, 16.

(6) N. 220, 675.

---

582. Bijga (*Bisica*) nella Tunisia. Ferrero, nel *Bull. des ant. afric.* II, 1883, p. 301, n. 156.

cominciarono ad introdursi i titoli onorifici e regnante il quale la Numidia fu separata dalla provincia proconsolare d'Africa. Sembra poi quest'iscrizione anteriore al riordinamento amministrativo di Diocleziano, che accrebbe il numero delle provincie africane (1).

All'unico sottoprefetto di quest'armata conosciuto sinora ci è dato aggiungerne un secondo, il cui nome ci è rivelato pure da una lapide africana (n. 583): *C. Annius Flavianus*, assunto a tale dignità dopo essere prefetto di una coorte ausiliaria, indi tribuno legionario, poscia prefetto di un'ala. Dalla sottoprefettura dell'armata di Miseno passò all'ufficio di procuratore delle *Alpes Actrectianae* e quindi del *tractus Kartaginiensis*. Appartiene alla fine del secondo o al terzo secolo (2).

583.

C. ANNIO FLAVIA
NO EQVO PVBLIC
PRoCVR TRAC
TVS KARTHAGI
NIENSIS PROCVR
ALPIVM ATREC
TINARVM SVB
PRAEFEC CLASSIS
PRAET MISENENS
PRAEF ALAE Ī FL SA
BASTENORVM TRIB
LEG III ITALIC PRAE
FEC COHORTIS IIII
RAETORVM DONIS
MILITARIB DONA
TVS BELLO GER
////// NICO II ////////
//////////////////////////
/////////////////////////

(1) Vedi su questa iscrizione la mia lettera al sig. J. Poinssot, scopritore di questa epigrafe nella feconda sua missione archeologica nella Tunisia, nel *Bulletin trimestriel des antiquités africaines*, II, 1883, p. 301 e seg.

Un'iscrizione di Setif rotta nella parte inferiore è dedicata agli dei Mauricii ed al genio del luogo da un M. Cornelio Ottaviano (Delamare, *Expl. scient. de l'Algérie. Archéol.*, pl. 84, n. 10; Renier, *I. R. de l'Alg.*, n. 3302; *C. I. L.*, VIII, n. 8435). La forma delle lettere può convalidare la congettura che questi sia il medesimo della lapide di Bijga.

(2) Pallu de Lessert nel *Bull. des ant. afr.*, III, 1884. p. 51.

583. Thimgad (*Thamuges*) nell'Algeria. Poulle, nel *Recueil de la Société arch. de Constantine*, XXII, 1882, p. 361, n. 109.

586.

*d*IVI · MAGNI · PII · *Antonini f.*
*invic*TVS · PIVS · ET · SVPE*r omnes pricipes*
*co*NLAPSAM · A SOLO · RESTIT*uit*
*cur*ANTE · SVLGIO · C*l eciliano*

584.

C · IVLIO · C · F
FAL · MAGNO
NAVARC · PRINC
CLAS · PR · MISEN
ADLEC · IN · ORD · DECVR
ET · INTER · II · VIRALE..
DECRET · DECVR · P · P
MVNIC · REVERF
CVIVS · DEDI....
DECVRION.......
HS XX

in latere dextero: urceus

in latere sinistro:

DEDIC · PR · IDVS · AV
SATVRNINO · ET....
CVRANT · Q · SERVILI . .
TI · CL PHILE

patera.

585.

D · M · S ·
sic MEMORIO · EILIO DVLCISSIMO ·
SATVRNINIVS · ISIDORVS ·
NAVARCHVS · ET VIBIA SERENA ·
· PARENTES ·

---

584. Base di marmo rotta nella parte inferiore, che nella superficie piana della parte superiore mostra ancora uno dei fori, in cui era infissa e saldata la statua del personaggio, a cui la epigrafe fu dedicata. Scoperta a Castelvolturno, scavandosi i fondamenti del palazzo municipale, ora a Capua nel Museo Campano. *Not. degli scavi*, 1880 (ottobre), p. 392. La ripubblicai, commentandola, negli *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, XVII, 1881-82, p. 379 e segg., tav. VIII. *(Intorno ad una iscrizione classiaria scoperta a Castelvolturno)*, da un calco (che ho riprodotto in fotografia) inviatomi dal cavaliere D. Gabriele Jannelli, segretario della Commissione conservatrice dei monumenti di antichità e belle arti per la provincia di Terra di Lavoro. *C. I. L.*, X, n. 8215.

C. Iulio C. f. Fal. Magno navarc(*ho*) *princ*(*ipi*) *clas*(*sis*) *pr*(*aetoriae*) *Misen*(*ensis*) *adlec*(*to*) *in ord*(*inem*) *decur*(*ionum*) *et inter duovirale*[*s*] *decret*(*o*) *decur*(*ionum*) *p*(*ostulatione*) *p*(*opuli*) *munic*(*ipes*) *revere*[*ntes*]. *Cuius dedi*[*c*(*atione*)] *decurion*[*ibus*] (*sestertios*) *XX* [*nummos dedit*]. Nel lato: *Dedic*(*ata pr*(*idie*) *Idus Au*(*gustas*) *Saturnino et*[*.... cos.*] *curant*(*ibus*) *Q. Servili*[*o...*] *Ti. Cl*(*audio*) *Phile*[*...iiviris.*].

585. Scoperta a Miseno. Nel Museo di Napoli. Fiorelli, *Cat.*, n. 471; *C. I. L.*, X, n. 3342.

Come rettamente notò il Garrucci (*Cl. pr. Mis.*, p. 31) il personaggio ricordato nell'ultima linea è lo stesso, a cui appartiene la lapide n. 31, il quale fu navarco nell'armata misenense, in cui, dopo essere stato nella milizia terrestre ed aver occupato altri ufficii, tornò con l'ufficio di *praepositus reliquationi.*

L'imperatore, a cui questo titolo fu dedicato, è Elagabalo o Severo Alessandro.

586. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3352.

588.

D · M
C · ARRII
APONIANI
TRIERARCHI
CLASS · PRAET
MISENENS

587.

D · THIASVS · M
VALERIVS · VERVS
BIS · NAVARCVS · CLA
sic SIS · PRETORIO · MESE
NATIVM · VIXIT
ANNIS · XXIIII · VALERIVS
EVOK · PATER · ET · IVLIA
MATER · FILIO · FECERVNT

589.

VALERIAE · CRES
CENTIS · TR · F
SEVERAE · VIX
AN · III · M · V

590.

C · IVLIO · CAESARIS ·
L · AVTOMATO · TRIERAR
IVLIA · C · L · PLVSIA · SOROR
FECIT · ET · SIBI · ET · SVIS

591.

A MALE PARCARVM DVRA DE LEGE SORORVM
RAPTVS IN HIS IACEO TELLVRIS SEDIBVS ATRAE
BIS SEPTEM MINVS ANTE DIES QVAM QVINQVE PER ORBES
SOLIS EOIGENAE COMPLEREM PARVOLVS ANNOS
NOMINE LONGINIVS PRAENOMINE GAIVS OLIM
CVI PROCVLVS COGNOMEN ERAT NVNC VMBRA NEC VMBRA
SVBTER HVMVM POSITVS MORTIS TEGOR ECCE SEPVLCHRO
NEC MINVS ET CONTRA GENETRICIS FRATRE CREATVS
QVATTVOR HIC ANNIS EXS QVADRAGINTA DIEBVS
MAIOR IN AETERNAM MERSIT SVA LVMINA NOCTEM
HIC MEVS VT FRATER STABIANO LITORE MECVM
CONDITVR IN TENEBRIS ACHERONTIS LABITVR VNDIS
NVNC TIBI NE GRAVE SIT FELIX · QVICVMQVE VIATOR
DICERE SI SAPIVNT · ALIQVID POST · FVNERA MANES
ANTONI v ET v PROCVLI v MOLLITER v OSSA CVBENT
C. LONGINIVS PRISCVS PATER v
TRIERARC · CL · PR v MIS v ET v
LICINIA PROCILLA MATER v
FILIO v DVLCISSIMO v

---

587. Roma. Fronte di sarcofago con cartello, fra due coppie di delfini per parte, trovata nel palazzo delle Finanze, cortile del Debito pubblico. *Not. degli scavi*, 1879 (ottobre), p. 265; Lanciani, nel *Bull. della comm. arch. com. di Roma*, 1880, p. 26, n. 188; *Eph. ep.*, IV, p. 342, n. 922.

588. Già a Pozzuoli. Ora a Napoli nel Museo. *C. I. L.*, X, n. 3353.

Seguendo il Mommsen (*I. R. N.*, n. 455*), collocai questa lapide fra le apocrife (n. 8*). Il Mommsen, che la vide nel Museo di Napoli, la restituì poi fra le genuine. Resta quindi giustificata l'asserzione del Garrucci, *Cl. pr. Mis.*, n. 22, che da questa lapide siasi composto il titolo ligoriano n. 36* della mia raccolta.

589. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3363.

590. Miliscola. *C. I. L.*, X, n. 3357.

591. Castellamare di Stabia. Scoperta nel 1876 « nella parte meridionale del vescovato .... a tre « metri sotto il suolo attuale ». *Not. degli scavi*, 1878 (settembre), p. 301, da comunicazione dell'ispettore signor M. P. Rispoli; *C. I. L.*, X, n. 8131.

Il sepolto chiamavasi Caio Longinio Proculo. Nella medesima tomba giaceva un figlio del fratello di Licinia Procilla.

592.

D · M
IVLIAE · STATILIAE
DATIVILLAE
SANCTISSIMAE · FEMINAE
CONIVGI · INCOMPARABIL
P · MANILIVS · SABINIANVS
TR · CL · PR · MIS · FECIT

593.

PIS · SIBI ET
*p*RISCO · TR
DECVR
IMO
*et libertis liber*TABVS
*posterisque eor*VM

595.

pro REDITV · ET · VICTO*ria*
AE · AVG · M · C · TOTIVSQ*ue domus divinae*
DECVR · MISENIS · ET · TE*ani?*
VIT · TRIERARC · PRIS
*pra*EF · LEG · III · GALLIC · PRA*e f.*
CL · SEVERO · ET ·

594.

D M
FELICIONIS
IVBENIS · REVEREN
TISSIMI · QVI · VIX · AN · XXI
MEN · IIII · DIES · XXVIII
C · VALERIVS · MACRINVS
tr · AVGG · BERNAE · SVO
B · M · F

596.

D · M
AVRELIA · IVLIA
VIX · ANN · VI · MEN · V
AVRELIV · MACEDO · O *sic*
FILIAE · DVLCISSI · M · F

---

592. Trovata a Voghenza presso Ferrara. Custodita da persona privata. Da copia comunicatami dall'amico prof. Ettore Pais, che mi scrive essere: « su marmo con bellissimi caratteri. Dei lastroni, « che coprivano il monumento, uno aveva il sigillo seguente:

IMP · L · SEP · SE · AG

« l'altro

IMPEOVSPA *(sic)* ».

593. Scoperta a Pozzuoli. Indi a Napoli nel Museo. Fiorelli, *Cat.*, n. 979; *C. I. L.*, X, n. 3364.

594. Napoli. Maffei, *Mus. Veron.*, p. 352, 10. — *C. I. L.*, X, n. 3354.

Un Caio Valerio Macrino trierarco è ricordato dall'iscrizione n. 45. È molto probabile che sia la stessa persona di questa. La natura dei due titoli è uguale, un epitaffio cioè posto ad un giovanetto, la dizione è identica, in entrambe notiamo lo scambio della *v* in *b*.

595. Scoperta a Miseno. Ora a Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3342*a*.

2, [*Iuli*]*ae Aug*(*ustae*) *m*(*atris*) *c*(*astrorum*). — 6, *Cl*(*audio*) *Severo et* [*Victorino* oppure *Quintiano cos.*]. Nel primo caso l'iscrizione apparterrebbe all'anno 200, e la Giulia della lin. 2ª sarebbe Giulia Domna; nel secondo al 235 e l'imperatrice sarebbe Giulia Mamea.

596. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3366.

598.

D M
TERENTIAE · SE
CVNDILLAE · VIX · AN
XVIII · M · VI · IVLIVs
ATHENODORVS · EME
RIT · EX · C · CONIVGI · DVL
CISIMAE · B · M · F

599.

D · M
M · MARII
PVDENTIS · O
NAT · MISENENSIS
VIX · AN · XXII · MIL · A · IIII
SCENTIA · MARCIA
MATER FILIO · PIENTISS
B M · F

597.

\ ·
*c*OELIO DORG
*c*ENT · CL · PR ·
*vix*SIT · ANNIS · LX
ᵓIVS · SEVERINV
ᴾROTIS · LIB
*patr*ONO .

600.

D · M
T MINVCIVS · SATVR
NINVS › VETERAN
HELPIDI · VERNAE
SVAE · ET · SIBI · ET LIB
LIBERTAB · · POSTERISQ
EORVM

601.

M · ANTONIVS
LVPVS
M · ANTONIO
LVPO · GVB · EX · CLAS
PR · MISENENSE
PATRI · BENE MER

602.

protome viri
ᴾRA / IS GVBERNATORIS EX III F / /
gubernaculum AN · X / XXI *prora*
ᵓNATIS ꭤ / / / / / / / / / / ' / / / / / / / '
XTRINI . . . .

---

597. Pollena, nella villa Santangelo. *C. I. L.*, X, n. 3367.

598. Scoperta a Baia verso Miseno. Indi a Pozzuoli, presso il canonico Criscio. *C. I. L.*, X n. 3373 (« Duhnius et Criscio descripserunt »).

3, CVNDINAE Duhn — 5, 6, *emerit(us) ex c(enturione)*.

599. Bacoli. Foucart, nella *Revue archéol.*, nouv. série, 1869, vol. IX, p. 212; *C. I. L.*, X. n. 3368.

600. Scoperta a Miseno. Ora a Pozzuoli presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3369.

601. Bacoli. Già a Napoli. *C. I. L.*, X, n. 3429.

602. Scoperta a Napoli, ora nel Museo di Donnaregina. *C. I. L.*, X, n. 3437 *a*.

605.

D · M
T Y C H E S
ANCILLAE
A N T O N I
VALENTIS
NAVF · V̄ · VIC
TORIA
VIXIT · ANN
XXIII

607.

miles paenulatus d. latere gladium habens, s. pugionem, s. manu scuto innixus, d. hastam tenens

M · VALERI
CAPITO NAV*f*
CLASS · PR · MIS · Ɔ · AELIAN*i*
MIL · ANN · XXII VIX ANN · XL//

603.

D ◊ M ◊
C ◊ APONIO ◊ EVDEMON
PRORETE ◊ III ◊ IVNONE
VIX ◊ ANNIS ◊ XLV ◊ MILI ◊
ANNIS ◊ XXIII ◊ N̄ ◊ EGYPTI
LYCOPOLITES ◊ AIEZIA BI
TALIS VXOR EIVS ET PVBLIVS
AIEZA FILIVS EIVS ET ◊ C ◊
IVLIVS IERAX IIII DACICO
PRORETA FRATER · ET · HERED
B ◊ M ◊ F

604.

D · M ·
C · IVLI ZOILI PROR
CLAS · P̄R̄ MIS · ĪĪĪ/ FIDE
NAT · VIBIENSIS · VIXIT
ANN · XXXV · MIL · XVII
IVLIVS SILVIVS ET IVLIA
ZOE · PATRI · B · M · F ·

606.

- D M -
G · IVL*ium* MARINVM · NA
VPHYLACE ĪĪĪ AVGVSTO · N
ation SYRO · STIPENDIO
RVM · XII · M · IVLIVS · MARI
NVS · FRATER · ET · HERES · BEN
E · MERENTI · FECIT

---

603. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3482.

604. Già a Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3485 (*descripsit A. Schoene*).
3, « ĪĪĪL traditur » *Corp.*, che corregge III*i*.

605. Scoperta a Miseno. Ora a Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3455.

606. Napoli, presso il prof. Guglielmo Guiscardi. Hübner, nel *Bull. dell'Inst.*, 1857, p. 52; *C. I. L.*, X, n. 3450.

607. Pireo, nella via Εὐπλοίας. Schmidt, nelle *Mittheil. d. deutsch. Inst. in Athen.* VI, 1881, p. 341; *Eph. ep.*, V, p. 73, n. 201.
2, « CAPITON · AVE traditur ». *Eph.*

610.

C · CASCELLIO · LONGNO
OPTIONI · V · VICTOR
NAEVIA · EVTYCHIA ·
CONIVGI · ET BLASTVS
LIBERT · BENEMERENTI

612.

D · M
T. FLAVI · FIRMI ·
OPTIONI · IIII . FOR
TVNA · NAT · PANNo
VIX · ANN · XXXXV ·
MIL · ANN · XXXVI ·
AELIVS · VALERIA
NVS · B · M · F ·

608.

D ◊ M ◊ S ◊
T · A · LONGINIANO
OPTIONI · EX · III . VENERE ·
CL · PR · MIS · IVLIA · RVFINA
urceus MATER · LOCVS · DATVS · ESt *patera*
A . PONTIF · IVLIO · FLAVIANO
◊ PATRONO ◊

609.

D M
L · ANTISTIC
ISIDORO · OPT*ioni*
sic III · VENENERE · NA*tione*
sic AEGYPTIS · VIX*it*
AN · XXXX · MIL · A*n*
XX · HERMES · LIb
PATRONO · B *m. f.*

611.

D · M
CL · ZOSIME · VIX
ANN · XXIII · M · VI ·
INAPTABILI · FEM
ET INCOMPAR · CO
IVG · COIVG · B · M · *sic*
FAB · ANTON · OPT
FECIT

613.

D · M
L · GARGILIVS VRBANVS
OPTIO EX III PESEO*l* *sic*
N SARDVS VIXIT
ANNIS XXXVIII
M · III D VII · MILITA
BII ANNIS XX *sic*
L GARGILIVS VRBANVS
FIL · PATRI · BENEMEREN
TI · FECIT

---

608. Ara scritta con belle lettere. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3458.

609. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X n. 3460.

610. Londra, nel Museo Britannico. Proveniente, come altre sotto descritte, dall'agro napolitano. *C. I. L.*, X, n. 3463.

611. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 8209.
4, « *inaptabilis femina* est opinor cui alia nulla possit aptari, id est comparari ». *Corp.*

612. Pozzuoli, presso il canonico Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3465.

613. Pozzuoli, presso il canonico Criscio. Lapide con lettere piccole e brutte. Spano, *Memoria sopra una moneta di Nicolò Doria e scoperte archeologiche*, ecc., Cagliari, 1868, p. 48; *C. I. L.*, X, n. 3466.

614.

D · M ·
VIBIVS · FELIX
OPT · III · eVF · VIX ·
AN · VIII · SOSSIA
QVINTA · HER · B · M
FECIT ·

615.

D · M ·
ABIAE · TITIANE · VI *sic*
XIT · ANNOS · IIII
P · ANNIVS · TITI
ANVS · SVBOPTI
O · III · OCEANO ·
FILIAE · SVE *sic*
FECIT

616.

· D · M ·
*iu*LIAE . HERMIONE ·
VIX · AN · XXX
IVLIVS · MALCHVS
SVBOPTIO . III · PIETATE · B · M · F ·

617.

D M
M · FL · CAPITO
ARMOR · CVST
LIB · VIRTVTE NAT PAm
PHYLVS VIX · AN · L ·
MIL · AN · XXIIII DECCIA
FORTVNATA COIVGI B · M

618.

D · M
M · GARGILI · FELICIS
ARMOR · III · SATYRA
N · AFER · STIP · XXVIII ·
VIX · ANN · LIII · MES · II ·
M · NAERIVS · QVADRAT
OPT · III · TIG · HER · B · M · F

619.

DIS · MANIBVS
D · PVBLICIVS ·
APER · ARMORVM CVSTOS ·
III · SOLI · SIBI · ET PVBLICIAE
TYCHE · LIBERTAE · OPTIMAE

---

614. Già a Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3477 (*descripsit A. Schoene*).
3, « FVF traditur » *Corp.*, è da leggere il nome della trireme *Eufrates*. — 4, AN · VIII, o la lettura è corrotta, o mancano le parole *vix · ann... mil.*
615. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3496.
616. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3497.
617. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3400.
618. Scoperta presso il Mare Morto, indi a Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3400 *a*.
619. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3405.

620.

D M
CARPINIANO
BIXIT ◊ AN II ◊ ME
IIII ◊ IVLIVS ASC
LEPIADES ◊ BIX ◊ PRI
FI PIENT ◊ FECIT

621.

· D · M ·
ANNIAE · TERTIAE
CONIVGI · KARISS ·
· FECIT ·
M · ANNIVS · VERVS
CORNICVL · PRAEF

622.

D M
M · NAEVIVS ASCLE
PIADES ADIVTOR
TR · IIII · VENERE
VIXIT · ANNIS · XXII
MENSIBVS V

623.

D M
MARCIAE EVHODIAE
VIX · ANN · XL · MEN · III
BARBIVS FIRMVS · FABER
DVPL · IIII · DACICO · PATRO
ITEMQ COIVGI · LIBER · OPSE
QVENTISSIMAE ET PIENTISSIMAE
B M DE SE FECIT

624.

D · M
G · IVLIO · GERMANO
FABRO
G · LONGINIVS · CLEMES
ET · G · IVLIVS · MAXIMVS
H · B · M · F

625.

M . SABINI · FADI ·
F · HERAE · FABRI · DE LIB ·
TAVRO RVBRO

626.

D · M
VALERIAE
ISIDORAE
VERN · MISEN
VIX · AN · XVIII ·
MENS · V · D VIII
M · IVL · CASVLLIN
MED · DVPLIC
CONIVGI · B M · F

627.

DIS · MANIB
A · IVLIO · VALENTI · QVI
ET · DIZA · SERRI · FIL · SCRIB
EX · CLAS · PRAET · MISEN
MIL · ANN · XXV · VIX · AN · XL
A · IVLIVS · IVLIANVS · ET
A · IVLIVS · STALEIANVS · FIL
PATRI · BENE · MER · F · *et* LIBERTIS
LIBERTABVS · POSTERISQVE · EORVM

---

620. Napoli, nel Museo. Minervini, nel *Bull. arch. nap.*, n. s., II, p. 152, n. 35; Fiorelli, *Cat.*, n. 963, *C. I. L.*, X, n. 3502.

Probabilmente è classiaria e v'è da leggere 5, *bix(illarius)* (per *vex(illarius)*) *pri(ncipalis)*. 6, *fi(lio) pient(issimo)*.

621. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3415.

622. Londra, nel Museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3391.

623. Scoperta a Miseno; indi a Pozzuoli presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3426.

Barbio Firmo era patrono e coniuge di Marcia Evodia, il che è malamente espresso con le parole *patronus itemq(ue) co(n)iugi liber(tae) opsequentissimae.*

624. Già a Pozzuoli. Collezione S. Francesco. Mommsen, *I. R. N.*; n. 2892. Ora nel Museo di Napoli. Fiorelli, *Cat.*, n. 776; *C. I. L.*, X, n. 3418.

Seguo il Mommsen nel collocare quest'epigrafe fra le classiarie, sebbene non sicuro di tale attribuzione.

625. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3421.

626. Scoperta a Miseno nel 1868. Ora a Baden presso Vienna. *C. I. L.*, X, n. 3444.

627. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 8374 *a*.

628.

ÆE · CYRILLAE
*coniu*GI · CASTISS
*be*NE · MERENTI
*v*ILA . LIBRAR
IIII DACIC

629.

DIADVMENVS
A RATIONIB

630.

MEMORIAE ·
AVRELIO DALMATIO ·
MIL · DVPL · CLASIS · PRET · *sic*
MISENT · Q · V . AN XXXVIII · *sic*
M · VII · D · XX · CASTRICIA ·
PRIMA · COG · CVM · QVO · *sic*
VIXIT · AN · XX · B · M · F ·

631.

D . M
SEX · SEDATINI
SVPERI · MIL
DVPLICIARI
CL · PR · MIS · TRI
ERE · LIBER(?)

632.

IVLIA · BENEDICTA · SE VIVA · FECI*t sibi et*
AELIO EVTYCHIANO · VETERANO EX *cl*
ASSE · PR · MIS · MARITO · SVO · ET · AELIAE
ANIMEQVITATI · FILIAE · ET · LIB · LIB · POS
TERISQVE · EORVM · QVOD SI IN HOC · MV
NIMENTO · SIVE · POMARIOLO · ALIQVIS ·
EXTERVM · PONERE · VOLVERIT · SIVE ·
VENDERE · LOCVM · TVNC · POENAE ·
NOMINE · DARE · DEBEBIT · REI · P · PVTE
OLANORVM · Ꝉ · S · X · M · N ·

633.

D M
C · AESIO · FEL*icissi*
MO · NAT · ALE*xandr*
STIPEN · VI · V*ixit*
ANN · XXVII · · ·
C · IVLIVS · AELIA*nus*

634.

C · ANNIO · ANV
BIONI · III · PACE ·
N · AEGYPTIO · VI
XIT · AN · XXXVI · M *sic*
LIT · ANNIS · XVI
PISON · ACHIL
LAS · ET · IVLIV
S · EVDEMON
HEREDES · B · M · F

---

628. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3439.

629. Trovata a Miseno nel 1779 col n. 18. — Da lettere e giornale del tempo, *C. I. L.*, X, n. 3347. Il Mommsen afferma che dal luogo, in cui l'epigrafe fu scoperta, « certo colligitur Diadumenum « tractavisse rationes classiarias », ciò che, a parer mio, è solo probabile.

630. Capua. Scoperta presso la via Latina, ora nel palazzo municipale. Jannelli, negli *Atti della comm. conserv. dei monum. della prov. di Terra di Lavoro*, 1875, settembre; *C. I. L.*, X, n. 3882.

631. Roma. « Stele di marmo trovata negli anni decorsi nella vigna del Pinto, sull'angolo delle « vie Appia e delle Sette Chiese ». Lanciani, nel *Bull. della comm. arch. com. di Roma*, 1880, p. 25, n. 187; *Eph. ep.*, IV, p. 341, n. 921.

5, 6, LIBERA | ΓΙ *Eph.*

632. Scoperta a Pozzuoli. Ora a Napoli nella collezione Santangelo. Pisano Verdino, nel *Rend. della R. Acc. di arch. lett. e belle arti*, Napoli, 1853, p. 224-230; *C. I. L.*, X, n. 3594.

4, *et lib(ertis) lib(ertabusque)*.

633. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3512.

634. Londra, nel Museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3515.

636.

D ⌀ M
L · ANTONIO
SABINO · VE
TR · EVVODIA
P · B · M

635.

D · MAN · S
TESNEVS · SERAPIAS
NAT · AEGYPT
VIX · ANNIS · XXXII
CONIVXS · ANNIVS
BASSVS · III · IOVE
ET · SERAPION · FILIVS
EIVS · B · M · F

637.

D M S
C ANTONII
SILVANI VETE
RANI VIXIT AN
NIS L

641.

M · ARIVS · M · L
PRINCEPS
VIXIT · AN · XIX *sic*
MIL · AN · VIII ·
EX · IIII · VESTA

638.

C · APOLLONIO · PRISCO ·
MIL · CL · PR · MIS ·
N · ALEX · VIXIT · AN · XL ·
L · FABVLLIVS · SERENVS ·
DVPL · CLASS · EIVSD ·
· HERES

639.

D M S
IVNIA · TERTVLLA · PIA · HIC
SITA · EST · QVAE · V · A · XXIIII
L · APRONIVS · FELIX · MIL ·
CLPRPVMIS · PRAECO · PR
CONIVGI · INCOMP

640.

D M
C · ARRIS · APoL
LINARIS · Ↄ · III · PA
CE DOMITI
O · FILIO SVO ·
· B · M · FEC

---

635. Già a Pozzuoli. Maffei, *M. V.*, p. 477, 7 (dal Pratilli). — *C. I. L.*, X, n. 3638.

La provenienza pratilliana m'avea persuaso a seguire il Mommsen (*I. R. N.*, n. 465 *) e collocare quest'epigrafe fra le false o sospette (n. 17*), mentre piuttosto pare soltanto corrotta.

636. Scoperta a Miseno. Ora a Pozzuoli, presso il can. Criscio. Foucart, nella *Revue archéol.*, n. s., 1863, t. IX, p. 214; *C. I. L.*, X, n. 3525.

5, *p(atrono) b(ene) m(erenti)*.

637. Pozzuoli. Collezione San Francesco. Mommsen, *I. R. N.*, n. 2843. Ora nel Museo di Napoli. Fiorelli, *Cat.*, n. 813; *C. I. L.*, X, n. 3526.

638. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3504.

639. Aleria (Corsica). Iscrizione in caratteri *grêles et très serrés. Les barres transversales des* E *et des* T *sont courtes et sinueuses.* L'iscrizione è del secolo III. « Offerte par M. Giuli, instituteur, à « M. Waltz, ancien vice-recteur de la Corse, actuellement professeur de littérature latine à la Faculté « des lettres de Bordeaux, chez qui je l'ai vue et estampée à Aiaccio ». Lafaye, nel *Bull. ép. de la Gaule*, III, 1883, p. 290.

5, *cl(assis) pr(aetoriae) p(iae) v(indicis) M(isenensis)*.

640. Scoperta a Miseno. Ora a Pozzuoli, presso il canonico Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3533.

2, *Arris* forma greca per *Arrius*.

641. Scoperta a Miseno, in presenza del can. Criscio, presso il quale si conserva a Pozzuoli. *C. I. L.*, X, n. 3531, ove si soggiunge: « De sinceritate ne dubites ».

1, è proprio sicuro che nel M. L non vi sia un errore per M. F? — 3, AN. XIX, vi dev'essere un errore del lapicida; chè con gli otto anni di servizio mal s'accordano i diciannove di età.

643.

DIS MANIBVS ·
Q · ATTIVS · PAVLINVS
III AESC · MILITAVIT
ANN · VIII · M · II · VIX
ANN · XXXIII · M · V · D
III · M · ANNIVS SEVERVS
MILES · CL · PR · MIS
DE III · MERC · AMICO
OPTIMO · BENEMER
EX · TESTAMENTO · F · C
S · T · T · L

642.

D · M ARTORIVS · VALES
III · VIRTVTE · NATIONE · ALE
XANDRINVS · VIXIT · ANNIS ·
XXVI · MILITAVIT · ANNIS · VI · IV
LIA · AGRIPPINA · B · M · F .

646.

D M
AVRELIO VA
RO III VICTORIA NA
DAL · MA · TA · IVLIVS
DEMETRIVS B M F

649.

C · CASSIO · CELERI · MILIT ·
EX · CLASSE · PRAETORIA
MISENENSE · TYCHE
LIB · PATRONO · BENE
MERENTI ·

644.

ΔЄ · Μ
ΑΥΡΗΛΙΟΥϹ
ΙΝΠΕΤΡΑΤΟΥϹ
Β · Κ · Μ · ΒЄΙΞ · ΑΝΟ
Ν · ΜΗΖЄϹ · Ϛ · ΔЄΙ · Η
ΚΟΖΟΥϹ ΙΜΒЄΙΑ ЄΙ
ΡΗΝΑ ΜΑΡΙΤΟ ΒЄΝЄ
ΜЄΡЄΝΤΙ ΦΗ
ΚЄΤ

645.

D M
M · AVR · INGENV / /
MIL VIX ANN / / / /
M · AVR · C / / / / / /
FRAT / / / / / / / / /

648.

D *m*
C · CASSIO · *I* · · · · · *ve*
TER · NAT · I
. . . .

647.

DIS MANIBVS
M · CALVENTIVS
PRISCVS
BITHYNVS · VIXIT
ANNIS XXXXV
MILITAVIT ANNIS
XXII EX III DANVVI
T SVLLIVS ALBANVS
BENEMERENTI

---

642. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 8208

643. Scoperta presso Albano. — Da un codice, *Symbolae litter.*, decadis secundae vol. IX, Romae 1754, p. 235, n. 14.

644. Sorrento. Titolo latino scritto con lettere greche. Capaccio, *Neap. hist.*, l. II, p. 508; Gudius, ms. — *C. I. Gr.*, n. 5870; Mommsen, *I. R. N.*, n. 2143; *C. I. L.*, X, n. 719.

Devesi leggere *D(is) M(anibus) Aurelius Impetratus v(eteranus) c(lassis) M(isenensis) vix(it) an(n)o(s) L, me(n)se(s) VI, di(es) VIII, co(n)iux Impia Irena marito benemerenti fecit.*

645. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3542.

646. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3545.

647. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3553.

È probabile che il Tito Sullio Albano, che dedicò questa lapide, sia il Tito Suillio Albano *armorum custos*, a cui spetta il titolo sepolcrale n. 102. Può confermare l'ipotesi la patria bitina, essendo nell'epigrafe citata indicato come di Nicea, e spettando la lapide ora riportata ad un Bitino, amico del dedicante.

648. Museo di Napoli. Mommsen, *I. R. N.*, n. 7271; Fiorelli, *Cat.*, n. 1033; *C. I. L.*, X, n. 3556.
L'aggiunta della patria induce a crederlo classiario.

649. Trovata a Miseno, ora a Pozzuoli, presso il sig. Giuseppe Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3557.

650.

a

VALERIAE
VITALI
VALERIVS
FORTVNATVS
VITALI
P·B·M·F

b

D M
L · CASSIO COL
ONI MILIS *sic*
CLASE · P · *sic*
M · III NILO
V · AN · L · MI*l*
AN XXVIII

651.

D *m*
M · CASS
EBVRI
VETER · EX
MISEN · S
SATENST
MARC
CONIV

655.

M
*c*LEMENS
MIS · III
M · A · XXVIII
· C .

653.

D M
C · CLAVDI · ISAVRICI · III · CON
CORDIA · NATINE · PHRYX · *sic*
VIXIT · ANNIS · XXXVIII · MIL ·
ANNIS · XVIIII · CVRANTE *r* CN
DOMITIVS · FAVSTVS · FIDVC *sic*
ARIS · HEREDES · TERTIA ·
CONIVGI · ET · SECVNDA
FILIA · BENE · MER · FEC

656.

D · M
Q COCCEIO TVRBONI·
MANIP · LR · V · VICTORIA
MIL · T · ANNIS · XXIII · NAT ·
AEGYP · T · VIX · ANNIS · XXXXIII ·
CALLYTIC · HERES · CONIVGI
B · M · F ·

654.

D · M
TI · CL · PISON · CEN
t III VENERE · N · ASIANVS
STIP · XXVI · Q · V · A · XLIIII · M · X · D · XX
CL · MARCELLINA · VXOR
ET · TI · CL · PISON · FILIVS
B · M · F

652.

D · M · S ·
M · CASSIO · VITALI ·
MIL · CL · PR · MIS · QVI ·
VIXIT · ANNIS · XXV · M · X ·
EREDES · FF ·

---

650. Proveniente da Roma. Lastra marmorea opistografa. Ora a Rossie Priory in Iscozia. Kinnaird, *Notes and reminiscences of Rossie Priory*, Dundee, 1877, p. 27, n. 129, 130; donde *Eph. ep.*, IV, p. 341, n. 918.

b 3-5, *mili(li) clas(s)e p(raetoria) M(isenensi) III Nilo.*

651. Trovata a Cuma. Comunicata nel 1772 al Seguier, fra le cui carte (conservate nella biblioteca di Nîmes) si trova. — *C. I. L.*, X, n. 3559.

652. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3561.

653. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3565.

5-9, sembra si dovesse scrivere: *Cn. Domitio Fausto fiduciario herede Tertia coniugi et Secunda filia patri bene merenti fecerunt.*

654. Ischia. Chevallay de Rivaz., *Inscr. des eaux minérales d'Ischia*, 5e éd., Naples, 1846, p. 50, da cui d'Ascia, *Storia d'Ischia*, Napoli, 1867, p. 455. — *C. I. L.*, X, n. 6800.

655. Roma. Museo Lateranense « in repositis ». *Eph. ep.*, IV, p. 341, n. 919.

656. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3568.

3, *manip(u)l(a)r(i).* — 4, *mil(i)t(avit).* — 5, *Aegypt(io).*

657.

D · M
T · DINNI · CELERIS ·
Ↄ III VESTA · NAT ·
CORSO STIP · XXII ·
ANTONIA · NEREIS CONIVG
B · M F

658.

D · M
C · DINNIO · VALENTI · VETER ·
CLASS · PR · MIS · NATIONE
BESSVS · DINNIVS CALOCAE
RVS · ET DINNIA · VALENTINA · FILI
ET · AFRODISIA · LIB · PATRONO MERENT

659.

C · DOMITIVS ·
PRISCVS · VET ·

660.

EGELLIVS · NIGER · MIL
EX · CLASS · MISENSE *sic*
MIL · ANN · XIIX · VIX ·
ANN · XL · H · S · EST

661.

D · M S

miles tunica succinta et paenula indutus, pugionem s. latere habens, d. hastam tenens, s. scutum solo innixum

T · F · SRBESTIANO MIL *sic*
C · L · P · R · MIS · P · V · PHILIP ·
S III VIC · M · AVR · SALVI
ANVS · FRA ET CON

662.

D · M
M FL · VALENS
MIL CLAS PR MISEN
MIL · ANNOS VI
NATIO · BESSVS ·

663.

D M
C IVLIO APONIANO
ALEXANDR · VIXIT
AN XXXXVIIII · IN IS
MIL · IN CL · PR · MIS · ANN XXIIX
ZOSIME · VXOR BMF

---

657. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3572.

658. Londra. Nel Museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3573.

Un Caio Dinnio Valente dedicò una lapide funeraria (esistente a Roma) ad un soldato di un'armata pretoria (*Arm.*, n. 565). Forse è la stessa persona, che in questo titolo compare come veterano della misenense; onde si può credere che anche questa lapide provenga da Roma.

659. Scoperta a Pozzuoli. Museo di Napoli. Mommsen, *I. R. N.*, n. 6341; Fiorelli, *Cat.*, n. 897; *C. I. L.*, X, n. 3575.

Il luogo dello scoprimento induce a crederla classiaria.

660. Tavola di marmo con lettere di tempi bassi, scoperta nel 1879 a Mariana (Corsica), ora a Bastia presso il dott Perelli. P(erelli), nel *Bull. de la Soc. des sciences hist. et natur. de la Corse*, Bastie, 1881, p. 26; Lafaye, nel *Bull. épigr. de la Gaule*, I, 1881, p. 230; da essi *C. I. L.*, X, n. 8329.

1, ÆGELLIVS Perelli, EGELLIVS Lafaye. Questa ultima lettura è esatta, come mi assicurò il dott. Perelli, che verificò l'iscrizione, a mia richiesta, quindi cade l'arbitraria correzione del *Corpus*: *l.* GELLIVS.

Lo stesso dott. Perelli gentilmente mi fece sapere non essersi trovate altre iscrizioni a Mariana dove però debbono giacere nascoste cose antiche. Pietre tumulari furono trovate ad Aleria, ma esse non concernono le armate, salvo i n. 639 e 675.

661. Scoperta a Tessalonica, ora a Costantinopoli nel museo di Cinili Kiosk. Schmidt, nelle *Mitth. des deutsch. Inst. in Athen*, VI, 1881, p. 133; *Eph. ep.*, V, p. 76, n. 208.

T(ito) F(lavio?) S(a)bestiano mil(iti) cl(assis) pr(aetoriae) Mis(enensis) p(iae) v(indicis) Philip(pianae) (centuriatriere) Vic(toria) M. Aur(elius) Salvianus fra(tri) et con(tuberali).

662. *Acheté à Rome en* 1869. Robert, *Mélanges d'archéol.*, Paris, 1875, p. 21; *Eph. ep.*, IV, p. 341, n. 920.

663. Scoperta nel 1876 a due chil. da Gonnesa (presso Iglesias in Sardegna) in un luogo detto *Sum perdaus.* Spano, *Scop. arch. fattesi in Sardegna in tutto l'anno* 1876, p. 8; *C. I. L.*, X, n. 7535.

664.

D · M
IVL AQVILAE III
SILVANO · NAT · ITALIC
MILIT · ANN · · XV · ·
VIXIT · ANN · · X · ·
SCENTIA · VALERIA · VXOR
B · M · F

665.

D · M ·
C . IVLIO ARISTONI MILITI
CL · PR · MISEN · LIB · NEREIDE
AEGYPTIO · MILIT · ANN · XIIII
VIXIT · ANN · XXXV · C · ARRVN
TIVS · VALENS · OPTIO · EX EADEM
HERES · B · M ·

669.

D · M · S
IV · LI · O · MA · RI N
O · VETE · RA · NO · AVG · N
QVI BIX · AN · LX · M · VII ·
DI · E VIII · IV · LI · A · FE · LICITAS
CO · IV · GI · BE · N · MER FECIT

666.

D · M
C · IVLIO · DI
DYMO · VETE
RANO · IVLI
A · MAMILLA
COIVX · B · M · F

667.

D M
C · IVLIO · GERM*a*
NO · MIL · CL · PR · MIS
III · TIGRIDE · VIX
ANN · XXXX · HERE
DES B · M · F

668.

D · M ·
M · IVLIO MARINO
VETERANO AVG · N QVI
VIXIT · ANNIS · LXX · III ·
M · III · DIEBVS · VII ·
LIBERTI · PATRONO ·
· B · M · F ·

670.

C · IVLI · PVDENTIS
MANI · LIB · LIBERTATE
QVI DINES SAVTIS ·
NAT · BESSVS · VIXIT
AN XXXX · MIL · AN
XXIII · FECIT · C ANTISTI
VS · RVFVS HERES
BENE · MERENTI

---

664. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 8211.

665. Già a Napoli. Ora a Londra nel Museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3469. L'opzione Caio Arrunzio Valente della liburna Nereide è lo stesso, che è ricordato nella lapide n. 77.

666. Scoperta a Miseno, ora a Pozzuoli presso il can. Criscio. Foucart, nella *Rev. archéol.*, n. s. 1863, IX, p. 214; *C. I. L.*, X, n. 3587.

667. Salerno. *Notizie degli scavi*, 1883 (luglio), p. 253.

668. Pozzuoli, presso il can. Criscio. In un coperchio di un'arca. *C. I. L.*, X, n. 8212.

669. Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 8213.

670. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3590.

671.

D ◊ M ·
T ◊ LAELIO ◊ CRISPO ◊
MILIT ◊ CL ◊ PR ◊ MISENEN
III LIBERTAT ◊ NAT ◊ BITHYNVS
VIX · ANN · XL · MIL ANN · XVI ·
L · SOSSIVS · DIONYSIVS III CAPR
HERES · B · M ·

672.

D M
T LICINIVS MIMOR
MIL CL PR A'IS IX III V≈I
XX · A · A' X N SARDVVA
M · NONIVS · AQVILIAIVS
FRATIR · IIVS · EX IIII LIBER
H B · M F

673.

D · M
C · LVCILIO LVCIANO III SA
LVTE · N · CILIX · VIXIT · ANN
XXXV . MILIT · ANN · X ·
C · HELVIVS · IVLIANVS ARM
EX EADEM SECVND · HER · B · M · F

674.

D M MARCI CAE
LESTINI NAT SAR
MIL ANN XIIII VI
XIT ANN XXXII
FILIA PA
RENTI B M F

675.

D · M
M · MARIO · CEL
SO · MAN · III · ATHE
NONICE · NAT · BESS
VIX · ANN · XLV · MIL
ANN · X.VII · L · VA
LE.IVS · //// BVCCI
MEREN*ti* FECIT

675 *bis*.

D ◊ M ◊
FL · BITALIS · MARIo
FVSCIANO CoIV
GI BENE MERENTI
FECIT STVPENDIo
RVM · XXVII

---

671. Bacoli, *C. I. L.*, X, n. 3597.

672. Scoperta a Miseno. Pozzuoli, presso il canonico Criscio. Iscrizione con lettere barbare, di cui alcune rimangono non abbastanza intelligibili. *C. I. L.*, X, n. 3598.

D(is) M(anibus). T. Licinius Memor mil(es) cl(assis) pr(aetoriae) Mis(enensis) ex III Ven(ere?) m(ilitavit) a(nnis) n(umero) X, n(atione) Sard(us), v(ixit) a(nnis) XXVII (?). *M. Nonius Aquilinus frater eius ex IIII Liber(tate) h(eres) b(ene) m(erenti) f(ecit).*

673. Londra, nel museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3402.

674. Pozzuoli, presso il can. Criscio. Spano, *Mem. sopra una moneta di Nicolò Doria e scoperte archeologiche*, ecc., Cagliari, 1868, p. 48; *C. I. L.*, X, n. 3601.

675. Scoperta a Miseno. *C. I. L.*, X, n. 3602 *(Criscius dedit Bruzzae).*

6, « XXXVII — 7, LEPIVS traditur » *Corp.*

675 *bis*. Aleria (Corsica). Caratteri di bassa età. Lafaye, nel *Bull. épigr.*, IV, 1884, p. 18, n. 5.

5, IT mon.

Il luogo dello scoprimento induce a credere che il soldato avesse servito nell'armata di Miseno.

676.

D · M
L · METTENI · MER
CATORIS · MIL · CLA
SSIS · PR · MISENEN·
> CAESILI · HISPANI ·
NAT · BESSVS · MIL · AN ·
XVIIII · VIX · AN · XL ·
L · METTENIVS · F · ET · L ·
METTENIVS · MERCV
RIVS · LIB · PATRI · ET · PA
TRONO B · M · F

677.

D M
NAEBIO FAVS
TO MILITI CL PR
MISENATIVM
C III SALVTE NATI
ON ITALICO QVI
VIX ANNIS XXII · M
V DIEBVS XIII MILIT
ABIT ANNIS VII NAE
BIVS SATVRNINVS
sic MILEX FRATRI *piscis*
INCOMPARABILI
B*corona* M*piscis* F*ancora*

678.

C · SEMPRONIVS · MAXI
MVS · III · ATHENONICE
NAT · CILIX · VIXIT . ANN
XL · V · MIL · XXV · IVLIA
MARCIA CONIVG · B · M · F

679.

D · M
L · SENTIVS · ZENO
MANIP · III · MINER
VA · NAT · SVRVS ·
VIX · AN · XXX · MIL · AN VI
MVRRIVS · RVFVS · ET
SAEE/NIVS · RVFVS
H · B · M · F

680.

D · M ◊
..*s*ILICIVS LONGVS
...CLAS · PR · MISEN . III TRI
*um*PHO ◊ MIL ◊ ANN ◊ XXI
vix A N N · X X X X ◊
..CLAVDIVS LONGINVS
◊ B ◊ M ◊ F ◊

681.

· D · M ·
SILICIVS · VICTOR ·
MIL · QVI VIXIT ·
ANN · XXVIII ·
MIL ANN · VIII · M VII
· D · V ·

---

676. Cagliari, nel sobborgo di Villanova, nel cortile della casa di Francesco Cappai, in via Gesù Maria. Baudi di Vesme, nelle *Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino*, serie II, t. XXV, 1871, p. 51; Spano, *Mem. sopra una moneta di Nicolò Doria e scoperte archeologiche*, ecc., Cagliari, 1868, p. 46; *C. I. L.*, X, n. 7595.

677. Pontecagnano (frazione di Montecorvino Pugliano, prov. di Salerno) « scoperta in prossimità « del mare ... poco discosto dall'antica *Picentia* .... Ivi .... fu trovato un sepolcro, che, all'infuori « dell'epigrafe e delle grandi dimensioni del cadavere, nulla presentava di rimarchevole. Pare che in « quel sito fosse stata una necropoli a giudicarne dagli sparsi avanzi di sarcofagi, dei quali si con- « serva alcuno quasi intero, decorato con ippogrifi, a guardia di un'urna ». *Not. degli scavi*, 1880 (febbraio), p. 67; *C. I. L.*, X, n. 8119.

678. Londra, nel museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3623.

679. Napoli, in casa Vargas-Macciucca. *C. I. L.*, X, n. 3626.

680. Scoperta a Pozzuoli. Napoli, nel museo Santangelo. *C. I. L.*, X, n. 3629.

681. Scoperta a Miseno; indi a Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3631.

682.

d M
ᴅILI · FELICIS
III · SATYRA
STIP · XXVIII
aNN · LIII · MES · II
vaLERIVS QVADRATvs
... TIG · HER · B · M · F

683.

D · M
M · STLABIO · FELICISSIMo
MIL · CL · PR · MIS · QVI ·
VIXIT · ANNIS · XX VIII ·
MILIT · ANN · VI · AVRE
LIA · PRIMIGENIA · COIV
GI · SVO · B · M · F ·

686.

L · VALERIO · CRISPo
MILITI · EX · III · ATHENONI
M · AMBIBIVS · CELER · ARMOR
III · SILVAN · CONGNAT · BEN · MER · FEC

684.

L · VALERIVS//
VETE · EX · CLAS · PR
MISE · NATIO · AF
VIXIT · AN · LVI
sic MILTAVIT · AN
sic DORIS LIBRT
B · M · F

687.

SEX · VALERIvS
INGENVS III
AVG · NAT · SARD · V · AN · XXX
MIL · VII · L · SATVRNINVS
EX EADEM · H · B · M

685.

D M
VALERIO AE
LIANO · QVI
VIX · AN · LX · MI
AN XXVIII · IV · LIA
CY · RILA · COIV
GI · B · M · F

---

682. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 8210.
7, ... *Tigr(ide)*, nome della nave.
683. Scoperta a Bacoli, verso Miseno. Ora a Pozzuoli, presso il can. Criscio. *C. I. L.*, X, n. 3633.
684. Londra, nel museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3643.
685. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3643*a*.
686. Londra, nel museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3408.
2, fine, *Athenoni(ce)*.
687. Londra, nel museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3650.

689.

M · VIBIVS · LV
PVS · MILES · EX
CLASSE PR MI
SENS · NAT · BES · *sic*
MIL · ANN · XVIIII
VIXIT ANNIS XXXX
HEREDES · BENEMERENTI · FEC
L · CORNELIVS CRESCENS EX III IOVE
M · MAECIVS ///ENS EX III III /SEO
L · LVCILIVS CVPITVS eX III CVpID

690.

D · M
L · VIRRIDIO CELERI
QVI ET TEMANS........
.........FILIO DELMAT
VIX · ANN · XXXXIX
MILIT · ANN · XXIII
T · COSCONIVS FIRMVS
III · SOLIS HERES BE
NEMERENTI FECIT

688.

DIS MAN
L · VETIDIVS · RVFVS
MIL · EX CLA · PRAET
MIS · MILITA · AN · XVI
BENE MERENTI · POSVIT
HERES

694.

TA · F · Q · V · ANN · XLV
MIL · CL · PR · M\
IBI · ET · CONIV
LI · B · M · F
VE · POSTAEI

691.

a

IVLIN
I III 6

b

I/S
MPEI

692.

O RI
F
MILIT
ANN XXII
IXIT · AN ·
XL

693.

M T A G I O
OFFICIORV
NINO · MANIPV

---

688. Londra, nel museo Britannico. *C. I. L.*, X, n. 3663.
689. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3664.
9 fine, probabilmente [*Per*]*seo*.
690. Già a Pozzuoli. Maffei, *M. V.*, p. 477, 9 (dal Pratilli). — *C. I. L.*, X, n. 3666.
Collocai quest'epigrafe tra le false o sospette, seguendo il Mommsen, *I. R. N.*, n. 466*; ma essa non ha alcun indizio di falsità.
691. « Trovato nello scavamento di Vacua ». *C. I. L.*, X, n. 3671.
692. Bacoli. *C. I. L.*, X, n. 3672.
693. Pollena, nella villa Santangelo. *C. I. L.*, X, n. 3457.
3, *manipu*[*laris*], onde l'epigrafe sembra classiaria; forse nell'*officioru*[*m*] della linea 2ª, che dovea essere preceduto da altra parola perduta, è indicato un ufficio classiario ancora ignoto.
694. Scoperta a Baia. Comunicata nel 1733 da Ignazio Maria Como al Muratori. Ms. (1735) di Antonio Angelo Procaccelli nella Marucelliana. — *C. I. L.*, X, n. 3669.

695.

////////////////////////////
////////////////////////////
////////////////// EX III
FID ////////////////// CR
V*i* X · AN · XXXII . MILI ·
AN · XIII FECIT HERE ·
DES · IVLIVM · SEREN ·
ET DOMITIVS STEN
. . . .

697.

d
PR · MIS
QVINTA*e*
ET SALLVSTIA*e*
MATRI EIVS ET *et lib. libertab.*
POSTERISQVE EORVM
H · M · S · S · *e · h · n · s*

696.

MISENE
ANN · XXV
CVR
SA SV

---

695. Museo di Napoli. Mommsen, *I. R. N.*, n. 2867; Fiorelli, *Cat.*, n. 610; *C. I. L.*, X, n. 3591.

696. Pollena (presso Napoli), nella villa Santangelo. *C. I. L.*, X, n. 3670.

697. Tersatto presso Fiume, nel museo Nugent, proveniente dall'agro napolitano. Neigebaur, *Die Südslaven und deren Länder*, Leipzig, 1851, p. 247; *C. I. L.*, X, n. 3620.

6. *H*(*oc*) *m*(*onumentum*) *s*(*ive*) *s*(*epulcrum*) [*e*(*xterum*) *h*(*eredem*) *n*(*on*) *s*(*equitur*)].

CLASSIS RAVENNAS

Nei cinque nuovi testi epigrafici spettanti all'armata di Ravenna, essa non è menzionata, se non due volte sole, con denominazioni già note.

Classis praetoria Antoniniana Ravennas, 698.

Classis Rabennatium, 699.

In una lapide mutila (n. 716), che relego fra quelle di armata incerta, si può leggere tanto *Classis praetoria* [*Ravenn*]*atium* quanto [*Misen*]*atium*. Appartiene a quest'armata pretoria il nuovo diploma di Caracalla (n. 698), da cui è fatto conoscere un quindicesimo prefetto di essa, *Gongius Nestorianus*, il quale è certamente il personaggio di ugual nome, procuratore forse del *portorium Illyrici* dei tre Augusti (Settimio Severo, Caracalla, Geta), rammentato da un'iscrizione di Petovione dedicata fra il 203 e il 211 (1).

698.

[*Imp. Caes(ar), Divi Sept*]*imi Severi Pii Arab(ici) Adiab(enici) Part(hici)*
[max(imi) Brit(annici) max(imi) f(ilius), D]ivi M. Antonini Pii Germ(anici) Sarm(atici) [nep(os), Divi Antonin]i Pii pronep(os), Divi Hadriani ab[nep(os), Divi Traian]i Parth(ici) et Divi Nervae adnep(os), [M. Aurellius An]toninus Pius Felix Aug(ustus), Par-[th(icus) max(imus), Brit(annicus)] max(imus), Germ(anicus) ma-x(imus), pontif(ex) maxi(mus), [trib(unicia) pot(estate)?, im] p(era-tor) III, co(n)s(ul) IIII, p(ater) p(atriae), pro co(n)s(ule)
[*iis qui militaverunt*] *in classe praetor(ia) Antoniniana Ravennate, [quae est su]b Gongio Nestoriano, octonis et vicen[is st]ipendis emeritis dimissis honesta missione,*

(1) *C. I. L.*, III, n. 4024.

698. Scoperto in Sardegna, nel territorio di Fonni (provincia di Sassari, circondario di Nuoro). Ora a Cagliari, nel museo archeologico. *Not. degli scavi*, 1882 (dicembre), p. 440 (donde Ferrero, negli *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, XVIII, 1882-83, p. 345 e segg.); Nissardi, nel *Bull. dell'Inst. di corr. arch.*, 1883, p. 56 e segg.; *C. I. L.*, X, n. 8325; *Eph. ep.*, V, p. 98, D.LXXVII.

q[uo]rum nomina subscripta sunt, [ipsis filisque eorum, quos] susceperint ex mulierib(us), [quas secum concessa consuetu]dine vixisse proba-[verint, civitatem Romanam] dedit et conubium cu[m iisdem, quas tunc secum] habuissent, cum est ci[vitas iis data, aut, si qui tunc non habuissent, cum iis,] quas postea uxor[es duxissent dumtaxat] singuli singu[las].

. . . .

699.

'TIVO EX PROTECTORIBV*s*
Ↄ CLASSIS RABENNATIVM..
MENSIBVS VII DIEBVS..
ERENTI CONIVGI DV..
DEPOSITVS IIII NON..
RO PVERO QVI VIXIT ..

700.

D *rosa* M
C · TITIO · CÆ
LIANO · VET
EX · OPTIONE
N .... ICA
AN

701.

DIDIV
ABER · II
ATNIC
A

---

699. Roma. Trovata nei fondamenti del palazzo della Posta in piazza San Silvestro. *Not. degli scavi*, 1879 (dicembre), p. 332; Lanciani nel *Bull. della comm. arch. com. di Roma*, 1880, p. 26, n. 189; *Eph. ep.*, IV, p. 342, n. 923.

700. Ravenna. « Nei lavori per la costruzione del tronco ferroviario Ravenna-Rimini, nel tratto « fra Ravenna e Bevano, nella regione Classense a S. Severo ». Trascritta dall'ispettore dott. Silvio Busmanti. *Not. degli scavi*, 1881 (agosto), p. 215.

Sembra classiaria; nella linea 5ª si può leggere: *n[at(ione) Pont]ic(o)*; nella 6ª *[militavit* o *vixit] an.* Me ne inviò un calco il ch. dott. Silvio Busmanti.

701. Trovata a Classe di Ravenna. Lanciani, *Bull. della Comm. arch. com. di Roma*, 1878, p. 271, n. 150.

Vi si può leggere ... *Didiu[s]* ... *[f]aber ii[i]* ... *[n]at Nic[aensis]*, e può appartenere al Didio Saturnino menzionato nella lapide ravennate n. 456; in questo caso la penultima linea di quest'ultimo titolo si dovrà leggere *f(aber) de triere Diana.*

702

delphinus D M *delphinus*
M · VAL · SATVR ·
III · PIET ·
VIX · ANN · XX
MIL · MEN · VI
M · VAL · CAPIT ·
EXCEPT TR
L · DOM · MART
DVP · SVB · P · C
ITE · V · AVG
M · SESTI · PVDE
N · DEL · VIX · AN
XXVIII · MIL · AN
VIII · III · PIET · M ·
VAL · CAPITO · F
R · H · B · M · P O ·

---

702. Collocai questa epigrafe, che trassi dal Doni (p. 224, 11) e dal Muratori (p. 865, 1) fra le false e sospette (n. 39*) avvertendo però che, benchè non si potesse dichiarare assolutamente falsa, tuttavia essa dovevasi tenere siccome interpolata o male trascritta. Non badai che tale iscrizione trovavasi nelle *Novelle lett. fiorent.* (XI, 1750, col. 320, n. 29) e in C. Spreti (tav. II, n. 70, cf. le illustr., p. 64 e segg.). Accortomi, ne richiesi un apografo, che ebbi dalla cortesia del dott. Busmanti. L'epigrafe era ad Argenta (a 45 chilometri da Ravenna), donde, nel principio del secolo passato, fu trasportata a Ravenna e collocata nel museo arcivescovile, ove tuttora si conserva. Le lettere sono rozze ed ineguali, dalla linea 9ª in giù sono più piccole ed appaiono scolpite con maggiore accuratezza.

2 fine, VR mon. — 7, linea rotta mal leggibile, le due prime lettere e le tre ultime sono chiare, non così quelle di mezzo. Parmi però probabile la mia restituzione: lo Spreti vi legge EXEHER · FR.

D(is) M(anibus) M. Val(erii) Satur(nini) (triere) Piet(ate) vix(it) ann(os) XX, mil(itavit) men(ses) VI, M. Val(erius) Capit(o) except(or) tr(ierarchi) L. Dom(itius) Mart(ialis) dup(licarius) sub(heredes) p(onendum) c(uraverunt). Ite(m) (quinquereme) Aug(usta) M. Sesti(i) Pude(ntis) n(atione). Del(matae) vix(it) an(nos) XXVIII mil(itavit) an(nos) VIII (triere) Piet(ate) M. Val(erius) Capito fr(ater) h(eres) b(ene) m(erenti) po(suit ...).

Se la mia interpretazione è giusta, qui si avrebbe un titolo sepolcrale posto a Marco Valerio Saturnino della trireme *Pietas* dai sotto eredi Marco Valerio Capitone, *exceptor trierarchi*, e Lucio Domizio Marziale duplicario, ed un altro titolo al dalmata Marco Sestio Pudente della quinquereme *Augusta* posto dal fratello ed erede Marco Valerio Capitone della trireme *Pietas*. Probabilmente il Marco Valerio Capitone della prima parte e quello della seconda sono la stessa persona?

CLASSIS FOROIULIENSIS

All'armata, riunita da Ottaviano nel porto di *Forum Iulii* (Fréjus) sulla spiaggia della Gallia Narbonese e formata con navi prese nella battaglia di Azio, appartiene il *trierarchus Caesaris* ricordato nell'iscrizione n. 703, già nella collezione di Peiresc ad Aix. Questo trierarco è uno schiavo imperiale di nome *Anthus.* Il secondo nome *Livianus*, giusta l'uso noto nell'onomastica servile, deriva da quello del primo proprietario, che può essere Livia, consorte del principe. La stazione navale di *Forum Iulii* ebbe breve durata: forse fu soppressa nel 22 av. C., allorchè la Narbonese divenne provincia senatoria (1).

703.

ANTHO CAESARIS
TRIERARCHO LIVIANO
C · IVLIVS IASO · F · C

L'iscrizione muratoriana, scoperta a Fréjus, che io collocai fra le sospette (2), dev'essere restituita fra le genuine (3). Tuttavia, non potendosi stabilire l'età di essa ed essendo probabilmente posteriore alla soppressioue della stazione navale di *Forum Iulii,* conviene annoverarla fra quelle d'incerta armata.

(1) Allmer, *Inscr. de Vienne,* I, p. 421. Cf. Héron de Villefosse, *Classis,* in Daremberg et Saglio, *Dictionn. des ant.*, p. 1235.
(2) N. 32*.
(3) N. 728.

703. Fréjus. « Ce monument curieux pour Fréjus faisait partie de la collection formée par Peiresc « à Aix ou dans son château de Belgentier et lui avait été envoyé par Nicolas Anthelmi (*de Initiis,* etc. « p. 230). Le témoignage du neveu de celui-ci, Joseph Anthelmi, est à cet égard confirmé par l'anno- « tation suivante écrite de la main de Peiresc sur la copie de l'inscription: *Foro Julii,* 1628, *eruta,* « *apud D. Antelmi.* (Manuscrit de Peiresc à la Bibliothèque Nationale, *Inscr. antiquae,* vol. II, fol.. 27 »· Aubenas, *Histoire de Fréjus (Forum Iulii), ses antiquités, son port,* Fréjus, 1881, p. 748, n. 12.

CLASSIS ALEXANDRINA

Due nuovi testi lapidarii di quest'armata son venuti alla luce. Il primo (n. 704) appartiene a *Ti. Iulius Aug. l. Xanthus,* il quale, dopo aver avuto l'ufficio balneario di *tractator* sotto Tiberio, da cui fu manomesso, e sotto Claudio, era, dopo la morte di questo principe (54), *subpraefectus classis Alexandriae.*

704.

TI · IVLIO · AVG · LIB
XANTHO · TRACTATORI
TI · CAESARIS · ET
DIVI · CLAVDI
ET · SVB · PRAEF · CLASSIS
ALEXANDRIAE
ATELLIA · PRISCA · VXOR
ET · LAMYRVS · L · HEREDES
V · A · LXXXX

Quest'iscrizione è, senza dubbio, anteriore all'anno 86, a cui appartiene il più antico documento, che conoscevasi dell'armata d'Egitto, il diploma cioè di Domiziano. Essa conferma pertanto, come notò il suo primo editore (1), la mia ipotesi che l'armata alessandrina risalisse ai primi tempi dell'impero, e non fosse che la continuazione dell'armata tolemaica. Notisi il nome di *classis Alexandriae*, che trova riscontro con la denominazione *classis quae est Miseni* del diploma claudiano del 52 e reca appoggio alla mia congettura (2) che di un nome speciale mancassero le armate sotto i primi Cesari, e soltanto lo avessero dopo Claudio. Notisi pure la qualità di liberto imperiale avuta da questo sottoprefetto, il che è il primo esempio di comando in secondo di un'armata affidato nel principio dell'impero ad un liberto del principe, esempio da aggiungersi a quelli, che possediamo da Tiberio ad Otone, di liberti imperiali ammiragli delle armate d'Italia. Le quali con l'alessandrina doveano avere analogia, giacchè sappiamo come l'Egitto possedeva amministrazione particolare, avendo gl'imperatori voluto *domi retinere* l'antico reame tolemaico (3). Onde originariamente i prefetti ed i comandanti di nave dell'armata di Alessandria avranno dovuto essere scelti nella *familia imperatoris*.

(1) Lanciani, nel *Bull. della comm. arch. com. di Roma,* 1880, p. 24, n. 86.
(2) *Armate,* p. 71.
(3) *Op. cit.,* p. 161.

704. Roma. Cippo di marmo con timpano, pulvini, patera, orciuolo, ecc. e lettere assai belle Scoperto nella necropoli presso la porta Maggiore. Lanciani nel *Bull. della comm. arch. com. di Roma,* 1880, p. 24, n. 186; *Eph. ep.,* IV, p. 343, n. 926.

Ciò ci è confermato dall'iscrizione n. 705 posta ad un trierarco *classis Aug. Alexandrinae*, liberto di Claudio o di Nerone. Questa epigrafe è la più antica che offra il soprannome d'*Augusta* dato all'armata, la quale è chiamata non più *Alexandriae*, ma *Alexandrina*. Delle due iscrizioni con questo titolo da me già spiegate (1), l'una è del 134, l'altra appartiene pure al secondo secolo (2).

705.

TI · CLAVDIO AVG · LIB · EROTI
TRIERARCHO · LIBVRNAE · NI
LI EXACTO · CLASSIS · AVG
ALEXANDRINAE · L · IVLI
VS · C · F . FAB · SATVRNINVS · ET · M ·
ANTONIVS · HERACLA · TRIER
HEREDES · EIVS · FECERVNT

Questa lapide fu scoperta a Cesarea di Mauretania (Scerscel). Oltre ad essa furono trovate in questa città altre otto iscrizioni. Di questi nove testi lapidarii, sette sono iscrizioni funerarie, due titoli onorarii. Le prime appartengono ad un soldato dell'armata siriaca (n. 502); al trierarco anzidetto dell'armata alessandrina (epitafio posto da un altro trierarco); alla moglie di un soldato sesquipliciario di un'armata, il cui nome è rotto (n. 726); ad un trierarco senz'altra indicazione (n. 551); a un centurione *classicus* (n. 722); a uno *scriba classis* (n. 724); l'ultima è un monumento eretto a suo fratello da un *duplicarius classis* (n. 725). Questi sono epitafii di soldati di mare residenti a Cesarea. Di queste iscrizioni una spetta ad un milite dell'armata siriaca, una a due trierarchi dell'alessandrina, una terza ad un soldato di un'armata, di cui è perito il nome, quattro poi ad ufficiali e soldati di un'armata, il cui nome non è menzionato (3). Io ho riunito parecchi esempii epigrafici, in cui la *classis* è menzionata senz'altra designazione, nei quali si tratta di un'armata conosciuta, di stanza nei luoghi, donde provengono i monumenti (4). Ora questa *classis*, la quale si incontra nelle iscrizioni della capitale della Mauretania Cesariense, non può essere che

---

(1) *Loc. cit.*

(2) Dedicanti del nostro epitafio sono *L. Iulius C. f. Fab. Saturninus et M. Antonius Heracla trier. heredes eius*. La sigla *trier.* si deve sciogliere in *trierarchus* o *trierarchi?* In quest'ultimo caso, oltre al trierarco Marco Antonio Eracla, che nel suo nome mostra origine straniera, forse anche libertina, si avrebbe un capitano di trireme cittadino ed ingenuo. Conviene però, per maggior prudenza, attenersi al primo scioglimento.

(3) Due iscrizioni di Scerscel appartengono a veterani senz'altra indicazione (*C. I. L.*, VIII, n. 9388, 9394), una ad un *veteranus Alexandrinus* (*Bull. ép. de la Gaule*, III, 1883, p. 224, n. 128). Nulla ci consente di attribuirle piuttosto all'armata che all'esercito, sebbene il Mommsen (*Eph.*, *ep.*, V, p. 196) giudichi l'ultima *sine dubio* classiaria.

(4) *Armate*, p. 71.

---

705. Scercel. « Trouvée à l'ouest de la ville, sur la rive droite de l'*Oued el Kantara* ». Schmitter, nel *Bull. épigr. de la Gaule*, II, 1882, p. 139, n. 2. Cf. Ferrero, *ibid.*, p. 157, note 2; Héron de Villefosse, nel *Bull. des ant. afric.*, 1882, p. 19, n. 1.

1 fine, TI mon.

l'armata di Siria o quella d'Egitto. Alla prima spetta l'epitafio n. 502, alla seconda il n. 705, il quale, contenendo il titolo mortuario di un liberto di Claudio o di Nerone, non dev'essere di molto posteriore alla riduzione della Mauretania in provincia romana, cominciata da Caligola nel 40, compiuta da Claudio due anni dopo (1).

Da Cesarea proviene pure un titolo onorario (n. 543) posteriore ad Adriano, spettante a Publio Elio Marciano, il quale fu *praepositus classis Syriacae et Augustae*, dopo il quale ufficio tenne quello di prefetto dell'armata di Mesia. Della stessa città è l'epigrafe eretta ad un procuratore di diverse provincie da un *praepositus classibus*. Nulla ci vieta di supporre che le *classes* menzionate in questo marmo siano altresì la siriaca e l'alessandrina. Onde con tutta probabilità si può assegnare a Cesarea, ricca e splendida città, munita di ampio porto, nel quale si rinvennero nel 1847 resti di navi romane (2), la stazione di una squadra delle armate siriaca ed alessandrina, sotto il comando di un *praepositus*, titolo, com'è noto, che non designava un grado speciale nella milizia, ma era straordinario e probabilmente provvisorio e serviva ad indicare ufficiali di grado diverso.

A questa divisione navale stanziata in Mauretania appartenevano anche i soldati di mare, che una lettera da Vario Clemente, procuratore della Mauretania Cesariense a' tempi di Antonino Pio, diretta a Marco Valerio Etrusco, legato della legione III Augusta, ricorda come lavoranti, insieme co' *Gaesates*, ad un cunicolo o galleria presso *Saldae* (Bougie). Questa lettera si legge in un monumento scoperto a Lambesa nel 1866 (3): *Cum | opus adsignar(em) ut scirent | quis quem modum suum | perforationis haber(et) | certamen operis in | ter classicos mili | tes et Gaesates dedi | et sic ad compertusi | onem montis convene | runt*, scrive il procuratore nella lettera, che è inutile riportare per intiero (4).

---

(1) L'Héron de Villefosse (*Bull. des ant. afr.*, I, 1882, p. 19) crede che alla morte di Tolemeo, re di Mauretania, nel 40, od almeno al principio del regno di Claudio, sia stata mandata una squadra dell'armata d'Egitto per aiutare l'esercito, che ridusse in provincia la Mauretania, e questa squadra sia poi rimasta, sotto l'impero, in istazione permanente a Cesarea insieme con una squadra dell'armata siriaca.

Il La Blanchère suppone che la divisione navale di Cesarea provenga dall'armata di Giuba, re di Mauretania (*De rege Juba regis Jubae filio*, Parisiis, 1883, p. 151).

(2) De Verneuil et Bugnot, *Cherchel*, nella *Revue africaine*, 1870, n. 79-80. Vedi i piani dei porti nell'*Expl. scientif. de l'Algérie*, *Architecture* del Ravoisié.

(3) Cherbonneau, nel *Rec. des mém. de la Soc. arch. de Constantine*, 1868, p. 479, pl. V, donde la trasse il Mommsen, che ne diede un commentario nell'*Archäologische Zeitung*, 1871, p. 5. Fu ripubblicata nel *C. I. L.*, VIII, n. 2728.

Secondo il Mommsen i *Gaesates*, abitanti della Gallia meridionale (dei quali Vallentin, *Les Alpes Cottiennes et Graies*, 1re partie, Paris, 1883, p. 19), sarebbero soldati ausiliari. Il Wilmanns li crede operai a mercede.

(4) Vedi la mia notizia *Sulle iscrizioni classiarie dell'Africa*, negli *Atti dell'Acc. delle Sc.*, XVII, p. 88-93 (tradotta con aggiunte nel *Bull. ép. de la Gaule*, II, p. 157-162) e il recente mio scritto *La marine militaire de l'Afrique romaine*, nel *Bull. des ant. afr.*, III, 1884, p. 157-181.

CLASSIS BRITANNICA

L'unica nuova iscrizione dell'armata britannica è quella segnata col n. 706, esistente nel museo di Arles ed appartenente ad una persona, che ebbe un ufficio, il cui nome è perito. È probabile che nelle parole *Phi.*, che seguono al nome della *Classis Britannica*, sia celato l'epiteto di *Philippiana* portato altresì, come sappiamo, dall'armata misenense (1).

706.

ENTIVS · SATVRNINVS · EX
CLASSIS BRITANNICAE · PHI
TIONE AFER BIZACINVS · O
VNICIPIO SEPTIMIA LIBE
YDRITANVSTE

CLASSIS LIBYCA

Niuna nuova iscrizione, oltre a quella scoperta a Costantina, l'antica Cirta, è venuta alla luce a rivelarci notizie intorno alla *classis nova Libyca*. Questa epigrafe, cirtense, come abbiamo osservato (2), non può essere posteriore agli otto primi anni del regno di Commodo. L'Henzen, come pure abbiam notato, crede che con qualche probabilità si possa attribuire l'origine di quest'armata alle incursioni dei Mauri sulle coste della Spagna al tempo di Marco Aurelio (3). Ma, nel silenzio assoluto dei testi filologici ed epigrafici, questa non è che semplice supposizione. A mio avviso, come

---

(1) *Armate*. p. 66.

Il Renier (*Mél. d'épigr.*, p. 271) suppose che appartenesse all'armata britannica il *C. Flavius Ianuarius*, figlio di una donna maura, alla quale spetta un'epigrafe di Corseult, da cui apprendiamo che questa donna avea seguito suo figlio nella Gallia e v'era morta. Il Boutaric pensa piuttosto che costui facesse parte delle coorti ausiliarie di Mauri, che la *Notitia* ci mostra stanziate nello stesso paese (*Instit. militaires de la France avant les armées permanentes*, Paris, 1863, p. 38, nota 1).

(2) *Armate*, p. 180.

(3) Quest'opinione è seguita da Schiller, *Gesch. der röm. Kaiserzeit*, vol. I, Gotha, 1883, p. 650, nota 1ª.

---

706. Arles, nel museo. Héron de Villefosse nel *Bull. des ant. afric.*, I, 1882, p. 23, n. 2.

2, PHI mon. — 4, IB id. — 5, « Des traces de lettres qui précèdent l'Y appartiennent peut-être à un H ». Hér.

altrove ho esposto (1), quest'armata, la quale verso il 180 era costituita da poco tempo, poichè si appella *nova*, fa eccezione alla regola, che è seguita nelle denominazioni di tutte le altre armate, le quali, o, come le due d'Italia e quella d'Egitto, aventi fra di loro una certa rassomiglianza, si appellarono dal nome del porto principale, in cui erano stanziate, ovvero, come le altre, presero il nome della provincia. Nel secondo secolo non esisteva alcuna provincia di Libia, poichè le due di Libia Superiore e Libia Inferiore furono create solo al tempo di Diocleziano (2). La provenienza poi da Cirta, città lontana dal mare, non dà alcun lume sulla stanza di quest'armata, per cui non si può stabilire in niun modo l'identità col naviglio frumentario africano istituito da Commodo (3), ed alla quale mi pare altre stazioni non convenissero se non sulle spiagge del paese, che nel secondo e nel terzo secolo geograficamente s'appellava Libia, sebbene ufficialmente non avesse questo nome (4). Il quale, in fatti, davasi alla regione posta fra la Numidia e l'Egitto e comprendente la provincia di Cirenaica e la Marmarica, la quale amministrativamente faceva parte della provincia d'Egitto. Parecchi porti notevoli trovavansi sulle spiagge libiche, fra gli altri Cirene e Paretonio. Occorre poi non dimenticare che il proconsole della Cirenaica, benchè governatore d'una provincia senatoria, ebbe il comando di forze militari (5). Del resto non ci è dato stabilire se l'armata di Libia, che verso il 180 era da poco istituita, abbia avuto lunga durata, nè se fu soltanto provvisoria. Laonde non possiamo ammettere la supposizione dell'autore della notizia sulla milizia dell'Africa romana, inserita nel volume ottavo del *Corpus inscriptionum Latinarum*, che l'armata di Libia sia stata stanziata a Cesarea, sotto gli ordini del procuratore della Mauretania (6).

---

(1) *La marine milit. de l'Afr. rom.*, nel *Bull. des ant. afr.*, III, p. 175 e segg.

(2) Marquardt, *Röm. Staatsverw.*, vol. I, 2ª ed., p. 457.

(3) Lampridio, *Comm. Anton.*, 17. Questa identificazione parve probabile al Klein (*Rhein. Mus. für. Philol.*, N. F., XXX, 1875, p. 295). Se il trierarco dell'iscrizione di Costantina avesse appartenuto a questo naviglio frumentario, avrebbe indicato i titoli da Commodo conferiti a questa *classis* frumentaria (*Herculea Commodiana*), che Lampridio poi non chiama già *Libyca*, ma *Africana*.

(4) Il Lumbroso notò che la distinzione delle due Libie nella divisione provinciale dioclezianea proveniva da una tradizione amministrativa risalente forse a' Tolemei (*L'Egitto al tempo dei Greci e dei Romani*, Roma, 1882, p. 27).

(5) Marquardt, *vol. cit.*, p. 462, nota 4.

(6) Pag. XXII. Neppure possiamo accettare la supposizione del Boissière che l'armata libica abbia incrociato lungo le coste della Numidia e dell'Africa proconsolare (*L'Algérie romaine*, 2e éd., Paris, 1883, Ire partie, 276). Perchè non avrebbe allora preso il nome di *classis Africana* o di *classis Numidica*?

CLASSIS GERMANICA

La collezione epigrafica dell'armata germanica si accresce di parecchi tegoli e mattoni, n. 706-710, già pubblicati dal Brambach, che vi leggeva *C*(*ohortes*) *G*(*ermaniae*) *p*(*iae*) *f*(*ideles*) e dallo Schuermans rivendicate alla *C*(*lassis*) *G*(*ermanica*) *p*(*ia*) *f*(*idelis*). Così pure è probabile l'uguale lettura dell'illustre epigrafista del Belgio in una base scoperta in Olanda (n. 711), in cui il Brambach vi trovò menzionati i *gladiatores c*(*ohortium*) *G*(*ermaniae*) *p*(*iarum*) *f*(*idelium*), e nel fianco di una lapide votiva di un'opzione al dio Bacurdo, già a Colonia (n. 714). S'aggiungono poi un'iscrizione del mezzodì della Francia di un trierarco, nella quale l'armata germanica è chiamata soltanto *Classis Germanica* (n. 712), e quella scoperta nelle vicinanze di Colonia (n. 713) contenente l'epitafio di un *gubernator* posto da uno scriba, evidentemente dell'armata renana. Le iscrizioni marmoree e laterizie, scoperte ne' paesi renani, possono servire a segnare le stazioni di quest'armata, tra le quali le principali dovettero essere certamente presso Spira (almeno nel secolo V (1)), a *Moguntiacum* (Magonza), *Autunnacum* (Andernach), Bonna (2), Colonia Agrippinense ed in altri luoghi sul basso Reno ed anche sul mare.

707.

a C G P F

b C · G · P · F

c C · G · P · F

d C · G · P · E (capovolto)

e CC · PE

---

(1) Ciò risulta da Simmaco *(Laud. Valentin.*, 21): « regio Nemetensis extenditur, recessum fluminis murorum ambitus vindicavit, parvo aditu nec satis libero, ut stationis exitus propugnaculis « desuper protegatur. Habent sua quodam modo. Fallit eminus intuentes theathrum consaeptum, « quicum videant per summa discurri per ima nesciunt navigari ».

(2) Il passo di Floro (II, 30 (IV, 12)) concernente Druso: « Bormam et Caesoriacum pontibus iunxit, « classibusque firmavit », che fu variamente interpretato e corretto ed ho riportato in *Arm.*, pag. 181, nota 1, può essere letto con Napoleone III *(Hist. de Jules César*, t. II, p. 146, nota 2): « Bonnam et Gessoriacum etc. », ammettendo che la strada da *Bagacum* (Bavay) a *Gessoriacum* (Boulogne-sur-mer), indicata nell'itinerario Antoniniano, e quella, che, secondo il medesimo itinerario, da Bavay, per Tongres, giungeva al Reno, a Bonna, già esistessero sotto Augusto; Druso le abbia migliorate, costruendo ponti sui numerosi corsi d'acqua, ch'essa traversava, e ponendo stazioni navali a Bonna e Gessoriaco. La squadra di Gessoriaco divenne poi il nucleo dell'armata britannica, la cui istituzione, abbiam detto (p. 172), deve rimontare al tempo delle conquiste di Claudio in Britannia.

---

707 *a.* Rumpst. Tegolo. Schuermans, *Ép. rom. de la Belg.*, nel *Bull. des comm. d'art et d'arch. de la Belgique*, XVIII, 1879, p. 63, n. 354, dove riunisce le iscrizioni concernenti l'armata germanica. Cf. Bone, *Classis Germanica pia fidelis*, nei *Jahrb. des Vereins von Alterthumsfr.*, LXXI, 1881, p. 107-110.

Altri trovati a Colonia. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 1971, 3, che legge in essi come nei seguenti: *c*(*ohortes*) *G*(*ermaniae*) *p*(*iae*) *f*(*ideles*); mentre rettamente lo Schuermans (*ibid.*, p. 63, n. 354 A) interpreta *c*(*lassis*) *G*(*ermanica*) *p*(*ia*) *f*(*idelis*).

b. Museo di Colonia. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 436 *g* 1; Schuermans, *l. c.*

708.

a CC PF
EX GER INF

b C G P F
EX · GER · INF

c CC · PF
EXGER · INF ·

d CC : PE :
EX : GER : INF

e C · C · P · F
EX · GER · INF

f EX · GER · INF
CC · P · E ·

711.

MARTI · VICT ·
GLADIATORES
C · G · P · F

712.

CLAVD · ALBINAE
TIB · CL · ALBINI
NAVARC . CLAS
GERM · FILIAE
M · POMPEIVS
PRISCIANVS
COIVGI OPTIMAE

709.

a LEG · XXX ·
CCPF

b REG · XXV
CC · P F

c C · G · P · F
M · XXX

710.

CC · P · F
CAT · VAL F ·

---

c. Voorburg (Olanda). Si scoprì in questo luogo una quantità di tegoli e di mattoni con queste lettere. Nel museo di Leida. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 23 *h* 1; Schuermans, p. 64, n. 354 B.

d. Nello stesso luogo. Brambach, n. 23, *h* 2; Schuermans, p. 64, n. 354 C.

Ǝ invece di F.

e. Cattwijk aan Zee (Olanda). Due mattoni. Brambach, n. 4, A*d*; Schuermans, p. 64, n. 354 D.

CC leggi CG; E leggi F.

708 *a.* Weisweiler presso Juliers. Brambach. *C. I. Rhen.*, n. 591; Schuermans, p. 64, n. 354 E *bis.*

1, Meglio che *c(ohortes) G(ermaniae) p(iae) f(ideles)* come propone il Brambach, v'è da leggere con lo Schuermans *c(lassis) G(ermanica) p(ia) f(idelis)*. — 2, *ex(ercitus) Ger(maniae) inf(erioris)*. Credo che *exercitus* sia al nominativo, non al genitivo, cioè che sianvi menzionati la *classis* e l'*exercitus*, non già la *classis exercitus*, come suppone lo Schuermans.

b. Medesimo luogo. Schuermans, p. 64, n. 354 E.

c. Cattwijk aan Zee (Olanda). Mattone. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 4 Aa 7; Schuermans, p. 64, n. 354 G.

d. Trovato in Olanda. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 139 * *g* (« laterculus suspectus est »); Schuermans, p. 64, n. 354 H.

e. Già presso Aquisgrana. « Ein Siegelstein von rother Farber mit sein vergoldeten Ecken », Brambach, *C I. Rhen.*, n. 630; Schuermans, p. 64, n. 354 I.

f. Tegolo trovato presso il castello di Britten (Olanda). Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 4 C 32; Schuermans, p. 64, n. 354 F.

709. *a.* Cattwijk aan Zee (Olanda). Mattone. Brambach. *C. I. Rhen.*, n. 4 A *c* 3; Schuermans p. 65, n. 354 J.

leg(io) XXX c(lassis) G(ermanica) p(ia) f(idelis).

b. Vicinanze di Nimega. Brambach, *C. I. Rhen.*, p. 361, n. 12 (fra le spurie); Schuermans p. 65, n. 354 K.

1, *(l)eg(io) XXV.*

c. Vicinanze di Rodenlirchen presso Colonia. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 436 *g* 2 (ovvero Rodingen presso Juliers; Steiner, *Codex inscr. Rom. Dan. et Rheni*, n. 1222); Schuermans, p. 65, n. 354 L.

2, M · XXX, « litteras significatione non magis capio ». Brambach — rettamente Schuermans: *(legio) XXX.*

710. Tegolo scoperto presso il castello di Britten (Olanda). Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 4 C 24; Schuermans, p. 65, n. 354 M.

2, *C. At(tius) Val(erianus) t(egularum) f(igulus)* ovvero *t(egulam) f(ecit)*.

711. Base scoperta in Olanda, poscia a Dordrecht. Da Smetius, Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 138, il quale nella lin. 3ª crede si possa leggere: *c(ohortium) G(ermaniae) p(iarum) f(idelium)*. È probabile la lettura dello Schuermans, p. 65, n. 354 M: *c(lassis) G(ermanicae) p(iae) f(idelis)*.

712. Romagnieux (Isère, arrond. de la Tour du Pin). « Cippe... extrait en 1839 de dessous le « maître-autel de l'Église paroissiale ». Allmer, *Inscr. ant. de Vienne*, I, p. 420. Cf. Atlas, n. 269.

713.

rosa
L · OCTAVIVS ·
L . F · ELAITES · GVB
ERNATOR · ANN ·
LVIII · STIP · XXXIII ·
H · S · E · DIONYSIVS ·
PLESTHARCHI · F · TRA
LLIANVS · SCRIBA ·
PRO · MERIT

714.

BACVRDO
SACRVM
M · ALBAN*i*VS
PATERNVS
OPTIO
V · S · L · M
II · SIL · COS

cornucopiae

in latere:

C · G · P · F

CLASSIS PANNONICA — CLASSIS MOESICA

Ad una delle due armate danubiane appartiene l'epigrafe tunisina (n. 715) del

715.

T · FLAVIO · T · FIL
QVIR · GALLICO
PROC · AVG · PROV
AFRIC · TRAC · KART
*pra*EF · CLASSIS · F////
K///I//////// AIN ////CII
IIIRI//////// IICI////////
//////////////////////////
//////////////////BVS
//////////////HADRI*ano*
/////II//////TO DATO///
/////////////I///////////
DECV*rio*NES · C · R · ET
mun.CIPES ·HISIDVENSES

prefetto *T. Flavius T. F. Quir. Gallicus.* La F. che segue alla voce *classis* è iniziale di *Flavia*, cognome tanto dell'armata di Pannonia, quanto di quella di Mesia.

---

713. « Eine halbe Stunde südlich von Köln liegt am Rhein 'die alte Burg' ». Aschbach, nei *Jahrbüch. des Ver.*, LXVI, p. 78, tav. V.

714. Colonia. Da altri, Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 385. Si può forse leggere nel lato con lo Schuermans, *Bull. de comm. de la Belg.*, XVIII, p. 65, n. 354 O: *c*(*lassis*) *G*(*ermanicae*) *p*(*iae*) *f*(*idelis*). Non v'è però da congetturare con questo erudito che il cornucopia alluda al nome della nave.

715. Krisch el Wed (*Chisiduo*) nella Tunisia. In una base infissa nel muro della moschea. Guérin, *Voy. dans la rég. de Tunis*, t. II, p. 186, n. 439, solamente le lin. 1-3 e il principio della 4; *C. I. L.*, VIII, n. 1269. Cf. Ferrero, *Sulle iscr. class. dell'Africa*, negli *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, XVII, 1881-82, p. 30.

5, *F*[*lav. Pann.*] ovvero *F*[*lav. Moes.*]. — 13-14, *decu*[*rio*]*nes c*(*ives*) *R*(*omani*) *et* [*muni*]*cipes* [*C*]*hisiduenses.*

CLASSIS INCERTA

716.

////////LASSIS /RAETORI//
'//////ATIVM · E · V · PATRON/
D · D · P · P ·
CVRATORE C · IVLIO OPTATO

717.

TI · IVLIO · AVG · L · HILARO
NAVARCHO · TIBERIANO
CLAVDIA · BASILEA
VIRO · SVO

719

CASPIVS
TRIERARCHVS
TI · CAESARIS · HIC
SITVS EST

718.

D · M
EVDAEMON · VIXIT ·
ANN · XXXX · ET ·
POSIS · QVI · VIX · ANN · XI ·
AVRELIVS DIOGENES TRIER
LIBERTIS · SVIS · BENE · MER · FEC

720.

HELIOS · CAESARIS · TRIERARCHVS

---

716. Trovata a Ghardimau (Tunisia), in una rovina presso il forte romano. È incisa sulla parte inferiore d'un piedestallo, di cui manca la sommità. Cagnat, in *Archives des missions scientifiques*, t. IX, p. 148, n. 248; Delattre, nel *Bulletin critique d'histoire, de littérature et de théologie*, II, 1881, p. 60 (Cf. Héron de Villefosse, *ibid.*, p. 79).

1, ... SSIS PRAETORE *(sic)* Delattre.

Da leggere: . . . . [*praefecto* (o *subpraefecto*) *c*]*lassis* [*p*]*raetori*[*ae Misen-* o *Raven*]*atium e*(*gregio*) *v*(*iro*) *patron*[*o*] *d*(*ecreto*) *d*(*ecurionum*) *p*(*ecunia*) *p*(*ublica*) *curatore C. Iulio Optato.*

717. Roma, nel museo Vaticano. *C. I. L.*, VI, n. 8927.

718. Roma, nel museo Capitolino. Maffei, *Mus. Ver.*, p. 299, 6; Guasco, *Mon. cap.*, p. 562; *Eph. ep.*, IV, p. 342, n. 925.

719. Scoperta a Roma. Indi ad Urbino. Fabretti, p. 362, XIV; *C. I. L.*, VI, n. 8928.

720. Scoperta nel 1735 a Roma, presso la porta Latina. Ora Firenze, nel palazzo Rinuccini. Donati, p. 331, 4; *C. I. L.*, VI, n. 8929.

721.

IVLIA · CLEO
PATRA · QVAE · ET
LEZBIA · C · IVLI · MEN
OETIS · F · ANTIOCHENSIS
SYRIAE · AD · DAPHNEM
VXOR · MALCHIONIS
CAESARIS · TRIERARCHI · DE
TRIERE · TRIPTOLEMO

722.

MAGIVS · MAXIMS
CLASSICVS · VIX · AN ·
L/MENSIBVS · II · ET ·
*R*OGATA · FABRICIA ·
*PR*OCLI · F · CAESARiES
MAX/MI · 7 · VXOR
S · S ·
M *AX*// *VS*
CON///*I*

723.

D · M
VALERIAE · FRONTINAE · NAT · GNIGISSAE · EX · CI
VITATE · COROPISSO · VICO · ASSERIDI · D · N · FILIAE · VAL
FRONTONIS · AQVILIENI · QVAE · VIXIT · ANN · XXVIIII
MENSIBVS · III · DIEBVS · XXI
VALERIVS · MONTANVS · NAV/VLAX · EX · EADEM
CIVITATE · ET · VICO · CONIVGI · KARISSIMAE · B · M · F

724.

D · M ·
INSTEIVS VICTORINVS · SCRi
BA CLASSIS LIBVRNA · AVG
VIX · AN · XLV HSE · S · T · T · L · TREBIA ·
MVSTIA · HERES · CONIVGI · FACIVN
DVM · CVRAVIT

---

721. Brindisi. Scoperta nel 1845. *C. I. L.*, IX, n. 41, cf. p. 652.

« Iulia Cleopatra filia C. Iuli Menoetis fuit, uxor Malchionis Caesaris servi. Nota trierarchum « Caesaris servum, non militem igitur; nisi fortasse Augustus primo tempore classiarios ex familia « sumpsit ». *Corp.*

722. Fra Scerscel e Novi nell'Algeria. Ora a Scerscel nel museo. Renier, *I. R. de l'Alg.*, n. 3932; mancante delle lettere inclinate *C. I. L.*, VIII, n. 9386. Cf. Ferrero, negli *Atti dell'Acc. delle Sc. di Torino*, XVII, 1881-82, p. 90.

. . . *Magius Maxim(u)s [(centurio) c]lassicus, vix(it) an(nis) L . . . mensibus II, et Rogata Fabricia Procli f. Caesarie(n)s(is) Max[i]mi (centurionis) uxor, [vixit annis . . . . Hic] s(iti) s(unt) . . . [Magius] Max[im]us [sibi et] con[iug]i.*

723. Scoperta a Terracina nel 1758. Pantanelli, ms. — *C. I. L.*, X, n. 8261.

6 « NAVILAX, traditur ». *Corp.*

Coropisso, città della Licaonia, nota per la menzione, che ne fa Strabone (XII, vi, 1, p. 568), da cui erroneamente è scritto Κοροπασσός, e per le monete (Eckhel, *Doctr. num. vet.*, III, p. 30). Ignota la nazione dei Gnigissi ed ignoto il vico Asseride, il quale è detto *d(omini) n(ostri)*, cioè di coloni imperiali.

È la prima iscrizione di un uomo appartenente alla marineria scoperta a Terracina, seppure è di un classiario.

724. Da Scerscel portata nel museo d'Algeri. Berbrugger, nella *Revue afric.*, IV, p. 461; Renier, *ibid.*, VIII, p. 285; *C. I. L.*, VIII, n. 9379. Cf. Ferrero, negli *Atti dell'Acc. di Torino*, XVII, 1881-82, p. 90.

725.

palma D ◊ M ◊ S *palma*
ANTONIO AVITO
MILITI EX N SVR
ORVM · VIXIT · AN
XXI · MILITAVIT
AN · VI · ANTONIVS
KARVS DVPLICAR
IVS · CLASSIS FRA
TRI BENE MEREN
palma TI FECIT PIO *palma*

727.

D · M ·
C · ANTHESTIVS NIGER
EX · III · CAPRICORNO/
NATIO · SVRVS · VIXIT
AN · XXX · MIL · AN /XII
L · LVCCEIVS · AQVILAS
EX · III AVG · B · M · FEC

726.

D ^ M
GARGILIAE · HONORATAE · SALDITANAE · VIX*it* .....
ANNOS · SINE · CRIMINE · VLLO · VIVITE · MORT*ales · mors*
OMNIBVS · INSTAT · DISCITE · QVI LEGITIS EG*regie vivere*
HER ENNIVS · ROGATVS SESCVPLARIVS · CLA*ssis* .....
MARITAE · MEAE · DIGNAE · ET · MERITAE · GARG*iliae · terra*
TIBI LEVIS SIT

728.

D M
AN////////
MAVRAN///
PR/// CLASSI//
AP

729.

FL MAR · THA · NAE C
ME · FEMINAE · NAT
CIVI · ANTIOCHIA
/// · FL LVPERC I
CLASSIS CON
MERITIS · EIV
KAL · FEB · CVM
TIBI · C

---

725. Scerscel. Schmitter, nel *Bull. épigr. de la Gaule*, II, 1882, p. 139, n. 3; e da apografo del sig. J. Poinssot.

726. Scerscel. « Stèle brisée à droite ainsi qu'à la partie supérieure, qui présente quelques vesti-« ges d'une figure en relief. A l'*El Kantara* ». Schmitter, nel *Bull. épigr. de la Gaule*, II, 1882, p. 278, n. 31.

727. Proveniente da Roma. Lastra di marmo con pessime lettere. Ora nel museo di Stockholm. *Eph. ep.*, IV, p., 342, n. 924.

728. Fréjus. J. Antelmi, *De initiis*, etc., p. 22; Muratori, p. 794, 2 (misit Bimardus). — Aubenas, *Hist. de Fréjus*, p. 749, n. 13.

Collocai quest'epigrafe vista dall'Antelmi ed ora perita fra le sospette (n. 32*). Essa però dev'essere rivendicata fra le genuine. Non potendosene stabilire l'età, ed essendo probabilmente posteriore alla soppressione della stazione navale di *Forum Julii*, è meglio annoverarla fra quelle di armata incerta.

4, vi si può leggere *pr*[*aef*(*ectus*)], *pr*[*inc*(*eps*)], *pr*[*inc*(*ipalis*)].

729 Bolsena. Stevenson, nelle *Notizie degli scavi*, 1880 (agosto), p. 279.

Leggo: *Fl*(*aviae*) *Marthanae c*[*astissi*]*mae feminae nati*[*one Syrae*] *civi Antiochiae* .... *Fl*(*avius*) *Luperci*[*us*]... *classis Com*[*agenensis* (o *Comensis*) *pro*] *meritis eiu*[*s deposita* (?)...] *kal*(*endas*) *feb*(*ruarias*) *cum*... [*pax*] *tibi c*[*um sanctis*].

Questa e la iscrizione n. 699 sono le sole cristiane, che si conoscano, spettanti alle armate.

731.

CLASSIS · F
MERC/
CVRA · AGEN

730.

SCAEVA · LICCAI ·
MIL · DE · LIB · TRITON
O M · VETTI VIXI · AN ·
XXXV · MIL AN V////
H · S

732.

\IN
////////////////
OLABRIARII
LASSIS AV
JEI/////// PID
V S I M

Appartiene al secolo IV o al V. Le lettere CON nella linea 5 non possono essere altro che le iniziali del nome dell' armata. Come avvertì il ch. editore, si possono supplire con *Comensis* o *Comagenensis*, armate esistenti al tempo delle *Notitia dignitatum*.

730. Scoperta presso Brindisi. *C.I.L.*, IX, n. 42.

731. Roma. « Frammento di lastrone marmoreo scorniciato trovato negli scavi della via Sacra ». Lanciani, nel *Bull. della comm. arch. com. di Roma,* 1882, p. 163, n. 564; *Not. degli scavi*, 1882 (aprile), p. 222.

1, *classis F*[*l*(*aviae*) *Pannonicae* vel *Moesicae*]?

732. Scoperta presso Andernach. Ora a Bonna, nel museo. Brambach, *C. I. Rhen.*, n. 677.

4, Pare si debba leggere [*c*]*lassis*, e quindi si debba collocare fra le classiarie questa epigrafe, che ho respinto, *Arm.*, p. 62, nota 9. A quale armata appartenga è impossibile determinare. Lo Schuermans (*Bull. des comm. d'art et d'arch. de la Belg.*, XVIII, p. 77. Z.) la colloca tra quelle della germanica, e non esita a leggere 4-5: *Au*[*gustae*] *Ger*(*manicae*) *p*(*iae*) *f*(*idelis*), argomentando il titolo di *Augusta* dato all'armata del Reno, titolo che sinora non risulta da altri documenti e che, ove pure si leggesse con certezza in questa lapide, potrebbe anche convenire all'alessandrina. Egli scorge pure lin. 3 i *dolabrarii*.

STAZIONI NOTE DELLE ARMATE

NEI

PRIMI TRE SECOLI DELL' IMPERO.

ARMATE	STAZIONI	Testimonianze
	Armate dei mari.	
Classis Misenensis	Miseno e luoghi vicini (Campania).	Svetonio, *Oct.*, 49; Tacito, *Ann.*, IV, 5; Plinio, *Ep.*, VI, 16; Vegezio, IV, 31, ecc. La maggior parte delle iscrizioni spettanti a quest'armata.
	Ostia (Lazio)	Svetonio, *Vesp.*, 8. Iscr. n. 7, 166, 196, 216.
	Centuncelle (id.)	Iscr. n. 146, 149, 161, 179, 191, 252, 270, 284, 320.
	Aleria (Corsica)	Iscr. n. 639, 675bis. Cf. Tacito, *Hist.*, II, 16.
	Mariana (id.)	Iscr. n. 660.
	Sardegna	Iscr. n. 220, 676.
	Pireo (Acaia) (?)	Iscr. n. 338, 607.
	Roma (soldati per il servizio nell'anfiteatro, aventi il loro quartiere nella regione III).	Lampridio, *Comm.*, 15. *Not. regionum*, reg. III. Cf. Svetonio, *Vesp.*, 8. Iscr. n. 8, 9, 10, 152, 158, 159, 181, 199, 207, 208, 221, 234, 274, 282, 286, 290, 298, 327, 329, 332, 351, 353.
Classis Ravennas ..	Ravenna (Emilia)	Svetonio, *Oct.*, 49; Tacito, *Ann.*, IV, 5; Vegezio, IV, 31. La maggior parte delle iscrizioni spettanti a quest'armata.
	Aquileia (Venezia)	Iscr. n. 553, 554, 562, 576 (forse dell'armata di Ravenna). Cf. n. 214.
	Centuncelle (Lazio)	Iscr. n. 395, 432, 476.

ARMATE	STAZIONI	TESTIMONIANZE
Classis Ravennas . .	Pireo (Acaia) (?)	Iscr. n. 468.
	Roma (soldati per il servizio delle naumachie, aventi il loro quartiere nella regione XIV).	*Not. regionum*, reg. XIV. Iscr. n. 410, 413, 439, 444, 445, 455, 493.
Classis Foroiuliensis	*Forum Iulii* (Fréjus) (Gallia Narbonese).	Strabone, IV, p. 184; Tacito, *Ann.*, IV, 5; cf. Plinio *N. H.*, III, 35. Iscr. n. 703.
Classis Alexandrina	Alessandria (Egitto)	Il nome stesso.
	Altri luoghi sul Nilo, specialmente presso le cateratte.	Iscr. n. 494, *ostraka* raccolti sotto il n. 497.
	Cesarea (Mauretania Cesariense).	Iscr. n. 543, 546, 705. V. *Classis Syriaca.*
Classis Pontica . . .	Trapezunte (Cappadocia) (al tempo di Vespasiano).	Tacito, *Hist.*, III, 47 (cf. II, 83); Flavio Giuseppe, *Bell. Iud.*, II, XVI, 4.
	Perinto (Tracia) (al tempo di Domiziano).	Iscr. n. 498.
	Cizico (Misia) (al tempo di Elagabalo).	Iscr. n. 499.
Classis Syriaca . . .	Porti della Siria	Il nome stesso. Cf. il nome di *classis Seleucena* da Seleucia, nella c. 1 (Valentiniano e Valente) Th. C., *De classicis* (X, 23), dell'anno 369.
	Porti dell' Asia Minore, della Grecia e delle isole dell' Egeo.	Iscr. n. 501 (Efeso), n. 502 (Tenos), n. 503 (Pireo), n. 504 (Teos nella Lidia).
	Cesarea (Mauretania Cesariense).	Iscr. n. 502, 543. Cf. n. 551, 722, 724, 725, 726.
Classis Britannica	*Gessoriacum* (Boulogne) (Gallia Belgica).	Iscr. n. 506-512.
	Dubrae (Dover) (Britannia). *Portus Lemanae* (Lymne) (id.).	Iscr. n. 513, 517.
	Presso il Vallo d'Adriano. (id.)	Iscr. n. 514, 515.
Classis Libyca	Porti della Libia, (ossia Cirenaica e Marmarica) (Cirene, Paretonio).	Il nome stesso.

ARMATE	STAZIONI	TESTIMONIANZE
	Armate dei fiumi e dei laghi.	
Classis Germanica .	Sul Reno in parecchie stazioni, fra cui:	
	Moguntiacum (Magonza) (Germania superiore).	Iscr. n. 532, 533.
	Autunnacum (Andernach) (id.).	Iscr. n. 525, 531.
	Bonna (Germania inferiore).	Floro, II, 30 (IV, 12).
	Colonia Agrippinense (id.).	Iscr. n. 523, 530, 534, 707 *a*, *b*, 709 *c*, 713, 714.
	e sul basso Reno nella odierna Olanda (id.).	Iscr. 707 *a*, *c*, *d*, *e*, 708 *c*, *d*, *f*, 709 *a*, *b*, 710, 711.
Classis Pannonica .	Sul medio Danubio in parecchie stazioni nella Pannonia.	Il nome stesso. Iscr. n. 536, 537, 538, 539.
	Sul basso Danubio, in parecchie stazioni nella Mesia	Il nome stesso. Iscr. n. 540.
Armatetta sul lago Brigantino.	Lago Brigantino (Vindelicia).	Strabone, VII, I, 5. Cf. Dione Cassio, LIV, 22.

STAZIONI DELLE ARMATE

AL PRINCIPIO DEL SECOLO V

SECONDO LA *Notitia dignitatum*

ARMATE	STAZIONI	DA CHI DIPENDENTI	LUOGO della *Not. dignit.*
	Impero d'Occidente.		
Classis Misenatium	Miseno (Campania).	*Magister militum praesentalis a parte peditum.*	Occ., XLII, 11.
Classis Ravennatium	Ravenna (Flaminia)	id.	» XLII, 7.
Classis Venetum. . .	Aquileia (Venezia)	id.	» XLII, 4.
Classis Comensis . .	Como (Liguria)	id.	» XLII, 9.
Milites muscularii.	Massilia (Viennese)	id.	» XLII, 16.
Classis fluminis Rhodani.	Vienna, Arelate (Gallia Riparense).	id.	» XLII, 14.
Classis barcariorum.	*Ebrudunum Sapaudiae,* (Yverdon sul lago di Neufchâtel) (id.).	id.	» XLII, 15.
Classis Ararica . . .	*Caballodunum* (probabilmente Chalôns-sur-Saône) (Lugdunese prima).	id.	» XLII, 21.
Classis Anderetianorum.	Parisii (Lugdunese Senonia).	id.	» XLII, 23.
Classis Sambrica. . .	*Locus Quartensis, locus Hornensis* (probabilmente sulla Somma ed alla foce di questo fiume) (Belgica seconda).	*Dux Belgicae secundae.*	» XXXVIII, 8.
Numerus barcariorum	*Confluentes* (Coblenz al confluente dell'Aar e del Reno), *Brecantia* (Bregenz sul lago di Costanza) (Rezia).	*Dux Raetiae primae et secundae.*	» XXXV, 32.

ARMATE	STAZIONI	DA CHI DIPENDENTI	LUOGO della *Not. dignit.*
Classis Lauriacensis	*Lauriacum* (Lorch) (Norico Ripense).	*Dux Pannoniae primae et Norici Ripensis.*	Occ., XXXIV, 43.
Classis Arlapensis et Maginensis (o Comagenensis).	*Arlapa* (Gross-Pöchlarn), *Comagenae* (presso Tuln) (id.).	id.	» XXXIV, 42.
Legio secunda Italica militum liburnariorum.	*Ioviacum* (forse Aschach) (id.).	id.	» XXXIV, 37.
Legio prima Noricorum militum liburnariorum etc.	*Adiuvense* (forse *Iovavium*, ora Salzburg) (id.).	id.	» XXXIV, 40.
Legio liburnariorum primorum Noricorum.	*Fafiana* (forse presso Ips, vicino a Gross-Pöchlarn) (id.).	id.	» XXXIV, 41.
Classis Histrica.	*Carnuntum* (Petronell), *Vindobona* (Vienna) (Pannonia prima).	id.	» XXXIV, 28.
Legio quartadecima gemina militum liburnariorum etc.	*Carnuntum.*	id.	» XXXIV, 26
Legio decima et quartadecima geminae militum liburnariorum.	*Arrabona* (Raab) (id).	id.	» XXXIV, 27.
Classis Histrica.	*Mursa* (Eszeg) (Pannonia seconda).	*Dux Pannoniae secundae Ripariensis et Saviae.*	» XXXII, 52.
Classis prima Flavia Augusta.	*Sirmium* (Mitrovic) (id).	id.	» XXXII, 50.
Classis secunda Flavia.	*Graium* (luogo sconosciuto) (id.).	id.	» XXXII, 51.
Classis prima Pannonica.	*Servitium* (Gradiska) (Savia).	id.	» XXXII, 55.
Classis Aegetensium sive secunda Pannonica.	*Siscia* (Siszek) (id.).	id.	» XXXII, 56.
Classis Histrica.	*Florentia* (forse presso Mohácz) (Valeria Ripense).	*Dux Valeriae Ripensis.*	» XXXIII, 58.

ARMATE	STAZIONI	DA CHI DIPENDENTI	LUOGO della *Not. dignit.*

Impero d'Oriente.

ARMATE	STAZIONI	DA CHI DIPENDENTI	LUOGO della *Not. dignit.*
Classis Histrica.	*Viminacium* (Kostolatz) (Mesia prima).	*Dux Moesiae primae*	Or., XLI, 38.
Classis Stradensis et Germensis.	*Margum* (presso il fiume *Margus* ora Morava) (id.).	id.	» XLI, 39.
Naves amnicae et milites ibi deputati.	.... (Mesia seconda)	*Dux Moesiae secundae.*	» XL, 36.
Milites tertii nauclarii.	*Appiaria* (forse presso Rusciuk) (id.).	id.	» XL, 22.
Milites nauclarii Altinenses.	*Altinum* (forse Altenova nella Dobruscia) (id.).	id.	» XL, 28.
Classis Histrica.	*Aegeta* (presso il ponte di Traiano: vicinanze di Turn-Severin) (Dacia Ripense).	*Dux Daciae Ripensis.*	» XLII, 42.
Classis Ratiariensis.	*Ratiaria* (Arcer) (id.).	id.	» XLII, 43.
Legio secunda Herculia musculorum Scythicorum et classis.	*Inplateypegiis* (?) (Scizia).	*Dux Scythiae.*	» XXXIX, 35.
Milites nauclarii.	*Flaviana* (?) (id.).	id.	» XXXIX, 20.

INDICI DELLE ISCRIZIONI

I

NOMI DI UOMINI E DI DONNE

È notato il grado agli uomini appartenenti alla marineria — m = *miles*; v = *veteranus*; M = *classis Misenensis*; R = *classis Ravennas*.

II

UFFICII CLASSIARII

A rationibus *probab.* M., 629.
Adiutor trierarchi M., 622.
Armorum custos.
armorum custos M., 617, 619. — armorum M., 618, 673, 686.
Centurio.
centurio M., 596, 597, 599; R., 699. — centurio classicus cl. inc., 722. — centurio veteranus M., 600. — emeritus ex c(enturione) M., 598.
Cornicularius praefecti M., 621.
Dupliciarius *vel* duplicarius.
duplicarius cl. inc., 725. — dupl. M., 638; R., 702. — miles dupliciarius M., 631. — miles dupl. M., 630. — faber dupl. M., 623. — medicus dupl. M., 625.
Emeritus.
emeritus ex c(enturione) M., 598.
Exactus cl. Alex., 705.
Exceptor trier. R., 702.
Faber.
faber M., 624, 625; R., 701, — faber dupl. M., 623.
Gubernator.
gubernator M., 601, 602; cl. Germ. 713.
Librarius M., 628.
Manipularis = miles.
manipularis M., 656, 670, 675, 679, 693.
Medicus.
medicus dupl. M., 626.
Miles *passim*.
Nauphylax.
nauphylax M., 606, 607. — naufylax M., 605; cl. inc., 724.
Navarchus.
navarchus M., 585, (586?); cl. Germ., 712. — bis navarchus M., 587. — navarchus Tiberianus cl. inc., 717. — navarchus princeps M., 584.
. . . officiorum (*munus classiarium?*) M., 693.
Optio.
optio M., 608-614, 618, 665; cl. Germ., 714. — veteranus ex optione R., 700.
Praefectus.
praefectus classis (R.), 698.
praef. classis praet. Misen., 582.
praefectus *vel* subpraefectus M. *vel* R., 716.
cornicul. praef. *v. h. v.*
Princeps *v.* navarchus.
Principalis.
bix(illarius) pri(ncipalis) (?) M., 620.
Proreta.
proreta M., 603, 604.
Scriba.
scriba M., 627; cl. Germ., 713; cl. inc., 724.
Sesquipliciarius.
sescuplarius cl. inc., 726.
Suboptio M., 615, 616.
Supraefectus.
subpraef. classis praet. Misenens., 583.
subpraef. classis Alexandriae, 704.
Trierarchus.
trierarchus M., 588-593, 595; cl. Alex., 705; cl. inc., 718. — trierarchus Caesaris cl. Foroiul., 703; cl. inc., 720, 721. — trierarchus Ti. Caesaris, 719. — [trierarchus] Augg. M., 594.
Veteranus.
centurio veteranus M., 600. — veteranus ex optione R., 700. — veteranus M., 632, 636, 637, 648, 651, 658, 659, 666, 684. — veteranus Aug(usti) n(ostri) M., 668, 669.
Vexillarius (?).
bix(illarius) pri(ncipalis) (?) M., 620.

III

NOMI DELLE NAVI

Le navi, il cui nome compare per la prima volta, sono segnate con asterisco.

CLASSIS MISENENSIS

Quinqueremes

* *Aug(usta)*, 702.
Victoria, 605, 656.

Quadriremes

Dacicus, 603, 623, 628.
Fortuna, 612.
* *Liber(tas)*, 672.
Venus, 622.
Vesta, 641.

Triremes

* *Aesculapius*, 643.
Athenonice, 675, 678, 686.
Aug(usta) od *Aug(ustus)*, 606, 687.
Capricornus, 671.
Concordia, 683.
Cupido, 689.
Danubius, 647.
Euphrates, 614.
Fides, 604, 695.
F . . ., 602.
Iuno, 602.
* *Iupiter*, 635, 689.
Liber? 631.
Libertas, 671.
Mercurius, 643.
Minerva, 679.
Nilus, 650 *b*.
Oceanus, 615.
Pax, 634, 640.
Perseus, 613, 689 (?).
Pietas, 616.
Salus, 673, 677.
Satyra, 618, 682.
Silvanus, 664, 686.
Sol, 619, 690.
Tigris, 618, 667.
Triumphus, 680.
Venus, 608, 609, 654.
Victoria, 646, 661
Virtus, 642.

Liburnae

* *Libertas*, 670.
Nereis, 664.
* *Taurus ruber*, 625.
Virtus, 617.

Incertae

Tigris, 682.

CLASSIS RAVENNAS

Quinqueremes

Aug(usta), 702.

Triremes

* *Pietas*, 702.

CLASSIS ALEXANDRINA

Liburnae

* *Nilus*, 705.

CLASSIS INCERTA

Triremes

Aug(usta), 727.
Capricornus, 727.
* *Triptolemus*, 721.

Liburnae

* *Aug(usta)*, 724.
* *Triton*, 730.

Alla tavola dei nomi delle navi data in *Armate*, p. 28, oltre alle correzioni segnate nelle *aggiunte* in fine del volume, si facciano ancora le seguenti: dall'*hexeris Ops* della armata di Miseno si tolga il n. 299; dalle navi di quest'armata si sopprima la quadrireme *Olivus;* si corregga in *Athenonice* la trireme *Athenae;* si aggiunga alla trireme *Pollux* il n. 279.

IV.

PATRIA DEI CLASSIARII

Vedi nel testo pag. 12-14.

ETÀ IN CUI I CLASSIARII PRINCIPIARONO A MILITARE

Ad anni	8 (?)	principiarono a militare classiarii	1
»	9 (?)	»	2
»	10 (?)	»	1
»	11 (?)	»	1
»	15	»	6
»	16	»	4
»	17	»	9
»	18	»	27
»	19	»	24
»	20	»	57
»	21	»	29
»	22	»	22
»	23	»	21
»	24	»	12
»	25	»	14
»	26	»	6
»	27	»	6
»	28	»	5
»	29	»	2
»	30	»	5
»	32	»	3
»	33	»	2
»	34	»	1
»	35	»	5
»	37	»	4
»	40 (?)	»	1
»	44	»	1

AGGIUNTE E CORREZIONI

alle iscrizioni contenute nel libro

L'ORDINAMENTO DELLE ARMATE ROMANE

---

13. Fu pubblicata poi nel *C. I. L.*, X, n. 3618 dal Mommsen, che la vide. L'iscrizione è divisa in otto linee: TI · IVLIO · AVG · L | OPTATO | PONTIANO | PROCVRATORI · ET | PRAEFECT · CLASSIS | TI · IVLIVS · | TI · F · FAB | OPTATVS · II · VIR. Nelle parole *Optatus Elipertius* dei codici pliniani, ove si accenna a questo personaggio (*N. H.*, IX, 17), sagacemente il Mommsen indovinò doversi leggere *Optatus e libertis*.

16. Pubblicata in *C. I. L.*, X, n. 1127. Esiste tuttora a Mercogliano, dove la vide il Mommsen nel 1876 destinata per il museo di Napoli, nel quale non è ancora entrata, siccome mi annunciò il ch. de Petra.

1, in vece di GN leggi CN. — 2, medesima correzione — 4 fine, da supplire *proc.* in vece di *leg.* — 5, leggi SYRIA*e* — 7 fine, aggiungi *proc.* — 8, da supplire *Proc. au.* — 9 e segg., GVST · ORDINIBV*s ex* | EQVITE · ROMAN*o exercitato* | RI · EQVIT*um praetorian* | > · COH · I · *pr. leg. iii cyr. iii gall.* | XV AP*oll*. . . . . . | . . . .

17. = *C. I. L.*, X, n. 1582.

4 fine, 5 princ., *co* | HORTIVM.

18. = *C. I. L.*, X, n. 3336.

19. = *C. I. L.*, X, n. 3323.

1, *sarmatico max* . . . . *persico max* . . . . . | *german*ICO MAX VII *Britan*-*n*ICO.

20. = *C. I. L.*, X, n. 3344.

Il Mommsen la giudica del secolo V.

22. = *C. I. L.*, X, n. 3334, rigettando assolutamente come spuria la parte inferiore.

Vedasi al detto luogo del *C. I. L.* il commentario giuridico a questa epigrafe. L'essere i contendenti ricorsi al sottoprefetto dell'armata e non alla giurisdizione ordinaria si può spiegare supponendo che il fondo, di cui si quistionava, fosse posto fra i sepolcri de' classiarii; quindi colui, che presiedeva all'amministrazione degli accampamenti, avea competenza per decidere una sì fatta controversia. Si conosce il titolo sepolcrale eraso de' Patulcii (*C. I. L.*, X, n. 2826, conservato dall'Accursio).

23. = *C. I. L.*, X, n. 769.

24. = *C. I. L.*, X, n. 867.

26. = *C. I. L.*, X, n. 7855.

Si levi la nota prima.

28. = *C. I. L.*, X, n. 3335.

29. = *C. I. L.*, X, n. 3339.

31. = *C. I. L.*, VIII, n. 1322. Scoperta a Takâber (l'antica Thuccabor) in Tunisia.

5, TI mon. — 10 fine, IRSI — 11 fine, COIV*gi*.

32. = *C. I. L.*, X, n. 3345. Già a Miseno prima di passare nel collegio dei Gesuiti a Napoli.

33. = *C. I. L.*, X, n. 3340.

4 pr., « littera ante AVERAT non tam « fuerat N quam R ». *Corp.* Cf. *Arm.*, p. 37.

34. = *C. I. L.*, X, n. 3341.

4, meglio che *ex n(umero) princ(ipum) cl(assis)* è da leggere *ex n(avarcho) princ(ipe)*.

36. = *C. I. L.*, X, n. 3350.

3, levare il *sic*. La lettura BIS è esatta e confermata dal n. 587.

37. « Nuper Miseni inventum ». Garrucci, *Cl. pr. Mis.*, n. 26; *C. I. L.*, X, n. 3351.

38. = *C. I. L.*, X, n. 3349.

39. = *C. I. L.*, X, n. 3362.

40. = *C. I. L.*, X, n. 3350.

41. = *C. I. L.*, X, n. 3358.

42. = *C. I. L.*, X, n. 3359.

44. = *C. I. L.*, X, n. 3361.

45. = *C. I. L.*, X, n. 3355.

46. = *C. I. L.*, X, n. 3337.

48. = *C. I. L.*, X, n. 3365.

52. = *C. I. L.*, X, n. 3371.

53 a. = *C. I. L.*, X, n. 3600 — b = *C. I. L.*, X, n. 3372.
54. = *C. I. L.*, X, n. 3374.
55. = *C. I. L.*, X, n. 3375.
1, DAZANTIS.
56 a. = *C. I. L.*, X, n. 3376 — b = *C. I. L.*, X, n. 3611.
a 7 fine, in vece di BEN leggi FILI.
57. = *C. I. L.*, X, n. 3428.
58 a. = *C. I. L.*, X, n. 3385 — b = *C. I. L.*, X, n. 3509.
59. = *C. I. L.*, X, 3430.
60. = *C. I. L.*, X, n. 3431.
61. = *C. I. L.*, X, n. 3432.
62. = *C. I. L.*, X, n. 3444. Ora a Firenze, nel museo. Da me trascritta.
6, MILITAVIT.
63. = *C. I. L.*, X, n. 3435.
6, GYBERN.
64. = *C. I. L.*, X, n. 3436.
65. = *C. I. L.*, X, n. 3437.
7 fine, HF
66. = *C. I. L.*, X, n. 3484.
67. = *C. I. L.*, X, n. 3483.
68. = *C. I. L.*, X, n. 3446. Ora a Firenze, nel museo. Da me trascritta.
69. = *C. I. L.*, X, n. 3445.
70. = *C. I. L.*, X, n. 3453.
71. = *C. I. L.*, X, n. 3447.
72. = *C. I. L.*, X, n. 3451 (*recognovi*).
73. = *C. I. L.*, X, n. 3452. Ora a Napoli, in casa del conte Vargas-Macciucca, salita di San Potito.
74. = *C. I. L.*, X, n. 3454.
75. = *C. I. L.*, X, n. 3449.
76. = *C. I. L.*, X, n. 3461.
77. = *C. I. L.*, X, n. 3464 *a*.
Trascrissi il frammento conservato nel museo di Firenze, in cui si legge: ///// AEGYPTII VIXIT | ///// MIL · ANN · XXII | //////VS CLEMENS · EX | ///// VESTA · C · ARRVNTIVS | ///ENS · OPT · LIB · NEREIDE | ////B M F.
78. = *C. I. L.*, X, n. 3462.
79. = *C. I. L.*, X, n. 3464.
80. = *C. I. L.*, X, n. 3467.
82. = *C. I. L.*, X, n. 3470.
83. = *C. I. L.*, X. n. 3468.
3, « IALLI potius quam LAELI, « quamquam elementa ILET in titulo « vix differunt ». *Corp.* — 3, « LICCAE « potius quam LICCAT ». *Id.*
84. = *C. I. L.*, X, n. 3473.
85. = *C. I. L.*, X, n. 3474.
86. = *C. I. L.*, X, n. 3475.
87. = *C. I. L.*, X, n. 3476.
88. = *C. I. L.*, X, n. 3471.
89. = *C. I. L.*, X, n. 3472. Tuttora a Napoli presso i PP. Filippini.
90. = *C. I. L.*, X, n. 3479.
91. = *C. I. L.*, X, n. 3456.
92. = *C. I. L.*, X, n. 3394.
93. = *C. I. L.*, X, n. 3396.
94. = *C. I. L.*, X, n. 3410.
95. = *C. I. L.*, X, n. 3397.
96. = *C. I. L.*, X, n. 3399.
97. = *C. I. L.*, X, n. 3398.
2 princ., T ·
98. = *C. I. L.*, X, n. 3395. Da me trascritta.
99. = *C. I. L.*, X, n. 3409.
100. = *C. I. L.*, X, n. 3403.
101. = *C. I. L.*, X, n. 3404.
102. = *C. I. L.*, X, n. 3406.
103. = *C. I. L.*, X, n. 3407.
104. = *C. I. L.*, X, n. 3401.
105. = *C. I. L.*, X, n. 3495.
6, *munici(pi)* meglio che (*amico*).
106. = *C. I. L.*, X, n. 1080. Ora a Pompei « apud J. Bracall ». V. *C. I. L.*, X, p. 969.
107. = *C. I. L.*, X. n. 3413.
108. = *C. I. L.*, X, n. 3411.
109. = *C. I. L.*, X, n. 3413.
110. = *C. I. L.*, X, n. 3494.
111. = *C. I. L.*, X, n. 3480.
4 fine, DA . . . in vece di M.
112. = *C. I. L.*, X, n. 3392.
114 a. = *C. I. L.*, X, n. 3423. — b = *C. I. L.*, X, n. 3427.
b 2 pr., T · in vece di L : — 6, SAENIVS. — 7 pr., ///MVLVS.
115. = *C. I. L.*, X, n. 3424. Presso i PP. Filippini.
116. = *C. I. L.*, X, n. 3425.
117. = *C. I. L.*, X, n. 3419.
118. = *C. I. L.*, X, n. 3420.
119. = *C. I. L.*, X, n. 3499.
Nucherina è il nome della patria (*Nuceria*). Alla medesima famiglia di questa donna appartiene forse l'iscrizione baiana pubblicata dal Gori (*Symb. litt.*, I, p. 48), della quale parte esiste a Napoli (*C. I. L.*, X, n. 1981), posta da un Caio Modio Valentino alla madre Giulia Auta *natione vern. Nucherinae*.
120. = *C. I. L.*, X, n. 3500. Nel museo di Firenze. Da me trascritta. Mancano le due prime linee conservate dal Vignoli.

121. = *C. I. L.*, X, n. 3414.
122. = *C. I. L.*, X, n. 3493.
123. = *C. I. L.*, X, n. 3487 (con qualche diversità nella divisione delle linee, avendo l'editore seguito l'Accursio, nei cui manoscritti si trova conservato questo titolo).
124. = *C. I. L.*, X, n. 3501.
125. = *C. I. L.*, X, n. 3415.
b 2 pr., levare C.
126. = *C. I. L.*, X, n. 3441.
128. = *C. I. L.*, X, n. 3599.
3, *med.* non sembra si possa leggere *med*(*ico*). Secondo il Mommsen *Med*(*iolaniensi?*).
129. = *C. I. L.*, X, 3442.
6, « in litura restitutus est ». *Corp.*
130. = *C. I. L.*, X, n. 3574.
2-3, *se* | RAPION · Non è quindi di un *rationalis*, ma di un semplice soldato. — 3. Il nome egizio persuade a supplire A(*lexandrinus*). — 5 fine, MI *l.*
131. = *C. I. L.*, X, n. 3433.
132. = *C. I. L.*, X, n. 3440.
133. = *C. I. L.*, X, n. 3488.
134. = *C. I. L.*, X, n. 3489.
2, PATERN.
135. = *C. I. L.*, X, n. 3380.
136. = *C. I. L.*, X, n. 1954.
137. = *C. I. L.*, X, n. 3493.
138. = *C. I. L.*, X, n. 1957.
139. = *C. I. L.*, X, n. 3345.
140. = *C. I. L.*, X, n. 3503.
141. = *C. I. L.*, X, n. 3506.
142. = *C. I. L.*, X, n. 3505. Nel museo di Napoli. Fiorelli, *Cat.*, n. 651.
143. = *C. I. L.*, X, n. 3508.
144. Questo numero va levato. È un frammento d'iscrizione puteolana non classiaria, che trovasi intera in Fiorelli, *Cat.*, n. 1031; *C. I. L.*, X, n. 1790.
145. = *C. I. L.*, X, n. 3417. A Firenze, nel museo.
147. = *C. I. L.*, X, n. 3511.
148. = *C. I. L.*, X, n. 3459.
151. = *C. I. L.*, X, n. 3514.
154. = *C. I. L.*, X, n. 3516. Ora a Londra, nel museo Britannico.
155. = *C. I. L.*, X, n. 3517.
157. = *C. I. L.*, X, n. 3518.
163. = *C. I. L.*, X, n. 3521.
164. = *C. I. L.*, X, n. 3378.
165. = *C. I. L.*, X, n. 3377.
167. = *C. I. L.*, X, n. 3522.
168. = *C. I. L.*, X, n. 3523
169. = *C. I. L.*, X, n. 3523.
170. = *C. I. L.*, X, n. 3520. Ora a Firenze, nel museo.
171. Questo numero va levato. Il frammento pubblicato dal Garrucci, *Cl. pr. Mis.*, n. 30, non è altro che parte del titolo, da lui dato al n. 214 e ripetuto al n. 76 della mia raccolta.
172. = *C. I. L.*, X, n. 3530.
173. = *C. I. L.*, X, n. 3532.
174. = *C. I. L.*, X, n. 3534.
2, PITONI MIL EX — 4, AEGYP — 5, XX/IIII — 6, GENIAL.
175. = *C. I. L.*, X, n. 3608.
176. = *C. I. L.*, X, n. 469.
178. = *C. I. L.*, X, n. 3535.
180. = *C. I. L.*, X, n. 3422.
182. = *C. I. L.*, X, n. 3386: « descripsi « non recte; iam restitui veram lectionem « quam dederat Garruccius ».
2, « ZECAEPR mihi visum est, ZE- « CABER Garruccio, sed ut neutri de « lectione satis constaret ». *Corp.* — 4, ANN · XVII — 5, DOMITIVS DRACO.
183. = *C. I. L.*, X, n. 3536.
6, MERENT.
184. = *C. I. L.*, X, n. 3539.
185. = *C. I. L.*, X, n. 3540.
186. = *C. I. L.*, X, n. 3543.
187. = *C. I. L.*, X, n. 3546.
189. = *C. I. L.*, X, n. 3547. A Firenze, nel museo.
192. = *C. I. L.*, X, n. 635, che segue la lezione del Giovenazzi (*Cod. Vat.*), migliore di quella dell'Anastasi.
2, CAESIVS NEh — 3, MIL · EX — 4, NAT · NIX « fortasse scr. NAT . « AI · LX ». *Corp.*
193. = *C. I. L.*, X, n. 3554.
194. = *C. I. L.*, X; n. 3552.
195. = *C. I. L.*, X, n. 3555. Presso i PP. Filippini.
198. = *C. I. L.*, X, n. 3558.
200. = *C. I. L.*, X, n. 3661.
2, VENETVS.
[. . . *C*]*assius Vene*[*ti·f.*] *Venetus vete*[*ra*]*nus ex classe si*[*bi et*] *Firmio Proto et* [. . . . .]*ae Moschidi*, etc.
202. = *C. I. L.*, X, n. 3652.
203. = *C. I. L.*, X, n. 3551.
204. = *C. I. L.*, X, n. 3563.
205. = *C. I. L.*, X, n. 3564.
206. = *C. I. L.*, X, n. 3641.

209. = *C. I. L.*, X, n. 3566.

210. = *C. I. L.*, X, n. 3569.

211. = *C, I. L.*, X, n. 3660.

212. = *C. I. L.*, n. 3570.

7, si può anche leggere [*d*(*e*)] *p*(*ecunia*) *s*(*ua*).

213. = *C. I. L.*, X, n. 3618.

2, C · CRAVONIVS. — 4, NATIONE DAL*m*.

219. = *C. I. L.*, X, n. 3576.

7, /////IVS · FR/////

220. = *C. I. L.*, X, n. 7592.

7 pr., il mio amico dott. E. Pais rivide, a mia richiesta, l'iscrizione, e mi assicurò non esistere il segno ⟩, posto dal *Corpus*, bensì trovarsi C Ɔ N col secondo segno abbastanza visibile, onde si deve leggere *c*(*enturia*) *Cn*(*aei*) *Valeri*. — 9, LIT.

222. = *C. I. L.*, X, n. 3578.

4, LONGINIVS.

224. = *C. I. L.*, X, n. 3550.

4, MILI AN.

225. Questa lapide stava al ponte San Lazzaro sul Pisciatello presso Cesena. Nella parte opposta fu inciso un apocrifo editto romano vietante di passare in armi il Rubicone. L'iscrizione antica fu pubblicata intera da Amati, *L'isola del Congresso triumvirale*, p. 19, con interpretazione del Borghesi, donde Tonini, *Rimini avanti il principio dell'era volgare*, Rimini, 1848, p. 388. Trovasi ora a Cesena (Zazzeri, *Storia di Cesena*, Bologna, 1881, p. 17). Vi si legge: T · GAIVS · EMINENS · VET · CL · PR · R · N̄ · SYR · V · S | P · ET · | CASSIAE MARTINAE SYR · | CONIVG · ET · T · GAIO · IVL · FIL · | V · A · VI · M · XI · D · X | LOC · D · A · M · SEMPRONIO · | GRAPTO · AMICO · CAR · SEVIVO · D · D · | SIQ · H · A · P · E · S · S · A · DAB · IN · R. P · M · R · HS....

T. Gaius Eminens vet(*eranus*) *cl*(*assis*) *pr*(*aetoriae*) *R*(*avennatis*) *n*(*atione*) *Syr*(*us*) *v*(*ivus*) *s*(*ibi*) *p*(*osuit*) *et Cassiae Martinae n*(*atione*) *Syr*(*ae*) *coniug*(*i*) *et T. Gaio Iul*(*iano*) *fil*(*io*) *v*(*ixit*) *a*(*nnos*) *VI m*(*enses*) *XI d*(*ies*) *X. Loc*(*us*) *d*(*atus*) *a M. Sempronio Grapto amico car*(*issimo*) *sevivo d*(*ecreto*) *d*(*ecurionum*). *Si q*(*uis*) *h*(*anc*) *a*(*rcam*) *p*(*ost*) *e*(*xcessum*) *s*(*upra*) *s*(*criptorum*) *a*(*peruerit*) *dab*(*it*) *in r*(*em*) *p*(*ublicam*) *m*(*unicipii*) *R*(*avennatis*) *sestertios* ....

Questo titolo va perciò levato dall'armata misenense ed aggiunto alla ravennate.

228. = *C. I. L.*, X, n. 3381.

229. = *C. I. L.*, X, n. 3579.

230. = *C. I. L.*, X, n. 3580.

231. = *C. I. L.*, X, n. 3581.

232. = *C. I. L.*, X, n. 3582. Ora a Napoli presso il conte Vargas-Macciucca, salita di San Potito.

2, ALEXANDRI — 3, MISENAT — 4, VIXIT — 5, MIL · AN — 6, XXXI · CVRANTIB — 7, CASSIO ANTIOCHO ET — 8, ANTONIO NIGRIN////

233. = *C. I. L.*, X, n. 3595.

235. = *C. I. L.*, X, n. 3596.

236. = *C. I. L.*, X, n. 3635.

237. = *C. I. L.*, X, n. 3583.

238. = *C. I. L.*, X, n. 3584.

240. = *C. I. L.*, X, n. 3585.

241. = *C. I. L.*, X, n. 3586.

242. = *C. I. L.*, X, n. 3490. Rimane nel museo di Firenze un frammento contenente le ultime lettere delle linee 2-6 cioè: ..... RO | ..... SEN | ..... ITHYN ..... ANN · XXII | ..... RNVS.

243. = *C. I. L.*, X, n. 3588.

247. = *C. I. L.*, X, n. 3491.

5 fine, « LI quadratarius pro ET » *Corp.*; continuo però a leggere *scriba li*(*brarius*). — 6 fine, VETERANVS *id.*

248. = *C. I. L.*, X, n. 3589.

249. = *C. I. L.*, X, n. 3360.

253. = *C. I. L.*, X, n. 3384. A Firenze, nel museo, dove la trascrissi.

254. = *C. I. L.*, X, n. 3492.

255. = *C. I. L.*, X, n. 3592.

256. = *C. I. L.*, X, n. 3593.

258. = *C. I. L.*, X, n. 3577.

259. = *C. I. L.*, X, n. 3390.

260. = *C. I. L.*, X, n. 3642.

1, AVCIO.

262. = *C. I. L.*, X, n. 3603.

263. = *C. I. L.*, X, n. 3604.

265. = *C. I. L.*, X, n. 3605.

266. = *C. I. L.*, X, n. 3606.

268. = *C. I. L.*, X, n. 3607; cf. p. 974, dove è riprodotta corretta, vista dal Mommsen a Glienick, vicino a Berlino, presso il principe Carlo di Prussia:

D · M | M · MARI · MARTIA | LIS NAT · PANNONI | VS · LIB MINERVAVA (*sic*) | VIXIT · ANNIS · L · MIL | ITAVIT · ANNIS · XXVI | L FVRIVS QVINTIA | NVS HERES | B M.

269. = *C. I. L.*, X, n. 3379.
272. = *C. I. L.*, X, n. 3382.
273. = *C. I. L.*, X, n. 3560.
2, MLA / / NI VALENT — 3 pr., MIL EX.
275. = *C. I. L.*, X, n. 3609.
5, in due linee: CONIVGI | BENE · MERENTI.
276. = *C. I. L.*, X, n. 3610. Da me trascritta.
278. = *C. I. L.*, X, n. 3612.
279. = *C. I. L.*, X, n. 3613. A Glienick presso Berlino, nel museo del principe Carlo di Prussia, dove la vide il Mommsen, che la riprodusse secondo la vera lezione, *ibid.*, p. 974, soggiungendo che la 1ª linea è di poco sicura lettura.
1, T · FL · CALPVRNIVS — 2, EX · III · POLLVC ·
280. = *C. I. L.*, X, n. 3614.
281. = *C. I. L.*, X, n. 3605.
283. = *C. I. L.*, X, n. 3616. L'epigrafe della parte opposta della lapide, *ibid.*, n. 1711.
288. = *C. I. L.*, X, n. 3617.
289. = *C. I. L.*, X, n. 3387.
293. = *C. I. L.*, X, n. 3619.
295. = *C. I. L.*, X, n. 3370.
296. = *C. I. L.*, X, n. 3621.
297. = *C. I. L.*, X, n. 3622.
1, LONGINVS — 2 fine, ANTONI — 9, fine PIITIS « cognomen mulieris « plane incertum est ». *Corp.*
299. = *C. I. L.*, X, n. 3611.
Secondo il Mommsen è assai dubbio che in questo titolo sia indicata l'*hexeris Ops*, anzi che l'epigrafe stessa sia classiaria: « versum de quo quaeritur » scrive egli « denuo examinatum sic scriptum repperi: « IVSPVS MARIT AP · VI · O T · ut « virgula perpendicularis tenuis admodum « sit et fortasse praemittenda ».
300. = *C. I. L.*, X, n. 3624.
302. = *C. I. L.*, X, n. 3625.
6, 7, in vece di XXVI AEMI | LIVS sarà forse meglio leggere in questo titolo ora perduto XXV L · AEMI | LIVS.
303. = *C. I. L.*, X, n. 3507.
304. 2, 3, L · SEXTILIO · RVFO · VET · EX · CLASSE | PRAETORIA · MISENVM — 4, HELPIDI — 6, RVFINA · VIVA · FECIT Così corregge l'*Eph. ep.*, IV, p. 93, n. 260, da una silloge composta, come sembra, nel secolo XVI e conservata in un ms. del XVIII esistente in biblioteca privata ad Oderzo. Un frammento della medesima silloge si ha in un ms. della biblioteca Olivieri a Pesaro, il quale solo porta la correzione citata della linea 4ª, e nella linea 6ª legge RVFINA, che nel ms. di Oderzo è scritto RVFFINA.
307 *bis*. = *C. I. L.*, X, n. 3628.
308. = *C. I. L.*, X, n. 3632.
311. = *C. I. L.*, X, n. 3634.
5, MILT (*sic*).
312. = *C. I. L.*, X, n. 3636.
313. = *C. I. L.*, X, n. 3637. Ora a Napoli presso il conte Vargas-Macciucca, salita di San Potito.
2, PRISCI — 3, VICTRIA (*sic*) — 4, VII · VIXIT · AN · — 6, HERES / / / /
314. = *C. I. L.*, X, n. 687.
315. = *C. I. L.*, X, n. 3639.
316. = *C. I. L.*, X, n. 3640.
5, 6 *Musiaticus* = *Moesiaticus*.
321. = *C. I. L.*, X, n. 3646.
9, LBERTIS (*sic*).
L'iscrizione della parte opposta = *C. I. L.*, X, n. 2666.
322. = *C. I. L.*, X, n. 3647.
323. = *C. I. L.*, X, n. 3648.
4 fine, XX.
324. = *C. I. L.*, X, n. 3649.
325. = *C. I. L.*, X, n. 3646.
326. = *C. I. L.*, X, n. 3652.
328. = *C. I. L.*, X, n. 3653.
330. = *C. I. L.*, X, n. 3388.
7, esatta la lettura del Garrucci: LVCRIO · FILIO.
331. = *C. I. L.*, X, n. 3654.
335. = *C. I. L.*, X, n. 3510.
4, *princ(ipalis)*.
336. = *C. I. L.*, X, n. 3383. Tuttora a Napoli presso i PP. Filippini.
339. = *C. I. L.*, X, n. 3655.
340. = *C. I. L.*, X, n. 3656.
341. = *C. I. L.*, X, n. 3657.
6 pr., XLVII L ·
342. = *C. I. L.*, X, n. 3658.
343. = *C. I. L.*, X, n. 3571.
5, MISN (*sic*) e giustamente nota il Mommsen: « *Mis(e)n(ensis)* opinor non « *Mis(enensis) n(aufylax)* ».
346. = *C. I. L.*, X, n. 3662.
2, 3, ATHENO | *nic*E — 3, fine VI — 6, ATENONICE — 7, HRES (*sic*). Vi è chiaramente indicata due volte la trireme *Athenonice*, della quale abbiamo tre nuovi esempii (n. 675, 678, 686), onde al n. 100

converrà leggere non *Athen(ae)* come proposi, ma *Athen(onice)*.

347. = *C. I. L.*, X, n. 3677 (dal Labus).

350. = *C. I. L.*, X, n. 3389.

352. = *C. I. L.*, X, 3338.

354. = *C. I. L.*, X, 3529, ignorando pure la spiegazione da darsi alla 1ª linea.

3, 4 [*sepulchri locu*]*m ipse sibi dum adviveret* [*elegit qui p*]*lacuit et comparavit.*

355. = *C. I. L.*, X, n. 3567.

356. = *C. I. L.*, X, n. 3668.

357. = *C. I. L.*, X, n. 3644.

1, *na*[*tAfe*]*r* (?) *III V*.....

358. = *C. I. L.*, X, n. 3673.

362. = *C. I. L.*, X, n. 6657. Roma, nel museo Capitolino.

7, PRAEP.

366. = *C. I. L.*, IX, n. 5439.

7 fine, AV mon. — 15 fine, VM mon.

367. = *C. I. L.*, IX, n. 5357.

1, APPALIO Ligorio, da cui *Corp.*; APPAEIO Smetius, ms.

370. = *C. I. L.*, X, n. 7854. Cf. *Eph. ep.*, IV, p. 171.

Ultima linea *Curadronis f.* — Aggiungi i nomi dei testimonii:

L. Vibi ....
Q. Lolli ....
C. Caesi ......
M. Tetti ....
Ti. Claudi .....
L. Pulli ....

415. = *C. I. L.*, X, n. 3524.

416. = *C. I. L.*, X, n. 3527 (come scoperta a Cuma).

436. = *C. I. L.*, IX, n. 5749.

Data fra le lapidi di Roma dal *C. I. L.*, VI, n. 3153. Esiste a Fermo (via Cialdini, n. 20), dove la vide il Mommsen.

443. = *C. I. L.*, X, n. 3891.

454. = *C. I. L.*, X, n. 3486.

456. = Cf. n. 701.

475. = *C. I. L.*, X, n. 3645. Scoperta a Bacoli.

477. = *C. I. L.*, IX, n. 3892.

500. = *C. I. L.*, VIII, n. 8934.

502. = *C. I. L.*, VIII, n. 9385.

1, D M S S ·

520. = *C. I. L.*, VIII, n. 7030.

3, TVTORIBVS.

522. = *C. I. L.*, VIII, n. 9327.

535. = *C. I. L.*, VIII, n. 7977. Nel museo di Philippeville.

543. = *C. I. L.*, VIII, n. 9358. Già a Scerscel.

9, SEBAST*en*. — 10, CLASSIS — 12, MOESIATICAE — 11 pr., C.

544. = *C. I. L.*, IX, n. 3609 (*recognovit Dressel*).

546. = *C. I. L.*, VIII. n. 9363.

8, Dev'essersi omessa una linea dopo l'8ª; imperocchè *proc. provinciae* senza altro non può stare.

551. = *C. I. L.*, VIII, n. 9352.

555. = *C. I. L.*, X; n. 3433.

Questa iscrizione scoperta nell'agro napolitano dev'essere congiunta con quelle dell'armata misenense.

558. = *C. I. L.*, X, n. 3478. Proveniente dall'agro napolitano, epperò da unirsi coi titoli dell'armata misenense.

3, la lettura è esatta. L'*opt. conv.* si trova pure fra i vigili (*C. I. L.*, VI, n. 1058, cent. 7, n. 10): ne ignoriamo il significato.

559. = *C. I. L.*, IX, n. 43.

560. = *C. I. L.*, X, n. 3443, dove solo per congettura è collocata fra le iscrizioni dell'armata misenense, ignorandosene la provenienza.

565. Un Caio Dinnio Valente, veterano dell'armata di Miseno, è menzionato nell'epigrafe n. 658; forse è lo stesso che dedicò questa lapide; se così fosse, questo titolo andrebbe fra quelli della misenense.

575. = *C. I. L.*, IX, n. 1631.

Il Mommsen (*Corp.*) mantiene nell'indice la trireme *Diomedes*.

Aggiunta a pag. 21, nota 1.

Due frammenti di diplomi militari furono testè pubblicati nel *Korrespondenzblatt der Westdeutschen Zeitschrift für Geschichte und Kunst*, 1884, n. 5, col. 60; n. 6, col. 70. Il numero di questi monumenti è così accresciuto ad 80.

TRASCRIZIONE

DI ALCUNI

TESTI COPTI

TRATTI DAI PAPIRI DEL MUSEO EGIZIO

DI TORINO

CON TRADUZIONE ITALIANA E NOTE

DI

FRANCESCO ROSSI

Appr. nell'adunanza dell'8 Giugno 1884

La benevola accoglienza fatta al mio *Saggio di trascrizione di un codice copto del Museo Egizio di Torino*, mi diede animo a proseguire con maggior lena la pubblicazione degli altri codici della nostra ricca collezione, ed oggi mi onoro di presentare all'Accademia i testi copti del Museo, che riguardano il celebre concilio di Nicea, ed il suo più illustre campione, l'Arcivescovo di Alessandria S. Atanasio, l'impavido propugnatore della fede ortodossa della Chiesa Cattolica contro le eresie di Ario, di Sabellio e di Fotino. Tutti questi testi erano stati riuniti con parecchi altri papiri in un solo codice di novantacinque fogli dal nostro Peyron, che così lo descrisse: *Continet sermones morales, sententias Synodi Nicaenae, tum vitam Athanasii spuriam.*

Questo insigne scienziato, i cui lavori sulla lingua copta gli procacciarono poscia cotanta gloria, aveva ricevuto dal nostro Governo l'incarico di ordinare i papiri copti e greci della celebre collezione egiziana del Drovetti, pervenuti a Torino, come notai nella mia precedente memoria, in un deplorevolissimo stato. L'illustre orientalista con diligenza e pazienza maggiori d'ogni lode, condusse a termine in breve tempo il difficile compito. Fatti incollare su leggiera e trasparente carta quei fragilissimi fogli,

con quella profonda conoscenza, che aveva di queste due lingue, li classificò tutti con sapiente ordine, secondo il loro contenuto, e dei papiri greci, che erano in piccolo numero, fece una quanto mai fedele ed esatta trascrizione, che venne poscia pubblicata con traduzione latina e dotti commenti nei volumi di questa Accademia. I papiri copti, che erano molto più numerosi, furono da lui divisi per materia in sette codici, di cui diede una descrizione sommaria, ma esatta nella prefazione del suo impareggiabile *lexicon* copto, ove egli li cita con tutte le altre fonti, a cui attinse per la compilazione di questo suo ammirabile lavoro.

Ma pur troppo questo accurato ordinamento dei nostri papiri non si conservò lungamente, e quando io mi accinsi a trascriverli, trovai non solo alterato l'ordine delle pagine nello stesso codice, ma ancora mescolati e confusi fra loro fogli di codici diversi.

D'onde e quando si producesse questa confusione nella nostra collezione, è oggi difficile riconoscere. Fors'anco vi ebbero parte, involontariamente, i dotti, i quali nel lungo periodo, che corse dall'anno 1829, in cui il Peyron già aveva compiuto l'ordinamento, sino ai nostri giorni, vennero a studiare i nostri papiri, e nel farne l'esame hanno potuto, inavvertentemente certo, spostare i fogli, che sgraziatamente non erano stati, per la massima parte, numerati. Infatti la Direzione del Museo Torinese si fece sempre un dovere di facilitare ai dotti lo studio delle sue collezioni, e da Champollion sino ai nostri giorni ebbe l'onore di accogliere nelle sue sale gli uomini più insigni nella scienza, i quali ci lasciarono sempre con parole di lode per la grande cortesia loro usata (1).

Il signor Eugenio Revillout, che prima di me studiò i nostri papiri, e ne copiò un grande numero, pubblicava nel 1873 due di questi in un opuscolo col titolo: *Le Concile de Nicée, d'après les textes coptes — Première série de documents. Exposition de foi — Gnomes du Saint Concile (papyrus du Musée de Turin)*, ove si leggono in una nota a pag. 21 le seguenti parole: *De nouveaux fragments découverts par nous, tant à*

---

(1) Una volta tuttavia fu la Direzione accusata di scortesia. Quest'accusa le mosse un certo Eisenlhor, il quale, volendo farla da padrone in casa altrui, pretendeva si staccassero i papiri dal muro per avere maggior agio a studiarli e fotografarli, alcuni dei quali vi erano anche infissi; ed al nostro rifiuto, inspirato unicamente dal timore che si potessero sciupare questi preziosi documenti, menò grande scalpore. In seguito la Direzione, per torre ogni pretesto ad ulteriori doglianze, fece nel recente riordinamento del Museo, con non piccola spesa distribuire tutti i papiri entro quadri su comodi ed appositi leggii, cosicchè il nostro Museo, con singolare esempio tiene oggi esposta tutta la sua numerosa collezione di papiri in modo che lo studioso può con tutto il suo agio leggerli, studiarli e copiarli.

Turin qu'à Naples, nous ont enfin conduit à une identification certaine de ce texte dogmatique.

Ora, per ciò che riguarda il Museo Torinese, io mi credo in obbligo di far osservare, che i testi relativi al Concilio di Nicea erano stati dal Peyron tutti riuniti col titolo *Sententiae Synodi Nicaenae*, nel IV codice che egli segnalava ai dotti fin dall'anno 1835. Per poco poi che uno abbia studiato il suo rinomato *Lexicon*, si sarà tosto convinto, dalle continue citazioni, che vi fa di tutti questi codici da lui, come dicemmo, dottamente classificati e descritti, che nessuno dei numerosi nostri papiri passò a lui inosservato, e dovette avere dei testi anche dei più piccoli frammenti una perfetta conoscenza (1).

Umile cultore di questi studi, sulle tracce del mio illustre concittadino, ho già in massima parte ricomposto l'ordinamento dei nostri papiri, e spero di potere col vostro favorevole voto aggiungere, nelle Memorie di quest'Accademia, ai testi greci già pubblicati dal Peyron quelli, non meno importanti e molto più numerosi, dei codici copti. Questa mia seconda pubblicazione si comporrebbe di tre distinte parti. Nella prima do il testo che ancora ci rimane della vita di S. Atanasio, nella seconda quelli riguardanti il Sinodo di Nicea, e nella terza parecchi frammenti, che trovai dispersi nella nostra collezione, e che si possono sino ad un certo punto coi due primi collegare.

Il primo di questi testi, che nella sua integrità doveva comprendere cinquantotto pagine, ed ora è ridotto a ventotto, ci narra le persecuzioni patite da S. Atanasio e dagli altri vescovi suoi compagni nell'esilio, la loro miracolosa liberazione e trionfale ritorno in Alessandria. La prima sua pagina porta il numero 11 (ⲓ̅ⲁ̅), e procede con l'interruzione di un foglio sino a pagina 24 (ⲕ̅ⲅ̅). Prosegue quindi dalla pagina 41 (ⲙ̅ⲁ̅) sino alla pagina 58 (ⲛⲏ), nella quale termina il racconto, come indica la formola generalmente usata dai monaci copti nel licenziare i loro scritti sacri, che trovasi in fine di questo testo: ⲡⲁï ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧϥ̅ ϣⲁ ⲉⲛⲉϩ ⲛ̅ⲉⲛⲉϩ - ϩⲁⲙⲏⲛ, cioè: *sia gloria a Dio sino alla fine dei secoli - Così sia* (2).

In questa stessa pagina (n. ⲛ̅ⲏ̅) comincia il primo testo del Sinodo;

---

(1) Il merito di essere i primi a pubblicare un antico testo non basta oggi ai nostri novelli scienziati, ma vogliono anche darsi il vanto di averli scoperti nelle collezioni, ove giacevano, secondo essi, ignorati. Così lo Schiaparelli nel 1880 scopriva il testo che De-Rougé segnalava già nel 1851!

(2) Vedi il calco riprodotto nella tavola I posta in fine della Memoria.

ma fra questo ed il precedente è intercalata una breve linea colle parole: ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲩ ⲗⲟⲅⲟⲩ.

Questo secondo testo porta il titolo: ⲡⲉ (ⲅⲛ)ⲱⲙⲏ ⲛ̄ⲧⲥⲩⲛϩⲟⲇⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ, e comprende ventinove pagine; procede cioè dalla pagina 58 ⲛ̄ⲏ sino alla pagina 87, in fine della quale si legge ancora la formola di congedo sovra indicata (1); epperò possiamo dire, che in queste ventinove pagine, portanti solo qualche piccola lacuna prodotta dallo sfogliamento del papiro, noi possediamo un intero testo copto.

A questo primo testo del Sinodo tiene dietro un frammento, che nei nostri papiri fa seguito ad un lungo testo, contenente la vita del santo anacoreta *Aphou*, che fu pubblicato testè dal signor Révillout nella *Revue Égyptologique*, 3e série. — La prima pagina di questo frammento, che è segnata col numero 120 (ⲣ̄ⲕ), porta in testa il titolo ⲧⲥⲩⲛϩⲟⲇⲟⲥ ⲛ̄ⲛⲓⲕⲁⲓⲁ ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩⲟϫ, e va sino a pagina 127 inclusivamente, dandoci così un testo continuato di otto pagine, che contengono la professione di fede dei vescovi radunati in Nicea e la condanna delle dottrine di Ario, di Sabellio e di Fotino sulla Trinità e personalità divina.

Di questo frammento e del precedente testo, il signor Revillout diede nel sovramenzionato opuscolo la trascrizione continuata, senza seguire l'ordine e la disposizione delle pagine e delle linee. Ciò non ostante io mi sarei astenuto dal ristamparli, se in questa trascrizione egli avesse mostrato maggior fedeltà all'originale. Ma avendola collazionata coi nostri papiri, trovai che oltre all'omissione di alcuni brani, che egli disse illeggibili, e che io tuttavia riuscii a leggere (2), egli modificò ancora in varii luoghi il testo. Io segnalerò al lettore, nella mia trascrizione, con un asterisco tutti i punti in cui il Révillout si scosta dall'originale; si potrà così vedere, che se in alcuni luoghi questi corresse dottamente il testo, in altri omise parole che sono ancora oggi ben leggibili nei papiri, e fece pure, a mio debole giudizio, errate letture.

La terza parte, che aggiunsi come appendice alle due prime, si compone di alcuni piccoli frammenti, che dovevano probabilmente appartenere al testo relativo alla vita di S. Atanasio, e di altri di minor mole che vanno segnalati col nome di questo santo.

Ad ottenere poi una trascrizione, per quanto è possibile, fedele e perfetta, seguirò anche in questa, come ho fatto nella mia pubblicazione

---

(1) Vedi tavola II.

(2) Di questo brano è dato il calco alla tavola III.

del *Vangelo di Nicodemo*, il metodo al quale si attenne nel secolo passato il dotto prelato bolognese Luigi Mingarelli nello stampare i codici copti della Biblioteca Naniana di Venezia. Questo metodo consiste nel riprodurre, come si farebbe con un calco, il testo, di guisa che sieno mantenute la disposizione e l'ordine delle linee in ciascuna pagina, senza introdurre alcuna modificazione, tranne quella di separare, secondo le norme adottate dal Mingarelli e dallo Zoega, e seguite costantemente dal Peyron, le parole che in questi manoscritti sono contigue (1).

In questo modo si ha inoltre il vantaggio di poter riprodurre con esattezza tutti i segni diacritici e le abbreviazioni, che occorrono negli originali, e che in una trascrizione, come è quella del signor Revillout, non sempre si possono osservare. Arrogi ancora che nelle lacune per rottura o sfogliamento, frequenti nei fragili papiri, il lettore può tosto riconoscere il numero delle lettere a supplirsi, lettere che io segnalo con puntini ogniqualvolta non riesco a compiere le monche parole (2).

Siccome, per serbare la massima fedeltà ai testi, ho pure riprodotto gli errori materiali ed evidenti, così li segnalerò qui sotto al lettore, colla designazione delle pagine e delle linee in cui s'incontrano, dividendoli in due classi, secondochè si trovano in parole greche od in parole copte. Nelle parole greche oltre l'allungamento della vocale *o* ora in ⲟⲩ come in ⲕⲟⲩⲡⲣⲓⲁ (pag. I) invece di ⲕⲟⲡⲣⲓⲁ, ora in ⲱ come in ⲉⲝⲱⲣⲏⲥⲧⲉⲓⲁ (pag. II) ed ⲉⲡⲱⲭⲗⲉⲓ per ⲉⲝⲟⲣⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ed ⲉⲡⲟⲭⲗⲉⲓ; ⲧⲱⲡⲱⲥ (pag. LIV) per ⲧⲟⲡⲟⲥ; e la contrazione del dittongo ⲉⲓ in ⲓ come nelle parole ⲓⲣⲏⲛⲏ, ⲧⲉⲗⲓⲟⲥ, ecc. invece di ⲉⲓⲣⲏⲛⲏ, ⲧⲉⲗⲉⲓⲟⲥ, abbiamo ⲅⲁⲧⲁⲕⲓⲟⲛ (pag. III, lin. 27) per ⲕⲁⲧⲁⲅⲓⲟⲛ; ⲉⲛⲫⲣⲁⲛⲉ (pag. V, lin. 17) per ⲉⲩⲫⲣⲁⲛⲉ, ⲟⲩⲟⲥⲓⲁ (pag. VIII, lin. 9) invece di ⲟⲩⲟⲩⲥⲓⲁ, e nella stessa pagina a linea 24 ϩⲟⲙⲟⲟⲩⲥⲓⲟⲛ invece di ϩⲟⲙⲟⲟⲩⲥⲓⲟⲥ forma che è pure ripetuta a pag. XLVII, lin 20: ⲡⲁⲣⲭⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ (pag. IX, lin. 3) per ⲡⲁⲣⲭⲓⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ, ⲁⲡⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ (pag. XIX, lin 2) per ⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ; ⲡ̅ⲉⲝⲩⲥⲉⲩⲇⲩⲛⲁⲧⲟⲥ (pag. XXIII, lin. 19) per ⲡ̅ⲉⲝⲟⲩⲥⲓⲟⲇⲩⲛⲁⲧⲟⲥ; ⲯⲏⲭⲩ (pag. XXXVIII, lin. 4, nel margine) per ⲯⲩⲭⲏ; ⲙⲏⲧⲣⲏⲛⲟⲥ (pag. XLVIII, lin. 16) per ⲙⲉⲧⲣⲏⲧⲟⲥ; ⲑⲏⲥⲓⲁⲥⲧⲉⲣⲓⲟⲛ (pag. XLVIII, lin. 27) per ⲑⲩⲥⲓⲁⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ; ⲥⲡⲟⲇⲁⲍⲉ (pag. XLIX, lin. 13) per ⲥⲡⲟⲩⲇⲁⲍⲉ; ⲧⲁⲛⲟⲓⲁ (pag. LIII, lin. 1) invece

---

(1) Il signor Révillout in questa separazione delle parole non segue sempre la stessa regola, ed ora separa parole che altre volte tiene unite.

(2) Il signor Révillout chiude frequentemente fra parentesi lettere che nei papiri sono ancora oggi o del tutto visibili, o presentano tali vestigia da non lasciar dubbio sulla loro originale forma; io pongo soltanto fra parentesi quelle lettere (cadute affatto colla rottura del papiro) delle quali il contesto rende ovvia la restituzione.

di ⲙⲉⲧⲁⲛⲟⲓⲁ; ⲁⲁⲛⲁⲑⲉⲙⲁⲧⲓⲍⲉ (pag. LVIII, lin. 43) per ⲁⲛⲁⲑⲉⲙⲁⲧⲓⲍⲉ; ⲙⲉⲅⲉⲛⲟⲓⲧⲟ (pag. LXII, lin. 31) invece di ⲙⲏ ⲅⲉⲛⲟⲓⲧⲟ, ecc.

Nelle parole copte sono a segnalare le seguenti forme: pag. I, lin. 9 ⲙⲉⲣⲟⲩⲧⲟϭⲉ invece di ⲙⲁⲣⲟⲩⲧⲟϭⲉ; pag. III, lin. 6 ⲕⲟⲩⲉⲓ per ⲕⲟⲩⲓ; pag. IV, linea penultima ⲛ̄ⲡⲉⲛⲉⲛⲉⲣⲏⲩ per ⲛ̄ⲡⲉⲛⲉⲣⲏⲩ; pagina VI, lin. 28 ⲉⲧ̄ⲥⲧⲟ per ⲉⲧⲧ̄ⲥⲧⲟ ed a pag. VII ⲉⲧ̄ⲥⲧⲏⲩ per ⲉⲧⲧ̄ⲥⲧⲏⲩ; pag. VIII, lin. 10 ⲙ̄ⲧⲛⲟⲩⲧⲉ per ⲙ̄ⲡⲧⲛⲟⲩⲧⲉ; pag. XII, lin. 1ª ⲉⲧⲟⲛ̄ϩ per ⲉⲧⲟⲧⲟⲛ̄ϩ; pag. XXI, lin. 27 ⲛ̄ϩⲁⲧⲉⲓ per ⲛ̄ϩⲁⲧⲉ; pag. XXII, lin 13 ⲧⲏⲣⲟⲟⲩ per ⲧⲏⲣⲟⲩ; pag. XXVIII, linea ultima ⲙ̄ⲡⲧⲉⲣ̄ϥ invece di ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ; pag. XXIX, lin. 22 ⲙ̄ⲡⲡⲛⲟⲩⲧⲉ con raddoppiamento dell'articolo ⲡ, ed alla linea 24 della stessa pagina ⲉⲧⲟⲩⲟⲩϫⲁⲓ invece di ⲉⲧⲟⲩϫⲁⲓ; pag. XXX, lin. 18, ⲁⲧⲉⲕⲧⲉⲭⲛⲏ invece di ⲉⲧⲉⲕⲧⲉⲭⲛⲏ; pag. XXXI, lin. 25 ⲡⲓⲥⲧⲙⲏ invece di ⲡⲉⲥⲧⲏⲙ; pag. XXXII, lin. 26 ϩⲱ invece di ϩⲟ: pag. XXXIII, lin. 10 ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲏⲥⲭⲏⲙⲁ per ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲥⲭⲏ̈ⲙⲁ; pag. XXXVII, lin. 10 ⲁⲩⲁⲛⲁⲛⲁⲩⲁⲛ invece di ⲁⲩⲁⲛⲁⲩⲁⲛ; pag. XXXIX, lin. 9 ⲧⲉϥϣⲏⲛ per ⲧⲉϥϣⲧⲏⲛ; pag. XLIII, lin. 1 ⲛ̄ⲧ̄ϥⲙⲁⲁⲩ invece di ⲛ̄ⲧⲉϥⲙⲁⲁⲩ; pag. XLIV, lin. 26 ⲉⲃⲟⲗϩⲟⲟⲩ ϩⲟⲟⲩ per ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ ⲟⲩϩⲟⲟⲩ; pag. XLIX, lin. 9 ⲉⲧⲉⲛⲧⲁⲡⲣⲟ invece di ⲉⲧⲉⲧ̄ⲛ̄ⲧⲁⲡⲣⲟ; pag. LIV, lin. 25 ⲡⲣ̄ⲣ̄ⲙⲙⲁⲟ per ⲡⲣ̄ⲙ̄ⲙⲁⲟ, ecc.

Fra questi errori dovuti all'incuria degli amanuensi credo doversi anche porre la parola ⲥⲁⲛϩⲟⲩ che trovasi nel secondo testo, a pagina LI, linea 7; radice che non è data, per quanto io sappia, da alcun lessico, e che nella mia traduzione interpretai nel senso che meglio mi parve rispondere alle altre parole della frase. Nè debbo infine tacere che in parecchi punti furono questi testi deturpati da correzioni con raschiature compite più tardi da persone imperite, che ne alterarono il senso.

Per tutti questi motivi confido che, se non per la traduzione, in cui forse non sempre ho saputo riprodurre il pensiero dell'autore copto, avrò, per la fedeltà della trascrizione, benevolo il giudizio dei dotti.

>ⲓ̄ⲁ̄<

I. ϣⲗⲏⲗ' ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛⲁϩ(ⲙⲉϥ) ⲉⲧ
ϭⲓϫ ⲛ̄ⲛⲥⲁⲩ ⲡⲉϥⲥⲟⲛ . (ⲓ̈)ⲱ
ⲥⲏⲫ ⲁϥϣⲗⲏⲗ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛⲁϩ
ⲙⲉϥ ⲉⲧⲣ̄ⲙ̄ⲛ̄ⲕⲏⲙⲉ . ⲓ̈ⲏⲥⲟⲩⲥ
ⲛ̄ⲛⲁⲩⲏ' ⲁϥϣⲗⲏⲗ ⲁϥⲧⲣⲉ ⲡⲣⲏ' ⲁϩⲉ
ⲣⲁⲧ̄ϥ ϩ̄ⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲧⲡⲉ . ⲅⲉ
ⲇⲉⲱⲛ' ⲁϥϣⲗⲏⲗ ⲁϥϭⲱⲧ̄ⲡ̄ ⲛ̄ⲙ̄
ⲙⲁⲇⲓϩⲁⲙ . ⲥⲁⲙⲯⲱⲛ ⲁϥϣⲗⲏⲗ'
ⲁϥⲧⲣⲉ ⲧⲙⲉⲣⲟⲩⲟϭⲉ ⲛ̄ⲉⲓⲱ
ⲧⲁⲩⲉⲙⲟⲟⲩ ⲉⲃⲟⲗ ⲁⲥⲧⲁⲗϭⲉ
ⲡⲉϥⲉⲓⲃⲉ . ⲁⲛⲛⲁ' ⲁⲥϣⲗⲏⲗ
ⲁⲩⲭⲁⲣⲓⲍⲉ ⲛⲁⲥ ⲛ̄ⲥⲁⲙⲟⲩⲏⲗ'
ⲁ ⲇⲁⲩⲉⲓⲇ ϣⲗⲏⲗ' ⲁϥⲧⲁⲗϭⲉ ⲡⲟⲩ
ⲱϣ̄ϥ ⲙ̄ⲡⲗⲁⲟⲥ . ⲥⲟⲗⲟⲙⲱ͡ⲛ
ⲁϥϣⲗⲏⲗ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϯ ⲛⲁϥ ⲛ̄
ⲟⲩⲥⲟⲫⲓⲁ ⲙ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲙ̄ⲛ̄ⲧⲥⲁⲃⲉ .
ϩⲏⲗⲓⲁⲥ ⲁϥϣⲗⲏⲗ' ⲁϥϣⲧⲁⲙ' ⲛ̄
ⲧⲡⲉ ⲛ̄ϣⲟⲙ̄ⲧ̄ⲉ ⲛ̄ⲣⲟⲙⲡⲉ ⲙ̄ⲛ̄
ⲥⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲉⲃⲟⲧ . ⲏⲗⲓⲥⲁⲓⲟⲥ
ⲁϥϣ(ⲗⲏⲗ' ⲁϥ)ⲧⲟⲩⲛⲉⲥ ⲡⲉⲧⲙⲟ
ⲟⲩⲧ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩϭⲉⲡⲏ . ⲁⲩⲭⲁⲣⲓⲍⲉ
ⲛ̄ⲕⲉⲙ̄ⲛ̄ⲧⲏ ⲛ̄ⲣⲟⲙⲡⲉ ⲛ̄ⲉⲍⲉⲕⲓⲁⲥ
ϩⲓⲧ̄ⲙ̄ ⲡⲉϥϣⲗⲏⲗ' ⲁ ⲡϣⲟⲙ̄ⲛ̄ⲧ
ⲛ̄ϩⲁⲅⲓⲟⲥ ϣⲗⲏⲗ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ -
ⲧ̄ⲛ̄ⲛⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲉϥⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ϣⲁ
ⲣⲟⲟⲩ ⲁϥⲃⲟⲏⲑⲉⲓ̈ ⲉⲣⲟⲟⲩ ·
ⲓ̈ⲱⲃ ⲉϥϩ̄ⲛ̄ ⲧⲕⲟⲩⲡⲣⲓⲁ' ⲁϥϣⲗⲏⲗ
ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲁϥⲃⲟⲏⲑⲉⲓ̈ ⲉⲣⲟϥ
ⲁ)ⲩⲱ ⲁϥⲧⲁⲗϭⲟϥ ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲉϥϣⲱⲛⲉ
ⲇ)ⲁⲛⲓⲏⲗ' ⲉϥϩ̄ⲙ̄ ⲡϣⲏⲓ̈ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲟⲩⲓ̈

† ā

▸ıƀ◂ II. ⲁϥϣⲗⲏⲗ' ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϣⲧⲁⲙ
ⲛ̄ⲧⲉⲩⲧⲁⲡⲣⲟ' . ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲓ̄ⲥ̄ ⲁϥ
ϣⲗⲏⲗ' ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲡⲉⲛⲧⲁϥ
ⲧⲥⲁⲃⲉ ⲛⲉϥⲙⲁⲑⲏⲧⲏⲥ ⲉ
ϣⲗⲏⲗ' . ⲁ ⲡⲉⲧⲣⲟⲥ ϣⲗⲏⲗ'
ⲁϥⲧⲟⲩⲛⲉⲥ ⲧⲁⲃⲓⲑⲁ .
ⲕⲟⲣⲛⲏⲗⲓⲟⲥ ⲁϥϣⲗⲏⲗ' ⲁ
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲧ̄ⲛⲛⲟⲟⲩ ⲡⲉⲧ
ⲣⲟⲥ ϣⲁⲣⲟϥ ⲁϥⲃⲁⲡⲧⲓⲍⲉ
ⲙ̄ⲙⲟϥ . ⲡⲁⲩⲗⲟⲥ ⲁϥϣⲗⲏⲗ
ⲁϥⲧⲟⲩⲛⲉⲥ ⲉⲩⲧⲩⲭⲟⲥ ⲉϥ
(ⲙⲟⲟⲩⲧ (?)) . ⲁⲛⲟⲕ ϩⲱⲱⲧ
ⲡⲉⲧ̄ⲛⲉⲓⲱⲧ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ⲁⲓ̈ⲃⲱⲕ ϩ̄ⲛ ϩⲁϩ ⲙ̄ⲡⲉⲓ̈ⲣⲁⲥⲙⲟⲥ
ⲛ̄ϩⲁϩ ⲛ̄ⲥⲟⲡ ⲉⲧⲃⲉ ⲛ̄ⲁⲣⲓⲁ
ⲛⲟⲥ ⲁⲓ̈ⲕⲁϩⲧⲏ(ⲓ̈ ⲉⲡⲛⲟⲩⲧⲉ)
ⲁⲓ̈ϣⲗⲏⲗ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉ(ⲣⲟϥ). ⲁⲩⲱ
ⲁϥⲃⲟⲏⲑⲉⲓ ⲉⲣⲟⲓ̈ ϩ̄ⲛ ⲛⲁⲡⲉⲓ̈
ⲣⲁⲥⲙⲟⲥ ⲧⲏⲣⲟⲩ · ⲁⲛⲟⲕ
ⲙ̄ⲛ ⲡⲕⲉⲥⲉⲉⲡⲉ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟ
ⲡⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲁⲩϥⲓⲧⲟⲩ ⲛ̄ⲙ
ⲙⲁⲓ̈ ⲉⲧⲉⲝⲱⲣⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲉ
ⲟⲩⲣⲃⲁⲧⲟⲥ ⲧⲛⲏⲥⲟⲥ .
ⲁⲩⲱ ϩ̄ⲙ ⲡⲙⲁ ⲉⲧ̄ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲡⲉ
ⲣⲉ ϩⲉⲛⲣⲱⲙⲉ ϣⲟⲟⲡ ⲙ̄
ⲙⲁⲩ ⲉⲩϩⲟⲟⲩ ⲉⲙⲁⲧⲉ ϩ̄ⲛ
ⲧⲉⲩⲫⲩⲥⲓⲥ' . ⲁⲩⲱ ⲉⲣⲉ ⲡⲁ

† ·B·

▸ıΓ◂ III. ⲏⲣ ⲙ̄ⲡⲙⲁ ⲉⲧ̄ⲙ̄ⲙⲁⲩ ϩⲟⲥⲉ ⲉⲙⲁⲧⲉ
ⲙ̄ⲛ ⲡⲱϭ̄ⲃ̄ . ⲁⲛⲣ̄ⲣ̄ⲙ̄ⲡⲉ ⲥ̄ⲛⲧⲉ
ⲙ̄ⲡⲙⲁ ⲉⲧ̄ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲙ̄ⲛ ϣⲟⲙ̄ⲧ

ⲛ̄ⲉⲃⲟⲧ . ⲧⲁⲣⲭⲏ ⲙⲉⲛ ⲛ̄ⲧⲁⲩ
ϥⲓⲧⲛ' ⲉⲡⲙⲁ ⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ . ⲁⲛⲉ
ⲡⲱϫⲗⲉⲓ̈ ⲛ̄ϩⲉⲛⲕⲟⲩⲉⲓ ⲛ̄ϩⲟⲩ
ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲃⲁⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲁϭⲃⲉⲥ
ⲉⲧϩⲙ̄ ⲡⲙⲁ ⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲉⲟⲩϩⲟⲧⲉ
ⲡⲉ ⲉϣⲁϫⲉ ⲉⲣⲟⲥ .   ⲡⲉⲛⲧⲁϥ
ϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ⲡⲉϫ ⲡϩⲁ'ⲛ ⲉⲣⲟⲓ̈ ⲁⲩⲱ
ⲁⲛⲟⲕ ϯⲛⲁⲧⲱⲱⲃⲉ . ⲛ̄ⲧⲟϥ
ⲡⲉⲛⲧⲁⲛⲛⲉϫ ⲡⲉⲛⲣⲟⲟⲩϣ
ⲧⲏⲣϥ̄ ⲉⲣⲟϥ · ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ ⲡϫⲱⲕ
ⲇⲉ ⲛ̄ϥⲧⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲉⲃⲟⲧ ⲉⲛ
ϣⲟⲟⲛ ϩⲙ̄ ⲡϩⲟϫϩ̄ϫ̄ ⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ
ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲱⲥ ⲁⲛⲟⲛ ϩⲓ ⲟⲩⲥⲟⲛ
ⲁⲛⲡⲣ̄ϣ̄ ⲡⲉⲛϭⲓϫ ⲉⲃⲟⲗ ⲉϩⲣⲁⲓ̈
ⲉⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲡⲁⲓ̈ ⲉⲧϥⲣⲟⲟⲩϣ
ϩⲁ ⲟⲩⲟⲛ ⲛⲓⲙ ⲉⲧϩⲉⲗⲡⲓⲍⲉ
ⲉⲣⲟϥ . ⲁⲛϣⲗⲏⲗ ϩⲙ̄ ⲡⲉⲛϩⲏ(ⲧ)
(ⲧⲏ)ⲣϥ̄ ϩⲛ̄ ϩⲉⲛⲙⲟⲕϩ̄ⲥ̄' ⲙⲛ
(ϩⲉ)ⲛⲣ̄ⲙ̄ⲉⲓⲟⲟⲩⲉ .   ⲁϥⲥⲱ
ⲧⲙ̄ ⲉⲣⲟⲛ . (ⲛ̄ⲧⲉⲩⲛⲟⲩ (?) ⲛ̄)ϭⲓ
ⲡⲉⲛⲧⲁϥϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ⲉⲧⲓ ⲉⲕ
ϣⲁϫⲉ ϥⲛⲁϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ⲉⲓⲥϩⲏ
ⲛⲧⲉ ϯ ⲙ̄ⲡⲉⲓ̈ⲙⲁ . ⲡⲉⲛϣⲟⲟⲡ
ⲇⲉ ⲡⲉ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲅⲁⲧⲁⲕⲓⲟⲛ ⲉϥⲟ'
ⲛ̄ⲕⲁⲕⲉ (ⲙ̄ⲡⲉ ⲉⲙ(?))ⲛ̄ ⲑⲉ ⲉⲧⲣⲉ
ⲟⲩⲁ ⲛⲁⲩ ⲉⲟⲩⲁ ⲉⲛⲧⲏⲣϥ̄ .

-ⲓ̄ⲃ- IV. ⲉⲓ̈ⲙⲏⲧⲉⲓ̈ ⲉⲧⲉⲥⲙⲏ ⲙ̄ⲡⲟⲩⲁ'ⲡⲟⲩⲁ'
ⲉⲧⲛ̄ⲥⲱⲧⲙ̄ ⲉⲣⲟⲥ ⲉⲛⲥⲟⲛ̄ⲥ̄
ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ϩⲙ̄ ⲡⲉⲛϣⲗⲏⲗ
ⲉⲧⲣⲉϥⲃⲟⲏⲑⲉⲓ̈ ⲉⲣⲟⲛ . ⲁⲩⲱ
ⲛ̄ϥⲣ̄ⲡⲉⲛⲙⲉⲉⲩⲉ ϩⲙ̄ ⲡⲕⲁϩ ⲙ̄
ⲡⲉⲛⲟ̄ⲃ̄ⲃⲓⲟ'. ⲉⲃⲟⲗϫⲉ ⲁ ⲡⲉ
ⲥⲛⲏⲩ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ϩⲟϫ

ϩϫ̅ ⲉⲙⲁⲧⲉ ϩⲛ̅ ⲧⲁϭⲃⲉⲥ ⲙ̅ⲛ̅ ⲡⲕⲁ
ⲕⲉ ⲉⲧⲙ̅ⲙⲁⲩ . ⲡⲕⲁⲧⲁⲅⲓⲟⲛ
ⲅⲁⲣ ⲉⲧⲙ̅ⲙⲁⲩ ⲡⲉϥⲟⲩⲏⲧ ⲉⲡⲉ
ⲥⲏⲧ ϩⲙ̅ ⲡⲕⲁϩ ⲉϥⲟⲣϫ̅ ϩⲛ̅ (ϩ)ⲉⲛⲙⲏ
ⲏϣⲉ ⲙ̅ⲙⲟⲭⲗⲟⲥ ⲉϣⲁⲩⲛⲟϫ̅ⲛ̅
ⲉⲡⲉⲥⲏⲧ ⲉⲣⲟϥ ⲙ̅ⲡⲛⲁⲩ ⲉ(ϣⲁ)
ⲣⲉ ⲡⲣⲏ ϩⲱⲧ̅ⲡ̅ ⲙ̅ⲙⲏⲛⲉ . ⲉ(ⲣⲉ)
ⲙ̅ⲙⲁⲧⲟⲓ̈ ⲙ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲁⲡⲟⲣⲫⲉⲣ . . (?) ⲓⲥ
ⲙ̅ⲡⲉⲛⲕⲱⲧⲉ ⲧⲏⲣ̅ϥ̅ . ⲁⲛⲟⲛ
ϫⲉ ⲡⲉⲙ̅ⲛ̅ⲧⲁⲛ ⲙ̅ⲙⲁⲩ ⲛ̅ⲗⲁⲁⲩ ⲛ̅
ϩⲉⲗⲡⲓⲥ ⲛ̅ⲱⲛ̅ϩ̅ . ⲉⲛϭⲟⲗ̅ϫ̅(ⲛ)
ⲛ̅ⲥⲁ ⲛ̇ⲛⲟⲩⲧⲉ ⲡⲁⲓ ⲉⲧⲛ(ⲟⲩϩⲙ̅)
ⲛ̅ⲛⲉⲧϩⲉⲗⲡⲓⲍⲉ ⲉⲣⲟϥ . ////
ϫⲉ ϩⲓ ⲟⲩⲥⲟⲛ ⲛⲉⲣⲉ ⲛⲉⲛ(ϭⲓϫ)
ⲡⲟⲣ̅ϣ̅ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲣⲉ ⲛⲉⲛϩⲏⲧ
ⲁϣⲉ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲛⲥⲙⲟⲩ
ⲉⲛϩⲩⲙⲛⲉⲩⲉ ⲉⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ϩⲛ̅ ⲛ̅ⲱ
ϩⲏ ⲙ̅ⲡ̅ⲛ̅ⲓ̈ⲕⲟⲛ' ⲉⲣⲉ ⲛⲟⲩⲁ'ⲛⲟⲩⲁ'
ⲙ̅ⲙⲟⲛ ⲣⲟⲉⲓⲥ . ⲁⲩⲱ ⲉⲛⲥⲟⲗⲥ̅ⲗ̅
ⲛ̅ⲛⲉⲛⲉⲣⲏⲩ ϩⲛ̅ ⲛ̅ⲗⲟⲅⲟⲥ ⲛ̅
ⲧⲉⲅⲣⲁⲫⲏ ⲙⲛ ⲛⲁⲛ̅ⲉⲩⲁⲅⲅⲉⲗⲓ(ⲟⲛ)

V. ⲉⲛⲟⲩⲱⲙ ϩⲙ̅ ⲡϣⲁϫⲉ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲛ̅ⲧⲉⲩϣⲏ ⲧⲏⲣ̅ⲥ̅ ⲉⲣⲉ ⲡϣⲁ
ϫⲉ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϩⲟⲗ̅ϭ̅ ϩⲛ̅ ⲧⲉⲛ
ⲧⲁⲡⲣⲟ ⲉϩⲟⲩⲟ ⲉⲡⲉⲃⲓⲱ̇ ⲙ̅ⲛ̅
ⲡⲙⲟⲩⲗ̅ϩ̅ . ⲉⲛⲁⲛⲁⲥⲧⲣⲉⲫⲉ
ϩⲛ̅ ⲙ̅ⲡⲟⲗⲓⲧⲉⲓⲁ ⲛ̅ⲛⲉⲛⲉⲓⲟⲧⲉ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲙⲁⲗⲓⲥⲧⲁ ⲛ̅ⲣ̅ⲛ̅ⲙⲉⲉⲩⲉ
ⲛ̅ⲛ̅ϣⲁϫⲉ ⲉⲧϩⲟⲗ̅ϭ̅ ⲙ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲛⲟϭ
ⲛ̅ⲁⲥⲕⲏⲥⲓⲥ ⲉⲧⲟϣ ⲙ̅ⲡⲙⲁⲕⲁ
ⲣⲓⲟⲥ ⲁⲛⲧⲱⲛⲓⲟⲥ ⲡⲉⲧⲫⲟⲣⲉ̇ⲓ
ⲙ̅ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲙ̅ⲛ̅ ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲡⲁϩⲟ
ⲙⲟ ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲙ̅ⲡⲣⲟⲫⲏⲧⲏⲥ

ⲡⲉⲧϣⲟⲟⲡ ϩⲙ̅ ⲡⲙⲁⲣⲏⲥ ⲉⲧ
ⲕⲓⲙ ⲉⲣⲟⲛ ⲛ̅ⲑⲉ ⲛ̅ⲟⲩⲙⲟⲩⲥⲓⲕⲟ͞
ⲉϥⲕⲓⲙ ⲉⲛⲟⲣⲅⲁⲛⲟⲛ ⲛ̅ⲧⲉϥ
ⲕⲓⲑⲁⲣⲁ. ⲡⲁⲓ̈ ϭⲉ ⲡⲉ ⲛ̅ⲣⲁϣⲉ ⲛ̅
ϩⲏⲧⲟⲩ. ⲁⲩⲱ ⲉⲡⲉⲩⲫⲣⲁⲛⲉ ⲙ̅ⲡ
ⲡⲉⲡⲉⲣⲏⲧ ϩⲙ̅ ⲡⲙⲁ ⲉⲧⲛⲟⲧⲛ̅ ⲉ
ϩⲟⲩⲛ ⲛ̅ϩⲏⲧϥ̅. ϩⲛ̅ ⲧⲡⲁϣⲉ ⲇⲉ
ⲛ̅ⲧⲉⲩϣⲏ ⲉ(ⲡⲁϩⲉ)ⲣⲁⲧⲛ̅ ϩⲓ ⲟⲩⲥⲟⲛ
ϩⲛ̅ ⲟⲩⲥϣ (?) ⲛⲉⲁⲩⲛⲟϭ ⲛ̅ⲟⲩⲉⲓ͞ (1)
. . . ϩⲙ̅ ⲡⲕⲁⲕⲉ ⲉⲧⲛⲟⲧⲛ̅ ⲉϩⲟⲩ͞
ⲉⲣⲟϥ. ⲧⲟⲧⲉ ⲁ ⲡⲉⲧⲥⲏϩ ϫⲱⲕ
ⲉⲃⲟⲗ ⲉϫⲱⲛ ϫⲉ ⲡⲉⲧϩⲙ̅ⲟⲟⲥ
ϩⲙ̅ ⲡⲕⲁⲕⲉ ⲙⲛ̅ ⲑⲁⲓ̈ⲃⲉⲥ ⲙ̅
ⲡⲙⲟⲩ ⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ ⲁϥϣⲁ' ⲛⲁⲩ
ⲛ̅ⲧⲉⲣⲉ ⲡⲙⲁ ⲇⲉ ⲧⲏⲣϥ̅ ⲣ̅ⲟⲩⲟⲉⲓ͞
ⲉϩⲟⲩⲟ ⲉⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ ⲙ̅ⲡⲉϩⲟⲟⲩ
ⲁⲛϭⲱϣⲧ̅ ⲧⲏⲣⲛ̅ ⲛ̅ⲧⲉⲩⲛⲟⲩ

▸ⲓ̅ⲋ̅◂ VI. ⲁⲛⲛⲁⲩ ⲉⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲉϥⲁϩⲉⲣⲁⲧϥ̅ ϩⲛ̅
ⲧⲉⲛⲙⲏⲧⲉ. ⲁϥⲥⲟⲟⲩⲧⲛ̅ ⲛ̅ⲧⲉϥ
ϭⲓϫ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲉⲃⲟⲗ ⲉϫⲱⲛ'
ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁⲛ ϫⲉ ϯⲣⲏⲛⲏ ⲛⲏⲧⲛ̅
ⲧⲏⲣⲧⲛ̅ · ⲧⲁⲉⲓⲣⲏⲛⲏ ⲉⲧⲉ ⲧⲱⲓ̈
ⲧⲉ ϯϯ ⲙ̅ⲙⲟⲥ ⲛⲏⲧⲛ̅. ϯⲣⲏⲛⲏ
ⲛⲏⲧⲛ̅ ⲡⲁϣⲟⲟⲥ ⲉⲧⲛ̅ϩⲟⲧ'
ⲉⲧϫⲓⲙⲟⲉⲓⲧ ϩⲏⲧⲟⲩ ⲛ̅ⲛⲁⲉ
ⲥⲟⲟⲩ ϩⲛ̅ ⲧⲉϩⲓⲏ ⲉⲧⲥⲟⲩⲧⲱⲛ
ϯⲣⲏⲛⲏ ⲛⲏⲧⲛ̅ ⲡⲁⲟⲩⲱϩⲉ ⲛ̅ⲣⲉϥ
ϭⲉⲡⲣⲱⲙⲉ ⲉⲧⲛⲟⲩϫⲉ ⲛ̅ⲛⲉⲧⲁⲃⲟ
ⲟⲩⲉ ⲉⲧϭⲱⲡⲉ ⲛ̅ⲛⲉⲯⲩⲭⲟⲟⲩⲉ

(1) Il papiro era rotto in due pezzi e nel fissarne i frammenti sulla carta, furono spostate alquanto le lettere; dubito quindi della sua giusta ricomposizione.

ϯрнин ннтн насаеін нреч
т(албш...) етрпазре етѳе
ранете нтмнтрωме же н
нетκнос ϩм нноβе . ϯрн
нн ннтн наречтащеоеιщ
етотааβ нтатотωнϩ εβολ
мнаран ϩм нκаϩ тнрч . ϯ
рнин ннт(н нама)ртνрос н
аѳλнт(нс нтатрмар)(тνрос)
нϩаϩ нсон ϩатм нрро (м
нκаϩ етβе нарιанос . еιс
ϩннте бе аїϯотω ммωтн
ϩн нетнϩιсе тнрот нтат
щωне ммωтн ϩн тλоειбе
(н)нарιанос . нιтаλаιнωрос
неβιнн наї етсто εβολ н
тотсιа нтмнтноνте нϩо

Lacuna di due pagine.

>ιѳ< VII. нщнре неннα етотааβ' .
тоте а нрро амаϩте мнасе
βнс етммат нточ мн нет
нммач ачнаралιлот ммоч е
ϩраї етоотн еачϩωн ето
отч нана аѳанасιос ечжω
ммос же нϩотн нϩме нϩоот
етнмметаноει нсеϩомоλоrει
нтнιстιс ноρѳоλоξос ннε
нιсκонос нтаїеξωрιζе м
моот ϩн теча фоρмн мн н
κанωн нтнιстιс етотааβ
нтасотωнϩ εβоλϩн нιкαια
тноλιс ере наειωт κωстан
тιнос мнма етммат ере

ⲡⲕⲉⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ϩⲩⲡⲟⲅⲣⲁⲫⲉ ⲉⲣⲟⲥ ⲉϥⲟ' ⲛ̄ⲛⲟ
ⲧⲁⲣⲓⲟⲥ ⲙ̄ⲡⲉⲟⲩⲟⲉⲓϣ ⲉⲧⲙ̄
ⲙⲁⲧ ⲙ̄ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲁⲗⲉⲝⲁⲛⲇⲣⲟⲥ
ⲡⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ . ⲉϥⲧⲙ̄ϩⲟⲙⲟ
ⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̄ⲡⲉⲧ[ⲉⲣⲉ ⲁ]ⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ϯⲥⲃⲱ ⲛⲁϥ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲛ̄ ⲛ̄ⲥⲉ(ⲣⲟⲕ)
ϩ̄ϥ ⲉϥⲟⲛ̄ϩ ⲙ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲟⲛ ⲛⲓⲙ ⲉⲧ
ⲥⲱⲧⲙ̄ ⲛ̄ⲥⲱϥ . ⲛ̄ ⲛ̄ⲥⲉϫⲓⲧϥ̄ ⲉ
ⲡⲧⲟⲡⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲁⲩⲉⲝⲱⲣⲓⲍⲉ ⲙ̄ⲡ̄
ⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲣⲟϥ
ⲛ̄ⲧⲉϥⲁⲫⲟⲣⲙⲏ . ⲁⲛⲟⲕ ϩⲱⲱⲧ
ⲕⲱⲥⲧⲁⲛⲧⲓⲟⲥ ϯⲧ̄ⲥⲧⲟ ⲉⲃⲟⲗ
ⲛ̄ⲧⲉϥⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲑⲟⲟⲩ . ⲁⲩⲱ
ⲉⲧ̄ⲥⲧⲏⲩ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲛⲁϩⲣ̄ⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩ(ⲧⲉ)

>K̄< VIII. ⲙ̄ⲛ̄ ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ⲉϥϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϩⲙ̄
ⲡⲉϥⲗⲁⲥ ⲛ̄ϣⲟⲩϣⲁⲁⲧϥ ⲙ̄ⲛ̄
ⲧⲉϥⲧⲁⲡⲣⲟ ⲛ̄ϣⲟⲩⲧⲟⲙ̄ⲥ ϫⲉ
ⲟⲩⲥⲱⲛ̄ⲧ ⲡⲉ ⲡϣⲏⲣⲉ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲁⲛⲟⲕ ⲇⲉ ϯϩⲟⲙⲟ
ⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̄ⲧⲉⲧⲣⲓⲁⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲛ̄ⲁⲧⲡⲱⲣϫ̄ ϫⲉ ⲟⲩⲙ̄ⲛ̄ⲧⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲛ̄ⲟⲩⲱⲧ ⲧⲉ . ⲟⲩⲙ̄ⲛ̄ⲧϫⲟⲉⲓⲥ
ⲛ̄ⲟⲩⲱⲧ ⲧⲉ ⲟⲩⲟⲩⲥⲓⲁ ⲛ̄ⲟⲩⲱⲧ
ⲧⲉ ⲉⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲱⲣϫ̄ ϣⲟⲟⲡ ⲛ̄ⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧ
ⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲥϣⲓⲃⲉ .
ⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲥⲡⲱⲱⲛⲉ . ⲟⲩⲧⲉ
ⲙⲉⲥⲧⲁⲕⲟ . ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̄ⲙⲉ
ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̄ⲙⲉ .
ⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲉ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲟⲩ
ⲟⲉⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲉ . ⲡⲱⲛ̄ϩ ⲙ̄ⲙⲉ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲙ̄ ⲡⲱⲛ̄ϩ ⲙ̄ⲙⲉ . ⲧⲥⲟⲫⲓⲁ ⲙ̄ⲙⲉ
ⲉⲃⲟⲗϩⲛ̄ ⲧⲥⲟⲫⲓⲁ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ'

ⲡⲡⲁⲛⲧⲟⲕⲣⲁⲧⲱⲣ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̅ ⲡⲉ
ⲧⲁⲙⲁϩⲧⲉ ⲙ̅ⲡⲕⲟⲥⲙⲟⲥ ⲧⲏⲣϥ̅
ⲁⲩⲱ ϯϩⲟ ⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲙ̅ ⲡⲉⲡⲛ̅ⲁ̅
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲉⲧⲉ ⲡⲉⲧⲧⲁϩⲟ ⲙ̅
ⲡⲧⲏⲣϥ̅ ⲡⲉ . ⲡϣⲟⲙⲛ̅ⲧ ⲟⲩⲁ ⲡⲉ
ⲟⲩⲧⲣⲓⲁⲥ ⲛ̅ⲟⲩⲱⲧ ⲧⲉ ⲛ̅ϩⲟⲙⲟ
ⲟⲩⲥⲓⲟⲛ . ϯϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̅
ⲛⲁï ⲙ̅ⲡⲉⲙⲧⲟ ⲉⲃⲟⲗ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲙⲛ̅ ⲛ̅ⲣⲱⲙⲉ ⲕⲁⲧⲁ ⲑⲉ ⲛ̅ⲧⲁϥϩⲟ
ⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ϩⲱⲱϥ ⲛ̅ϭⲓ ⲡⲁⲉⲓ
ⲱⲧ ⲙ̅ⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ϣⲁⲛⲧϥ̅ⲃⲱⲕ
ⲉ)ⲣⲁⲧϥ̅ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲁⲩⲱ ⲕⲁⲧⲁ

> ⲁ̅ < IX. ⲑⲉ ⲛ̅ⲧⲁϥⲇⲓⲇⲁⲥⲕⲉ ⲛⲁï
ⲛ̅ϭⲓ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲡⲁⲡⲓⲥⲃⲟⲟⲩⲉ (1)
ⲉⲧⲛⲁⲛⲟⲩⲟⲩ ⲡⲁⲣⲭⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ
ⲛ̅ⲣⲁⲕⲟⲧⲉ . ⲁⲛⲟⲕ ⲇⲉ ϯⲕⲉ
ⲗⲉⲩⲉ ϩⲛ̅ ⲭⲱⲣⲁ ⲛⲓⲙ ϩⲛ̅ ⲧϭⲓϫ ⲛ̅ⲛ̅
ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲛ̅ⲧⲁⲩⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲛ̅ ⲭⲱⲣⲁ ⲛⲓⲙ ⲛⲁï ⲛ̅ⲧⲁⲩⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲛ̅ ⲧⲉⲝⲱⲣⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲉⲧⲣⲉ ⲟⲩ
ⲟⲛ ⲛⲓⲙ ϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̅ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲡⲉⲧⲛⲁⲣ̅ⲁⲧⲥⲱ
ⲧⲙ̅ ⲇⲉ ⲛ̅ⲥⲉⲧⲙ̅ϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ
ⲉⲧⲁϫⲓⲛϩⲟⲣⲟⲥ (?) ⲙ̅ⲡⲧⲁⲕⲟ ⲛ̅ⲁ
ⲣⲓⲟⲥ ⲡⲣⲉϥϫⲓⲟⲩⲁ ⲉⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ .
Ⲛⲁï ⲇⲉ ⲛⲉ ⲛ̅ⲣⲁⲛ ⲛ̅ⲛ̅ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛ̅ⲟⲣⲑⲟⲇⲟⲝⲟⲥ
ϩⲛ̅ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ · ⲁ
ⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ϩⲛ̅ ⲣⲁⲕⲱⲧⲉ . ⲗⲓ
ⲃⲉⲣⲓⲟⲥ ϩⲛ̅ ϩⲣⲱⲙⲏ . ⲇⲓ
ⲟⲛⲩⲥⲓⲟⲥ ϩⲛ̅ ⲧⲁⲫⲣⲩⲅⲏ . ⲉⲩ

(1) La lettura ⲡⲁⲡⲓⲥⲃⲟⲟⲩⲉ è incerta presentando questo gruppo tracce di raschiatura.

сєвіос [ϩⲙ̄ ⲡⲟⲛⲧ(ⲱⲥ).] ⲥⲁ
ⲣⲁⲛⲓⲱⲛ ϩⲛ̄ ⲑⲙⲟⲩⲓ̈. ⲙⲁ
ⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲧⲕⲱⲟⲩ. ⲉⲩ
ⲥⲧⲟⲭⲓⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲓ̈ⲟⲩⲡⲡⲏ. ⲉⲩ
ⲗⲟⲅⲓⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲧⲁⲫⲛⲁⲥ. ⲓ̈ⲱ
ϩⲁⲛⲛⲏⲥ ϩⲛ̄ ⲉⲫⲉⲥⲟⲥ. ⲙⲁⲣ
ⲕⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲧⲁⲥⲓⲁ ~ ⲡⲁⲩⲗⲟⲥ
ϩⲛ̄ ϩⲓⲉⲣⲓⲭⲱ̄ ~ ~ ⲡⲉ(ⲥⲧⲟ ?)
ⲣⲓⲟⲥ ϩⲙ̄ ⲙ̄ⲛϥⲉ· ~ ⲥⲓⲗⲟⲩ
ⲁⲛⲟⲥ ϩⲛ̄ ϫⲁⲁⲛⲉ.

>ⲕ̄ⲃ< X. ⲉⲩⲡⲣⲉⲡⲓⲟⲥ ϩⲛ̄ ϩⲣⲟϫⲏ’
ⲓ̈ⲉⲣⲏⲙⲓⲁⲥ ϩⲛ̄ ⲥⲓⲱⲛ’
ϫⲣⲁⲅⲟⲛⲧⲓⲟⲥ ϩⲙ̄ ⲡⲟⲩⲃⲁⲥⲧⲉ
ⲧⲓⲙⲟⲑⲉⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲗⲉⲟⲛⲧⲱ’
ⲙⲁⲑⲉⲁⲓⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲧⲕⲓⲗⲓⲕⲓⲁ’
ⲡⲉⲧⲣⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲕⲟⲣⲓⲛⲑⲓⲟⲥ’
ⲛⲁⲓ̈ ϭⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲣⲟⲩϫⲓ ⲛ̄ⲁⲣⲓⲟⲥ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲓⲧⲙ̄ ⲡⲣⲣⲟ ⲁⲩϫⲓⲧϥ̄ ϩⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲙ̄
ⲡⲉⲩⲛϩⲉϫⲣⲓⲟⲛ ⲉⲧⲙⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲛⲉ
ⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲁⲩϣⲁ
ϫⲉ ⲡ̄ⲙⲙⲁϥ ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲕⲁⲛⲱⲛ ⲛ̄
ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛⲧ..ϥ ⲙ̄ⲛ
ⲛⲉⲧⲛ̄ⲙⲙⲁϥ. ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ ϫⲉ ⲙ̄
ⲡⲟⲩⲉϣⲥⲁϩⲱⲟⲩ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲧⲉⲩ
ⲙⲁⲧⲟⲩ ⲛ̄ϩⲟϥ ⲉⲧϣⲗⲏ ϩⲛ̄ ⲧⲉⲩ
ⲯⲩⲭⲏ’ ⲧⲁⲓ̈ ⲛ̄ⲧⲁ ⲟⲩⲙⲏⲏϣⲉ ⲧⲁ
ⲕⲟ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧⲥ̄. ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ̄ ⲡⲡⲁⲛⲧⲟⲕⲣⲁⲧⲱⲣ’ ⲁϥ
ϩⲁⲣⲡⲁⲍⲉ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲣⲟ ⲙ̄ⲙⲁⲓ̈ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄
ⲁϥⲛ̄ⲧϥ̄ ⲉⲃⲟⲗϩⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲛ̄ⲛⲁⲁϫⲉ (1)
ⲑⲏⲣⲓ. [ⲛ̄ⲁⲣⲓⲟⲥ ⲡⲉⲓ][ⲣⲉϥϫⲓⲟⲩⲁ]

(1) Questa parola fu soprapposta ad un'altra e scritta in gran parte sul margine, inoltre questo ed il precedente foglio sono divisi in due pezzi incollati su fogli distinti.

ⲉⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲁϥϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̄(ⲧⲛⲓ)
ⲥⲧⲓⲥ ⲙ̄ⲡⲉϥⲉⲓⲟⲧⲉ . ⲁϫⲛ̄
ⲛⲁ̈ⲓ ⲇⲉ ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲛ̄ϩⲟⲩⲛ ⲙ̄ⲡⲉϩⲙⲉ
ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲧⲁϥϩⲟⲣⲓⲍⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ
ⲛ̄ϭⲓ ⲡⲣ̄ⲣⲟ̂ ⲙⲡⲉ ⲁⲣⲓⲟⲥ ⲟⲩⲱϣ
ⲟ. . ⲙⲉⲧⲁⲛⲟⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲛ̄
ⲧⲉϥⲁⲣⲛⲏⲥⲓⲥ ⲉⲧⲙⲉϩ ⲛ̄ⲟⲩⲁ
ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲙⲛ̄ ⲛⲉϥⲣⲉϥϫⲓϣⲟϫⲛⲉ
ⲉⲣⲟⲟⲩ . ⲁⲩⲥⲏⲙⲁⲛⲉ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲣⲟ̂

Lacuna di 18 *pagine.*

XI. (ⲉⲣ)ⲉ ⲡⲉϥϩⲟ ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲟⲣⲅⲏ ⲉϩⲟⲩⲛ
(ⲉ)ⲣⲟⲛ. ⲁⲛⲟⲛ ⲇⲉ ⲙ̄ⲡⲛ̄ⲙⲉⲗⲉⲓ ⲛⲁ
(ⲉ)ⲛⲧⲏⲣ̄ϥ ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲛⲟϭ ⲛ̄ⲉⲟⲟⲩ ⲛ̄
(ⲧⲁ)ⲛⲉⲓ ⲛ̄ϩⲏⲧϥ̄ . ⲡⲉϫⲁϥ ⲇⲉ ⲛ̄ⲁⲑⲁ
ⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲟⲕ ⲡⲉ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ⲡⲉⲧϣⲧⲟⲣⲧⲣ̄ ⲛ̄ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲙ̄
ⲡⲕⲟⲥⲙⲟⲥ ⲧⲏⲣ̄ϥ . ⲡⲉϫⲁ̈ⲓ ⲛⲁϥ
ϫⲉ ⲁⲛⲟⲕ ⲁⲛ ⲡⲉⲧϣⲧⲟⲣⲧⲣ̄ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ
ⲁⲗⲗⲁ ⲛ̄ⲧⲟⲕ ⲡⲉⲧϣⲧⲟⲣⲧⲣ̄ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ
ⲁⲩⲱ ⲉⲣⲉ ⲡⲏ̈ⲓ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϣⲏϥ
ⲛ̄ⲧⲉⲕⲁⲫⲟⲣⲙⲏ ⲙⲛ ⲛⲓⲕⲉⲟⲩⲁ
ⲉⲧϩⲙⲟⲟⲥ ϩⲁϩⲧⲏⲕ ϩⲙ̄ ⲡⲧⲣⲉ
ⲧⲉⲧⲛ̄ⲥⲱⲧⲙ̄ ⲛⲥⲁ ⲛ̄ϣⲁϫⲉ ⲛ. .
(. . . ⲉⲧⲉ)ⲧⲛ̄ⲃⲁⲥⲁⲛⲓⲍⲉ ⲛ̄ⲛ̄
ϣⲟⲟⲥ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ . ⲉⲩⲧⲱⲛ ϭⲉ
ⲛⲉⲥⲃⲟⲟⲩⲉ ⲉⲧ. . . . ⲙⲛ̄ ϭⲓⲛ
ϣⲙϣⲉ ⲉⲧⲛⲁⲛⲟⲩⲟⲩ ⲛ̄ⲧⲁ
ⲡⲉⲕⲉⲓⲱⲧ ϩⲟⲛⲟⲩ ⲉⲧⲟⲟⲧⲕ
ⲉϥⲛⲁⲃⲱⲕ ⲉⲣⲁⲧϥ̄ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
Ⲉⲥⲧⲱⲛ ⲧⲛⲟϭ ⲙ̄ⲡⲁⲣϩⲏⲥⲓⲁ ⲙ̄
ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲛⲧⲁⲥϣⲱⲡⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲕ
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ϩⲓⲧⲙ̄ ⲡⲉⲕⲉⲓⲱⲧ
ⲉⲩⲧⲱⲛ ⲛ̄ⲭⲁⲣⲓⲥⲙⲁ ⲛ̄ⲧⲁ ⲕⲱⲥ

(ⲧ)ⲁⲛⲧⲓⲛⲟⲥ ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲛ̄
ⲡⲉ)ⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ϩ̄ⲛ̄ ⲡⲉϥϩⲟⲟⲩ'
(ⲧⲉ)ⲛⲟⲩ ϩⲓⲱⲱⲕ ⲁ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟ
ⲡⲟⲥ ϫⲱⲱⲣⲉ ⲉⲃⲟⲗ . ⲁ ⲡⲉⲡⲣⲉ
ⲥⲃ)ⲩⲧⲉⲣⲟⲥ ⲱϫ̄ⲛ̄ . ⲁ ⲛ̄ⲇⲓⲁ
(ⲕⲟⲛⲟ)ⲥ ...... ⲁ ⲙ̄ⲙⲟⲛⲁⲭⲟⲥ

▸ ⲓ̄ⲉ̄ ◂ XII. ⲗⲟ ⲉⲩⲟⲛ̄ϩ ⲉⲃⲟⲗ . ϩⲓⲱⲱⲕ
ⲁ ⲛ̄ⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ϣⲱϥ ϫⲉ ⲙⲛ̄(ⲡⲉ)
ⲕⲗⲏⲣⲓⲕⲟⲥ ⲛ̄ϩⲏⲧⲟⲩ , ⲁ(ⲡⲉ)
ⲯⲁⲗⲙⲱⲇⲟⲥ ⲱϫ̄ⲛ̄ ϩⲙ̄ ⲡⲏⲓ̈ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲁ ⲡⲉⲑⲩⲥⲓⲁ ⲗⲟ
(1) .... ⲉⲩⲃⲏⲕ ⲉ
ϩⲣⲁⲓ̈ ⲉⲧⲡⲉ . ⲉⲓⲥ ⲟⲩⲙⲏⲏϣⲉ
ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ϯⲥⲟⲣⲙ̄ ϩⲓϫⲙ̄ ⲡⲕⲁϩ
ⲉⲓ̈ⲗⲏϭ ϩ̄ⲛ̄ ϩⲁϩ ⲛ̄ⲧⲟⲡⲟⲥ ⲉⲩⲇⲓ
ⲱ(ⲕ)ⲉⲓ ⲛ̄ⲥⲱⲓ̈ . ⲁⲓ̈ⲣⲡⲱⲃϣ̄
ⲙ̄ⲡⲣⲁϣⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ,
ⲁ ⲧⲉⲭⲉⲣⲟⲇⲟⲛⲓⲁ ⲟⲩⲱ. . .
ⲧ ⲛ̄ⲛⲁϭⲓϫ ϫⲉ. . . . .
ⲡⲟⲥ (ⲧⲏⲣⲟⲩ) ϣⲧⲟⲣⲧ̄ⲣ̄ . ⲁ ⲡⲉ
ⲭⲟⲣⲟⲥ ⲧⲏⲣ̄ϥ̄ ⲛ̄ⲛ̄ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ
ⲣ̄ϣⲡⲏⲣⲉ ⲉϫⲙ̄ ⲡⲉⲛϫⲱⲱⲣⲉ
ⲉⲃⲟⲗϫⲉ ⲁ ⲡⲉⲛⲥϯⲛⲟⲩϥⲉ ⲗⲟ
ⲉⲩⲃⲏⲕ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ϣⲁⲣⲟⲟⲩ .
ⲁⲗⲗⲁ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲓ̄ⲥ̄ ⲡⲁⲕⲁⲁⲛ ⲁⲛ ⲛ̄
ⲥⲱϥ ϣⲁ ⲉⲛⲉϩ . ⲁⲗⲗⲁ ϥⲛⲁ
ⲛⲁ ⲛⲁⲛ ⲛ̄ϥⲛ̄ⲧⲛ̄ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ̄
ⲧⲁⲓⲭⲙⲁⲗⲱⲥⲓⲁ ⲉⲧⲛ̄ ⲛ̄ϩⲏⲧ̄ⲥ̄
ⲛⲁⲓ̈ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲁⲓ̈ϫⲟⲟⲩ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉ
ϩⲙ̄ ⲡ̄ⲣ̄ⲣⲟ ⲉⲓ̈ⲟⲩⲱϣ ⲉⲧⲣⲉϥ
ϭⲱⲛⲧ ⲛ̄ϥϯⲁⲡⲟⲫⲁⲥⲓⲥ ⲉⲣⲟ(ϥ)

---

(1) Questa linea, che porta tracce di raschiatura ha in principio un piccolo tratto (⁓) seguito da alcune parole illeggibili, e termina col gruppo ⲉⲩⲃⲏⲕ ⲉ.

ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲇⲉ ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁ̈ⲓ ϫⲉ ⲕⲁ
ⲉϩⲣⲁ̈ⲓ ⲧⲉⲛ . . . ⲛ̄ⲧⲉ . .

> ϥϥⲓ̈ < XIII.

ⲙ̄ⲛ ⲧⲉⲓⲙⲛ̄ⲧⲁⲧⲥⲱⲧ̄ⲙ̄ ⲛ̄ⲧⲉ
ⲧ̄ⲛ̄ⲃⲱⲕ ⲛ̄ⲥⲉⲕⲣⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲙⲱⲧ̄ⲛ̄
ϩⲓ ⲟⲩⲥⲟⲛ ϩⲓⲧ̄ⲛ̄ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ
ⲁⲩⲱ ⲛϩⲁⲡ ⲉⲧⲟⲩⲛⲁϫⲟⲟϥ †
ⲛⲁⲉ(ⲓⲣⲉ) ⲁⲛⲟⲕ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲛ̄ⲧⲁϫⲟⲟⲩⲕ
ⲉⲧⲉⲕⲡⲟⲗⲓⲥ . ⲁ̈ⲓⲟⲩⲱϣ̄ⲃ̄ ⲡⲉ
ϫⲁ̈ⲓ ⲛⲁϥ ϫⲉ ⲁ̈ⲓⲟⲩⲱ ⲉ̈ⲓⲥⲕⲉⲡⲧⲉⲓ ⲙ̄
ⲙⲟ̈ⲓ ⲁⲩⲱ ⲧⲁ̈ⲓ ⲧⲉ ⲧⲁⲥⲩⲙⲃⲟⲩⲗⲓⲁ
ⲉⲧⲣⲁϣ̄ⲡ̄ϩⲓⲥⲉ ⲙ̄ⲛ ⲛⲁϣ̄ⲃ̄ⲣ̄ ⲙⲉⲗⲟⲥ
ϣⲁⲛⲧⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛⲁ' ⲛⲁⲛ ⲛ̄ϥ
ⲕ . . ⲛⲉⲛⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲛ̄ⲕⲉⲥⲟⲛ
(ⲛⲧⲉ) ⲛ̄ⲗⲁⲟⲥ ⲣⲁϣⲉ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲁⲛ . ⲛ̄
ⲧⲟϥ ⲇⲉ ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁ̈ⲓ ϫⲉ ⲉⲕⲟⲩⲱϣ
ⲉϫⲟⲟⲩ ⲕⲉⲁϣ ⲙ̄ⲡⲟⲗⲓⲥ ϣⲁⲛ̄ⲧ̄ⲕ
ⲥⲕⲉⲡⲧⲉⲓ ⲙ̄ⲙⲟⲕ . ⲁ̈ⲓⲟⲩⲱϣ̄ⲃ̄
ⲡⲉϫⲁ̈ⲓ ⲛⲁϥ ϫⲉ ⲙⲁ ⲛⲓⲙ ⲉⲣⲉ ⲡⲣⲏ
ϣⲁ ⲉϫⲱϥ ⲉⲛⲁⲛⲉⲭⲣⲓⲥⲧⲓⲁⲛⲟⲥ ⲡⲉ
ⲉⲕϣⲁⲛϫⲟⲟⲩⲧ ⲅⲁⲣ ⲉⲙⲁ ⲛⲓⲙ †
ⲛⲁϭⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ϩⲓϩⲏ ⲙ̄ⲙⲟ̈ⲓ ⲉϥⲣ̄
ϩ̄ⲙ̄ⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲟ̈ⲓ . . ⲁⲩⲱ ⲛⲧⲉ̈ⲓϩⲉ ⲁϥ
ⲟⲩⲉϩⲥⲁϩⲛⲉ ⲉⲧⲣⲉⲩϥⲓⲧ̄ⲛ̄ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩ
ϩⲱⲛ ϩⲓⲧ̄ⲙ̄ ⲛⲁⲥⲉⲃⲏⲥ ⲉⲧϩ̄ⲙ̄ⲟⲟⲥ
ϩⲁϩⲧⲏϥ ⲁⲛⲟⲕ ⲙ̄ⲛ ⲓ̈ⲥⲓⲇⲱⲣⲟⲥ
ⲡⲉⲡⲣⲉⲥⲃⲩⲧⲉⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲥⲉⲧⲁⲗⲟⲛ
ⲉⲩⲕⲟⲧ̈ⲓ ⲛ̄ⲥⲕⲁⲫⲟⲥ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲕⲣⲟϥ
ϩⲱⲥ ⲉⲩⲛⲁϫⲓⲧ̄ⲛ̄ ⲉⲡⲙⲁ ⲉⲧⲉⲣⲉ ⲛ̄ⲉ
ⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲛ̄ϩⲏⲧ̄ϥ̄ ⲛ̄ⲥⲉϥⲓⲧ̄ⲛ̄ ⲉⲃⲟⲗ
ⲛ̄ⲥⲉⲛⲟϫ̄ⲛ̄ ⲛ̄ⲙ̄ . . . ϩ̄ⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲙ̄
ⲙⲟⲩⲉⲓⲟⲟⲩⲉ ⲛ̄ⲥⲉⲙⲟⲩⲟⲩⲧ ⲙ̄ⲙ.
. . . ϫⲓⲧ̄ⲛ̄ ⲛ̄ϭⲓ ⲛ̄ⲣⲉϥϩⲱⲧ̄ⲃ̄

>ⲙⲍ< XIV. ⲁⲩⲧⲁⲗⲟⲛ ⲉⲩⲕⲟⲩⲓ̈ ⲛ̄ⲥⲕⲁⲫⲟⲥ
ⲛⲧⲟⲟⲩ ⲇⲉ ⲁⲩⲉ(ⲓ̈ ⲉ)ⲃⲟⲗ ⲉⲩⲧⲁⲗⲏⲩ ⲉⲩ
ⲛⲟϭ ⲛ̄ϫⲟⲓ̈. ⲛⲧⲉⲣ̄ⲡ̄ⲡⲱϩ ⲇⲉ ⲉⲧⲙⲏ
ⲧⲉ ⲛ̄ⲡ̄ⲙⲟⲩⲉⲓⲟⲟⲩⲉ ⲁⲛϭⲱϣⲧ ⲁⲛ
ⲛⲁⲩ ⲉⲛⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲥⲛⲟⲟⲩ ⲉⲩⲥⲉⲃⲓⲟⲥ
ⲡⲉⲩⲛⲟⲩⲭⲟⲥ ⲉⲁϥⲉⲓ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ϩ̄ⲙ̄
ⲡϫⲟⲓ̈ ⲉⲣⲉ ⲡⲉϥϩⲟ ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲟⲣⲅⲏ ⲉϩⲟⲩ
ⲉⲣⲟⲛ ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲡⲉ ⲡⲉϥϩⲟ ⲛ̄ϣⲃⲏⲣ ⲉⲁ
ⲣⲓⲟⲥ. ⲡⲉϫⲁⲓ̈ ⲁⲛⲟⲕ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ϫⲉ ⲁⲕϩⲓⲥⲉ ⲉⲕⲛⲏⲧ ⲕⲁⲧⲁ ⲙⲁ ⲉⲕ (?) (1)
. . . ⲛ̄ⲙⲟⲕ ⲱ̂ ⲡⲁⲛϩⲟⲥⲓⲟⲥ
ⲙ̄ⲛ̄ⲛⲥⲱⲥ ⲁⲕⲉⲓ ⲉⲛⲁ . . . ⲛ
ⲑⲁⲏ ⲇⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲕⲱⲛ̄ϩ . . . .
ⲥⲡⲟⲗ . . ⲉϭⲉ ⲙ̄. . . . . .
. . . .
. . . . . . ⲧⲉⲕⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲛⲁ . . . . ⲡⲉ
ϫⲁϥ ⲇⲉ . . . . ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲟⲕ
ϩⲱⲱⲕ ⲛ̄ⲧ̄ⲕ ⲟⲩⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ
ⲉⲁϣ ⲙ̄ⲡⲟⲗⲓⲥ . ⲡ̄ⲣ̄ⲣⲟ ⲁϥⲕⲉⲗⲉⲩⲉ
ⲉⲕⲁⲁⲕ ⲉⲃⲟⲗ . ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲇⲉ ⲡⲉϫⲁϥ
ϫⲉ ⲁⲛⲟⲕ ⲟⲩⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲁⲛ
ⲟⲩⲧⲉ ⲣⲱ ⲛ̄ϯⲙ̄ⲡϣⲁ ⲁⲛ ⲛ̄ⲧⲕⲉ
ⲙ̄ⲛ̄ⲛⲧⲣⲉⲥⲃⲩⲧⲉⲣⲟⲥ ⲛⲧⲁⲓϫ. . .
ⲁⲗⲗⲁ ⲉⲓϣⲟⲟⲡ ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲁⲉⲓⲱⲧ ⲁ
ⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ϫⲓⲛ ⲧⲁⲙⲛ̄ⲧⲕⲟⲩⲓ̈
ⲁⲩⲱ ⲛ̄ϯⲛⲁⲥⲛ̄ⲧϥ ⲛ̄ⲃⲟⲗ ⲁⲛ ϣ(ⲁ̂)
ⲧ̄ⲛ̄ⲃⲱⲕ ⲉⲣⲁⲧ̄ϥ̄ ⲙ̄ⲡ̄ⲛⲟⲩⲧⲉ ϩ(ⲓ)
ⲟⲩⲥⲟⲛ. ⲡⲙⲟⲩ ϭⲉ ⲉⲧ. . .
. . . .

(1) Questa e le susseguenti otto linee sono nel papiro talmente annerite che ne potei decifrare solo pochi segni.

> ⲙ̄ⲉ̄ < XV. ϯ

ⲙⲁϥϩⲱ̃ . ⲛ̄ⲧⲉⲩⲛⲟⲩ ⲁϥⲟⲩⲉϩ
ⲥⲁϩⲛⲉ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲁⲧⲟⲓ̈ ⲛ̄ⲣⲉϥϩⲱⲧ̄ⲃ̄
ⲉⲧⲣⲉⲩⲙⲟⲩⲣ ⲙ̄ⲙⲟⲛ ⲉⲛⲉⲛϭⲓϫ
ⲙⲛ̄ ⲛⲉⲛⲟⲩⲉⲣⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲥⲉϭⲱⲧ̄ϩ̄
ⲙ̄ⲡⲉⲥⲕⲁⲫⲟⲥ ϩⲁⲣⲟⲛ. ⲉⲁⲩⲣ̄
ϩⲱⲧ ⲉⲛⲉ̇ⲕⲣⲟ ⲁⲩⲕⲁⲁⲛ ⲉⲃⲟⲗ
ⲁⲛⲟⲛ ⲇⲉ ⲛⲉⲣⲉ ⲛ̄ϭⲓϫ ⲙ̄ⲡⲉⲛ
ϩⲏⲧ ⲡⲟⲣ̄ϣ̄ ⲉⲃⲟⲗ . ⲛ̄ⲁⲧⲥⲁⲣⲝ̄
ⲇⲉ ⲛ̄ⲥⲉⲃⲏⲗ ⲉⲃⲟⲗʼ ⲁⲛ . ⲛ̄ⲧⲉⲩ
ⲛⲟⲩ ⲇⲉ ⲁⲥⲉ(ⲓ) ⲛ̄ϭⲓ ⲧⲉⲕⲗⲟⲟⲗⲉ
ⲁⲥϩⲁⲣⲡⲁⲍⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲛ ⲙⲛ̄ ⲡⲉⲥⲕⲁ
ⲫⲟⲥ ⲁⲥⲛ̄ⲧⲛ̄ ⲉⲡⲉⲕⲣⲟ̂ . ⲙ̄ⲡⲉ
ⲡⲙⲟⲟⲩ ⲣⲱʼ ⲉⲓ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲉⲥⲕⲁ
ⲫⲟⲥ ⲉⲡⲧⲏⲣϥ̄ . ⲁ ⲙ̄ⲙⲣ̄ⲣⲉ ⲉⲧ
ϩⲛ̄ ⲛⲉⲛϭⲓϫ ⲃⲱⲗ ⲉⲃⲟⲗ . ⲁⲛⲁϩⲉ
ⲣⲁⲧⲛ̄ ⲉⲙⲛ̄ ⲙ̄ⲣ̄ⲣⲉ ϩⲛ̄ ⲛⲉⲛϭⲓϫ
ⲟⲩⲧⲉ ⲛⲉⲛⲟⲩⲉⲣⲏⲧⲉ . ⲁⲗⲗⲁ ⲛⲉ
ⲣⲉ ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲕⲱⲧⲉ ⲉⲣⲟⲛ
ⲛ̄ⲥⲁ ⲥⲁ ⲛⲓⲙ ⲉϥⲣ̄ϩⲙ̄ⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲛ
ⲡⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ⲇⲉ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲛ̄ⲧⲁϥ
ⲣ̄ϩⲙ̄ⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲛ ⲉⲃⲟⲗϩⲛ̄ ⲙ̄ⲙⲟⲩ
ⲉⲓⲟⲟⲩⲉ ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁⲛ ϫⲉ ⲙⲓⲱ
ⲧⲛ̄ ⲱ̃ ⲛ̄ϣⲟⲉⲓϫ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ . ⲃⲱⲕ
ⲉϩⲟⲩⲛ ϣⲁ ⲡⲣ̄ⲣⲟ̂ ⲉⲧⲃⲉ ⲁⲣⲓⲟⲥ
ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲣ̄ϩⲟⲧⲉ ϯϣⲟⲟⲡ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲏⲧⲛ̄
ⲉⲓ̈ⲛⲟⲩϩⲙ̄ ⲙ̄ⲙⲱⲧⲛ̄ . ⲁⲩⲱ ⲉⲓ̈
ⲇⲓⲁⲕⲟⲛⲉⲓ ⲉⲣⲱⲧⲛ̄ ϩⲙ̄ ⲙⲁ ⲛⲓⲙ
ⲉⲧⲉⲧⲛ̄ⲛⲁⲃⲱⲕ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲧⲟⲕ
ⲙⲛ̄ ⲡⲉⲕϣⲃ̄ⲣ̄ ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ϣⲁⲛ
ⲧⲉⲧⲛ̄ⲧⲁϩⲟ̂ ⲉⲣⲁⲧⲥ̄ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲙⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ ⲛⲁⲓ̈ ϭⲉ ⲉϥϩⲟ
(ⲛ)ϥ ⲉⲣⲟⲛ . ⲁⲛⲟⲛ ⲇⲉ ⲁⲙⲙⲟⲟϣⲉ

▸ⲙ̅ⲋ̅◂ XVI. ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲧⲡⲟⲗⲓⲥ . ⲛⲁϊ ⲇⲉ ⲛ̄
ⲧⲁⲩⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗ ⲉϫⲛ̄ ⲑⲁⲗⲁⲥⲥⲁ
ⲉⲡⲁⲩ ϫⲉ ⲁⲡⲟⲩϫⲁϊ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲙ̄ ⲡⲙⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲣ̄ⲣⲟ̂ ⲡⲟ
ϫⲛ̄ ⲉⲣⲟϥ ⲁⲩⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲛ̄ ⲧⲡⲟ
ⲗⲓⲥ ⲧⲏⲣ̄ⲥ̄ ⲉⲩⲱϣ ⲉⲃⲟⲗϩⲛ̄
ⲟⲩⲛⲟϭ ⲛ̄ⲥⲙⲏ ϫⲉ ⲟⲩⲁ ⲡⲉ
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛ̄ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲓ̅ⲥ̅ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲛ̄ ⲕⲉⲟⲩⲁ
ⲛ̄ⲃ̄ⲗⲗⲁϥ . ⲟⲩⲉⲓ ⲧⲉ ⲧⲉϥⲡⲓⲥ
ⲧⲓⲥ ⲉⲧⲥⲟⲩⲱⲛ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲛ̄
ⲕⲉⲟⲩⲉϊ ⲛ̄ⲃ̄ⲗⲗⲁⲥ . ⲧⲛ̄ϩⲟⲙⲟ
ⲗⲟⲅⲉⲓ ⲇⲉ ⲟⲛ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲛ̄ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲡⲁⲣⲭⲓⲉⲡⲓ
ⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲧⲛ̄
ϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̄ⲧⲉⲧⲣⲓⲁⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛ̄ϩⲟⲙⲟⲟⲩⲥⲓⲟⲥ
ⲛ̄ⲁⲧⲡⲱⲣ̄ϫ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲁⲧⲡⲱ
ⲱⲛⲉ . ⲛ̄ⲁⲧⲟⲩⲉ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲛ(ⲉⲩ)
ⲉⲣⲏⲩ . ⲛ̄ⲁⲧϣⲓⲃⲉ . ⲛ̄ⲁⲧⲧⲁ
ⲕⲟ . ⲛ̄ⲁⲧⲉⲓⲙⲉ ⲉⲣⲟⲥ . ⲛ̄ⲁⲧ
ϩⲉⲧϩⲱⲧ̄ⲥ̄ . ⲛ̄ⲁⲧⲛⲟⲃⲉ (ⲛ̄)
ⲣⲉϥϯⲱⲛ̄ϩ . ⲧⲉⲡⲡⲟⲗⲓⲥ ⲧⲏ
ⲣ̄ⲥ̄ ⲧ̄ⲥⲧⲟ' ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲛ̄ⲁⲅⲓⲟⲥ ⲡⲣⲉϥϫⲓⲟⲩⲁ ⲉⲡⲉⲭ̅ⲥ̅
Ⲛⲁϊ ⲇⲉ ⲉⲣⲉ ⲧⲡⲟⲗⲓⲥ ⲧⲏⲣ̄ⲥ̄
ϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ϩⲱⲥⲧⲉ ⲉⲧⲣⲉⲥ
ⲛⲟⲉⲓⲛ ϩⲓⲧ̄ⲛ̄ ⲧⲁϣⲏ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲏ
ⲏϣⲉ . ⲁⲩⲱ ⲧⲉϣⲡⲏⲣⲉ ⲛ̄
ⲧⲁⲥϣⲱⲡⲉ ⲁⲩⲛ̄ⲧ̄ⲥ̄ ⲛ̄ⲁϩⲣ̄ⲙ̄

XVII. ⲡⲣ̄ⲣⲟ . ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲇⲉ ⲁⲑⲁ
ⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲙ̄ⲛ̄ ⲓ̈ⲥⲓⲇⲱⲣⲟⲥ ⲡⲉⲡⲣⲉ
ⲥⲃⲩⲧⲉⲣⲟⲥ ⲁⲩⲛⲧⲟⲩ ⲛ̄ⲧⲉⲩⲛⲟⲩ

ϩⲓⲧⲛ̄ ⲧⲟⲓⲕⲟⲩⲛⲟⲙⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲁⲩⲟⲩⲁϩⲟⲩ ϩⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲙ̄ⲡⲡⲁ
ⲗⲁⲧⲓⲟⲛ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲣⲟ̂. ⲧⲟⲧⲉ
ⲁϥⲁϩⲉⲣⲁⲧϥ̄ ϩⲓϩⲏ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲣⲟ̂ ⲛ̄ϭⲓ
ⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲧⲡⲁⲣϩⲏ
ⲥⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲉϥⲧⲏⲕ ⲛ̄ϩⲏⲧ ⲉ
ϫⲛ̄ ⲛ̄ϭⲟⲙ ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲭⲁⲣⲓ
ⲍⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲛⲁϥ: ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁϥ
ⲛ̄ϭⲓ ⲡⲣ̄ⲣⲟ ϫⲉ ⲕⲁⲗⲱⲥ ⲁⲕⲉⲓ ϣⲁⲣⲟ͡ⲛ
ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲡϣⲟⲉⲓϫ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅
(ⲡ)ⲁⲅⲱⲛⲓⲥⲧⲏⲥ ⲛ̄ⲧⲉ ⲧⲙⲉ.
ⲡⲁⲑⲗⲟⲫⲟⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲁⲧϭⲱⲧⲡ̄
ⲡⲟⲓⲕⲟⲛⲟⲙⲟⲥ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲩⲥⲧⲏⲣⲓⲟ͡ⲛ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ. ⲡⲇⲓⲟⲓⲕⲏⲧⲏⲥ ⲛ̄ⲧⲉ
ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩⲟϫ ⲛ̄ⲧⲉ ⲧⲕⲁ
ⲑⲟⲗⲓⲕⲏ ⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ. ⲁⲕⲉⲓ̈
ϣⲁⲣⲟⲛ ϩⲓϫⲛ̄ ⲙ̄ⲙⲟⲩⲉⲓⲟⲟⲩⲉ
ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϫⲟⲓ̈ ϩⲓ ⲛⲉⲉϥ ⲱ̂ ⲡⲉⲧⲉ
ⲣⲉ ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲣ̄ϩⲙ̄ⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ϩⲓϫⲛ̄ ⲛ̄
ⲧⲛ̄ϩ ⲛ̄ⲛ̄ⲧⲏⲩ. ⲁⲕⲉⲓ ϣⲁⲣⲟⲛ ⲛ̄
ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ⲙ̄ⲡⲟⲩⲧ ⲉⲧⲣⲉⲩⲟⲩⲱ͡ⲛ
ⲛⲁⲕ ϩⲓⲧⲛ̄ ⲛ̄ⲣⲟ ⲉⲧⲟⲣϫ̄. ⲱ̂
ⲡⲉⲛⲧⲁ ⲡⲉⲛⲧⲁϥⲧⲁⲙⲓⲉ ⲡⲧⲏⲣϥ̄
ϫⲓⲙⲟⲉⲓⲧ ϩⲁⲧⲉϥϩⲏ. ⲁⲕϯⲧⲣⲏ
ⲛⲏ ⲛⲁⲛ ⲛ̄ⲧⲉⲕⲙ̄ⲛ̄ⲧⲁⲧⲛ̄ⲡⲱⲣϫ̄
ⲱ̂ ⲡⲉⲧⲫⲟⲣⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲡⲣ̄ⲣⲟ ⲛ̄
ϯⲣⲏⲛⲏ. ⲁⲕⲧⲱⲟⲩⲛ ϩⲁ ϩⲁϩ ⲛ̄ⲕⲓⲙ

>ⲙ̅ⲏ̅< XVIII. ⲇⲩⲛⲟⲥ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧⲛ̄ ⲙ̄
ⲡ̄ⲕϭⲱⲧⲡ̄ ⲱ ⲡⲉⲛⲧⲁϥϣⲱ
ⲡⲉ ⲛ̄ϣⲃ̄ⲣ ⲛ̄ⲛ̄ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ϩⲛ̄
ⲧⲉϥϭⲓⲛⲙⲓϣⲉ ⲛ̄ⲥⲧⲉⲫⲁⲛⲓⲕⲟ͡ⲛ
ⲧⲁⲙ̄ⲛ̄ⲧⲉⲣⲟ ⲧⲏⲣⲥ ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲕⲁⲑⲓⲥⲧⲁ ⲙ̄ⲙⲟⲓ̈ ⲉϫⲱⲥ ⲥⲭⲁ

ⲣⲓⲍⲉ ⲛⲁⲕ ⲙ̅ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲛ̅ⲧⲉⲕⲙ̅ⲛ̅ⲧ
ⲟⲩⲏⲏⲃ ⲛ̅ϣⲟⲣⲡ ⲉⲧⲕ̅ⲁⲣⲭⲉⲓ ⲉϫⲱⲥ
ϩ̅ⲙ̅ ⲡⲉⲑⲣⲟⲛⲟⲥ ⲛ̅ⲣⲁⲕⲟⲧⲉ .
ⲉⲧⲣⲉⲕϣⲱⲡⲉ ⲟⲛ ⲉⲕⲉⲓⲣⲉ
ⲙ̅ⲡⲉⲡⲙⲉⲉⲩⲉ ϩ̅ⲛ̅ ⲡⲉⲕϣⲗⲏⲗ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ. ⲁⲩⲱ ⲛ̅ⲅ̅ϣⲱⲡⲉ ⲉⲕ
ⲇⲓⲟⲓⲕⲉⲓ ⲛ̅ⲛ̅ⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲧⲏⲣⲟⲩ
ⲕⲁⲧⲁ ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧⲣ̅ⲙ̅ⲛ̅ϩⲏⲧ ⲙ̅ⲛ̅ ⲧ(ⲥⲟ)
ⲫⲓⲁ ⲛ̅ⲧⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ (ⲙ̅)
ⲙⲟⲥ ⲛⲁⲕ ϩⲓⲧ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲕⲁⲛⲱⲛ ⲉⲧ
ⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛ̅ⲧⲁ ⲛ̅ⲁⲡⲟⲥⲧⲟⲗⲟⲥ ⲭⲁ
ⲣⲓⲍⲉ ⲙ̅ⲙⲟⲟⲩ ⲛⲁⲛ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧ̅ⲛ̅
ⲧⲧⲁⲡⲣⲟ ⲙ̅ⲡⲛⲟϭ ⲛ̅ⲥⲁϩ ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅.
Ⲧⲉⲛⲟⲩ ϭⲉ ⲁⲣⲓ ⲡⲁϩⲣⲉ ⲉⲣⲟⲛ ϩ̅ⲛ̅
ⲛ̅ⲍⲏⲧⲏⲙⲁ ⲉⲧⲟⲣ̅ϫ̅ ⲙ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲗⲟⲅⲟⲥ
ⲉⲧϩ̅ⲙ̅ ⲡⲁϩⲟ ⲙ̅ⲡⲉⲕϩⲏⲧ ⲉⲧⲃⲉ
ⲡϣⲱⲱϭⲉ ⲛ̅ⲧⲁⲩϣⲟⲟϭⲛ̅ ⲛ̅
ϩⲏⲧ̅ϥ̅ ⲛ̅ϭⲓ ⲛ̅ⲁⲣⲓⲁⲛⲟⲥ ⲛⲁⲓ̈ ⲉⲧⲁⲣ
ⲛⲁ ⲛ̅ⲧⲟⲩⲥⲓⲁ ⲙ̅ⲡⲙⲟⲛⲟⲅⲉⲛⲏⲥ
Ⲛ̅ⲧⲟⲕ ⲇⲉ ⲱ̂ ⲡϣⲱⲥ ⲉⲧⲛ̅ϩⲟⲧ
ϫⲱ̂ ⲉⲣⲟⲛ ⲛ̅ⲛ̅ⲕⲉⲫⲁⲗⲁⲓⲟⲛ
ⲉⲧϫⲓ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲣⲟⲛ ⲕⲁⲧⲁ ⲡⲉⲧⲉ
ⲣⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛⲁⲭⲟⲣⲏⲅⲉⲓ ⲙ̅
ⲙⲟϥ ⲛⲁⲕ ϩⲓⲧ̅ⲛ̅ ⲧⲁⲅⲁⲡⲏ ⲙ̅ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅
ⲛⲁⲓ̈ ⲉⲧⲥⲟⲃⲧⲉ ⲛⲁⲛ ⲛ̅ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧⲉⲣ(ⲟ)

>ⲙ̅ⲑ̅< XIX. Ⲧⲟⲧⲉ ⲁϥⲟⲩⲱϣ̅ⲃ̅ ϩ̅ⲛ̅ ⲟⲩⲥϭⲣⲁϩⲧ̅
ⲡⲉϫⲁϥ ⲙ̅ⲡ̅ⲣ̅ⲣⲟ' ⲛ̅ϭⲓ ⲁⲡⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ϫⲉ ϩⲟⲧⲓ̅ ⲙⲉⲛ ⲱ̂ ⲡ̅ⲣ̅ⲣⲟ' ϫⲉ ⲁⲧϩⲁⲣ
ⲡⲁⲍⲉ ⲙ̅ⲡⲉⲕϩⲏⲧ ϩⲓⲧ̅ⲛ̅ ⲉⲩⲥⲉⲃⲓⲟⲥ
ⲡⲉⲥⲓⲟⲩⲣ' ⲛⲁⲓ̈ ⲉⲧϩⲩⲡⲟⲃⲁⲗⲉ
ⲙ̅ⲙⲟⲛ ⲉⲧⲃⲉ ⲛ̅ⲁⲣⲓⲁⲛⲟⲥ ϣⲁⲛ
ⲧ̅ⲕⲉⲝⲱⲣⲓⲍⲉ ⲙ̅ⲙⲟⲛ ⲙ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲕⲉⲉ
ⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲉⲧⲃⲉ

ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲛ̄ⲛⲉⲛⲉⲓⲟⲧⲉ ⲛ̄ⲧⲁⲩ
ⲕⲁⲁⲥ ⲉϩⲣⲁï ⲛ̄ϣⲟⲣⲡ̄ ⲉⲧⲉⲧⲣⲓⲁⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲧⲉ . ⲉϥⲧⲱⲛ ϭⲉ ⲡⲉ
ⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲉϥϣⲟⲩϣⲟⲩ ⲙ̄ⲙⲟϥ ϩⲙ̄
ⲧⲉϥⲙⲛ̄ⲧϫⲁⲥⲓϩⲏⲧ' ⲙⲏ ⲙ̄ⲡϥⲱ
ⲙ̄ⲥ ϩⲙ̄ ⲡⲡⲉⲗⲁⲅⲟⲥ ⲛ̄ⲑⲁⲗⲁⲥⲥⲁ
ⲛ̄ⲑⲉ ⲙ̄ⲫⲁⲣⲁⲱ̂ ⲙ̄ⲡⲓⲟⲩⲟⲉⲓϣ
ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲙⲛ̄ ⲡⲉⲧⲛ̄ⲙ̄ⲙⲁϥ . ⲛ̄
ⲧⲟⲕ ϫⲉ ⲱ̂ ⲡⲣ̄ⲣⲟ' ⲥⲱⲧⲙ̄ ⲉⲣⲟï ⲛ̄
ⲧⲁⲧⲁϣⲉⲟⲉⲓϣ ⲛⲁⲕ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲡⲁⲣ
ϩⲏⲥⲓⲁ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲛ̄ⲁⲧϩⲉ ⲛ̄ⲧⲉ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ . ⲧⲛ̄

ⲁ̄ ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲡⲉⲓⲱⲧ'
ⲡⲡⲁⲛⲧⲟⲕⲣⲁⲧⲱⲣ ⲱ̂ ⲡⲣ̄ⲣⲟ ⲡⲉⲛ
ⲧⲁϥⲧⲁⲙⲓⲉ ⲧⲡⲉ ⲙⲛ̄ ⲡⲕⲁϩ ⲙⲛ̄ ⲛ̄
ⲕⲁ' ⲛⲓⲙ ⲛⲉⲧⲛ̄ⲛⲁⲩ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲙⲛ̄
ⲛⲉⲧⲉ ⲛ̄ⲧⲛ̄ⲛⲁⲩ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲁⲛ .

ⲃ̄ ⲁⲩⲱ ⲧⲛ̄ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲡⲙⲟⲛⲟⲅⲉ
ⲛⲏⲥ ⲛ̄ϣⲏⲣⲉ ⲛ̄ⲧⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲓ̄ⲥ̄ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̄ⲙⲉ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲙ̄ⲙⲉ . ⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲉ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲙ̄ ⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲉ . ⲡⲱⲛ̄ϩ ⲙ̄
ⲙⲉ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲱⲛ̄ϩ ⲙ̄ⲙⲉ . ⲡⲣⲉϥ
ⲧⲁⲛϩⲟ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲣⲉϥⲧⲁⲛϩⲟ

>N̄< XX. ⲅ̄ ⲁⲩⲱ ⲧⲛ̄ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲡⲉⲡⲛ̄ⲁ̄
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲡⲣⲉϥⲧⲁⲛϩⲟ .
ⲡⲉⲧⲙⲟⲩϩ ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ̄ ⲉⲧⲉ
ⲡⲉⲣⲅⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ̄ . ⲡⲉⲧ
ϣⲟⲟⲡ ϩⲙ̄ ⲡⲥⲱⲛ̄ⲧ ⲧⲏⲣϥ̄
ⲁⲩⲱ ⲉϥⲛⲓϥⲉ ϩⲙ̄ ⲙⲁ ⲛⲓⲙ ⲛ̄ⲥⲉ
ⲛⲁⲩ ⲉⲣⲟϥ ⲁⲛ . ⲉⲧⲉⲓ ϫⲉ ⲟ̂

ⲇ̄ ⲧⲛ̄ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲱ̂ ⲡⲣ̄ⲣⲟ'
ϫⲉ ⲟⲩⲥⲱⲛⲧ ⲁⲛ ⲡⲉ ⲕⲁⲧⲁ ⲧⲙⲓ

ⲥⲧⲓⲥ ⲉⲑⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲁⲣⲓⲟⲥ . ⲁⲩⲱ
ϥϣⲟⲟⲡ ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲉⲓⲱⲧ ϫⲓⲛ
ⲧⲁⲣⲭⲏ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲁϥⲧⲁⲙⲓⲉ ⲛⲧⲏ
ⲣ̄ϥ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧϥ̄ ⲕⲁⲧⲁ ⲡⲉϥ
ⲟⲩⲱϣ : ϩⲟⲙⲟⲓⲱⲥ ⲧ̄ⲛ̄

ⲉ̄ ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲡϣⲟⲙⲛ̄ⲧ ⲟⲩⲁ ⲡⲉ
ⲡⲉⲓⲱⲧ ⲛ̄ⲣⲉϥⲧⲁⲛϩⲟ . ⲡϣⲏ
ⲣⲉ ⲛ̄ⲣⲉϥⲧⲁⲛϩⲟ . ⲡⲉⲡ̄ⲛ̄ⲁ̄ ⲉⲧ
ⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛ̄ⲣⲉϥⲧⲁⲛϩⲟ . ⲡⲉ(ï)
ϣⲟⲙⲛ̄ⲧ ⲟⲩⲁ ⲡⲉ . ⲟⲩⲧⲣⲓⲁⲥ
ⲛ̄ϩⲟⲙⲟⲟⲩⲥⲓⲟⲥ ⲧⲉ ⲉⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲱ
ⲣ̄ϫ ⲛ̄ϩⲏⲧⲥ̄ : ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲱⲥ ⲟ̂

ⲋ̄ ⲧ̄ⲛ̄ϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ̈ ⲛ̄ⲧⲉ
ⲑⲉⲟⲇⲟⲕⲟⲥ ⲙⲁⲣⲓⲁ ⲧⲣⲉϥϫⲡⲉ
ⲡⲟⲩⲧⲉ ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲛ̄ⲁⲧ
ⲧⲱⲗⲙ̄ ⲧⲉⲛⲧⲁⲥⲙⲓⲥⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲛ
ⲧⲁϥⲡⲗⲁⲥⲥⲉ ⲙ̄(ⲡⲕⲟⲥ)ⲙⲟⲥ
ⲧⲉⲛⲧⲁⲥⲟⲩⲱ̂ⲱ' ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄
ⲥⲩⲛⲟⲩⲥⲓⲁ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩⲧ . ⲁⲥⲙⲓ
ⲥⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϫⲱϩⲙ̄ . ⲁⲥϯ
ⲡⲁⲁⲕⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϯⲧⲕⲁⲥ
ⲁⲥⲥⲁⲁⲛϣ̄ ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϩⲓⲥⲉ .

>ⲡ̄ⲁ̄< XXI. ⲁⲥϯⲉⲕⲓⲃⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϣⲱⲡⲉ
ⲁⲥϩⲗⲟⲟⲗⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ⲣⲟⲟⲩϣ
ⲁⲥⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϩⲟⲩϩ̄ⲧ̄

ⲍ̄ ⲧ̄ⲛ̄ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲇⲉ ⲟⲛ ⲉⲧⲁⲛⲁⲥⲧⲁ
ⲥⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲉⲧⲛⲁϣⲱⲡⲉ ⲛ̄ⲥⲁ
ⲣ̄ⲝ ⲛⲓⲙ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲉⲓⲧⲉ
ⲇⲓⲕⲁⲓⲟⲥ . ⲉⲓⲧⲉ ⲣⲉϥⲣ̄ⲛⲟⲃⲉ ⲥⲉ
ⲛⲁⲧⲱⲟⲩⲛ ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲉⲩⲟ̂ ⲛ̄ⲁⲧⲧⲁⲕⲟ
ⲉⲧⲣⲉⲩϯϩⲁⲡ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲙ̄
ⲡⲉⲛⲧⲁϥⲥⲟⲛⲧⲟⲩ : ϩⲟⲙⲟⲓⲱⲥ

ⲏ̄ ⲧ̄ⲛ̄ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲧⲉⲡⲣⲟⲥⲫⲟⲣⲁ ⲉⲧ

ⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲡ ⲡⲉⲥⲛⲟϥ ⲛ̄
ⲓ̄ⲥ̄ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲡⲉⲛϫⲟⲉⲓⲥ . ⲛⲟⲉⲓⲕ
ⲙ̄ⲡ ⲡⲏⲣ̄ⲡ̄' ϣⲟⲣ̄ⲡ̄ ⲙⲉⲛ ⲉⲙⲡⲁⲧⲉⲛ
ⲉⲡⲓⲕⲁⲗⲉⲓ̈ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉϫⲱⲟⲩ ⲟⲩⲟ
ⲉⲓⲕ ⲡⲉ ⲙ̄ⲡ ⲟⲩⲏⲣ̄ⲡ̄ . ⲙⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ ⲧⲣⲉ
ⲡⲟⲩⲏⲏⲃ ⲇⲉ ⲉⲡⲓⲧⲓⲗⲉ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉ
ϫⲱⲟⲩ . ⲁ ⲡⲟⲉⲓⲕ ⲣ̄ⲥⲱⲙⲁ ⲛ̄ⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲁ ⲡⲡⲟⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ⲣ̄ⲥⲛⲟϥ ⲛ̄ⲛⲟⲩⲧⲉ

ⲑ̄ ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲱⲥ ⲟⲛ ⲧ̄ⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲉⲩⲃⲁ
ⲡⲧⲓⲥⲙⲁ ⲛ̄ⲟⲩⲱⲧ . ⲡⲣⲉϥϫⲡⲟ̂
ⲛ̄ⲕⲉⲥⲟⲛ ⲙ̄ⲡ̄ⲛ̄ⲁ̄ . ⲡⲉⲧⲉⲓⲣⲉ ⲙ̄
ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲣ̄ⲣⲉ . ⲡⲣⲉϥⲉⲓ̈ⲱ ⲉ
ⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲛ̄ⲛⲟⲃⲉ . ⲡⲣⲉϥϫⲡⲟ
ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲙ̄ⲙⲏⲧⲣⲁ ⲛⲁⲓ̈ ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲓ
ⲱⲧ ⲟⲩⲟⲛϩ̄ϥ̄ ⲛⲁⲛ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ̄ ⲙ̄
ⲙⲁ ⲛ̄ϩⲁⲧⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲓⲟⲣⲇⲁⲛⲏⲥ . ⲉ

(ⲓ̄) ⲧⲉⲓ ⲇⲉ ⲟⲛ ⲧ̄ⲛ̄ϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̄
ⲧⲡⲁⲣⲟⲩⲥⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲛϫⲟⲉⲓⲥ
ϫⲉ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄ⲧⲁⲩϥⲓⲧ̄ϥ̄ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲙ̄ⲙⲟⲥ
ⲧ(ⲁⲓ)ⲧⲉ ⲑⲉ ⲉⲧ̄ϥ̄ⲛⲏⲩ ⲙ̄ⲙⲟⲥ

>N̄B̄< XXII. ⲉϥⲫⲟⲣⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲛ̄ⲧⲁϥϫⲓ
ⲧ̄ϥ̄ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲙ̄ ⲙⲁⲣⲓⲁ ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲉⲣⲉ ⲛ̄ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ
ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲡ̄ⲙ̄ⲙⲁϥ ⲉϥⲫⲟⲣⲉⲓ ⲙ̄
ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲉⲓⲱⲧ . ϩⲟⲙⲟⲓ

ⲓ̄ⲁ̄ ⲱⲥ ⲧ̄ⲛ̄ϩⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲛ̄ⲛⲉⲅⲣⲁ
ⲫⲏ ⲛ̄ⲛⲓϥⲉ ⲛⲧⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛⲁⲓ̈
ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲉⲡ̄ⲛ̄ⲁ̄ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ϣⲁϫⲉ
ϩⲣⲁⲓ̈ ⲛ̄ϩⲏⲧⲟⲩ : ⲡⲛⲟϭ ⲛ̄ⲕⲉ

ⲓ̄ⲃ̄ Ⲫⲁⲗⲁⲓⲟⲛ ⲉⲛⲁⲓ̈ ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲧ̄ⲛ̄ϩⲟ
ⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉⲧⲉ ⲡⲉϥⲧⲟ
ⲟⲩ ⲛ̄ⲉⲩⲁⲅⲅⲉⲗⲓⲟⲛ ⲡⲉ ⲉⲧⲉ

ρε πεχρειστιαnος τηρου (1)
cω̂ ⲛ̄ϩⲏⲧⲟⲩ. ⲁⲩⲱ ⲡⲥⲁϩ'
ⲡⲁⲩⲗⲟⲥ ⲡⲗⲁⲥ ⲙ̄ⲡⲉⲥϯⲛⲟⲩϥⲉ
ⲙ̄ⲛ̄ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲧⲟⲗⲟⲟⲩⲉ ⲛ̄ⲕⲁⲑⲟ
ⲗⲓⲕⲟⲛ. ⲉⲓⲥ ⲡⲁï ⲡⲉ ⲛ̄ⲕⲁⲫⲁ
ⲗⲁⲓⲟⲛ ⲱ̀ ⲡ̄ⲣ̄ⲣⲟ ⲉⲛⲧⲁⲥⲣⲁⲛⲁϥ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲧⲣⲁϫⲟⲟⲩ ⲉⲣⲟⲕ ϫⲉ
ⲕⲁⲥ ⲉⲣⲉ ⲟⲩⲧⲁⲗϭⲟ ϣⲱⲡⲉ ⲛ̄
ⲧⲉⲕⲯⲩⲭⲏ ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲑⲟ
ⲟⲩ ⲛ̄ⲁⲣⲓⲟⲥ ⲡⲁï ⲛ̄ⲧⲁⲩⲡⲗⲁⲛⲁ ⲙ̄
ⲙⲟⲕ ⲙ̄ⲛ̄ ϩⲉⲛⲕⲟⲟⲩⲉ ⲉⲛⲁϣⲱ
ⲟⲩ. ⲉϣⲱⲡⲉ ϭⲉ ⲱ̂ ⲡ̄ⲣ̄ⲣⲟ ⲛⲓ
ⲕⲉⲫⲁⲗⲁⲓⲟⲛ ⲛ̄ⲧⲁïϫⲟⲟⲩ ⲥⲉ
ⲥⲟⲩⲧⲱⲛ ⲛ̄ⲁϩⲣⲁⲕ ⲉïⲉϫⲟⲟⲩ
ⲁⲛⲓⲛⲉ ⲉⲛⲓⲙⲁ ⲛ̄ⲛⲉⲛϣⲃ̄ⲣ̄ ⲛ̄
ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲁⲕⲉⲝⲱⲣⲓ
ϫⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ (ⲛ̄ⲧⲁⲫⲟⲣⲙⲏ) ⲛ̄ⲁ
ⲣⲓⲟⲥ. ⲡⲁï ⲛ̄ⲧⲉⲣⲉϥϫⲟⲟⲩ ⲛ̄
ϭⲓ ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ

▸ⲡ̄ⲅ̄◂ XXIII. ⲡϫⲁⲣϩⲏⲧ'. ⲁϥⲟⲩⲱϣ̄ⲃ̄ ⲛ̄ϭⲓ ⲡ̄ⲣ̄
ⲣⲟ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲥⲙⲏ ⲙ̄ⲙ̄ⲛ̄ⲧⲣ̄ⲙ̄ⲣⲁϣ
ⲉϥϫⲱⲙⲙⲟⲥ ⲛ̄ⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲟⲕ ⲙⲉⲛ ⲱ̂ ⲡⲕⲏⲣⲩⲝ ⲛ̄ⲧⲙⲉ
ⲁⲕϯⲥⲃⲱ̂ ⲛⲁⲛ ⲕⲁⲗⲱⲥ ⲛ̄ϩⲁϩ ⲛ̄ⲥⲟⲡ
ⲁⲛⲟⲛ ⲇⲉ ⲁⲛⲣ̄ⲁⲧⲥⲱⲧ̄ⲙ̄ ⲛ̄ⲥⲱⲕ
ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲥⲩⲙⲃⲟⲩⲗⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲓⲣⲉϥⲧⲁ
ⲕⲉϩⲏⲧ ⲉⲩⲥⲉⲃⲓⲟⲥ ⲡⲁⲣⲓⲁⲛⲟⲥ
ⲡⲉⲧⲥⲏϣ. ⲧⲉⲛⲟⲩ ϭⲉ ⲡⲉⲕⲣⲁⲧⲟⲥ
ⲛ̄ⲧⲁⲙ̄ⲛ̄ⲧⲉⲣⲟ̂ ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ ⲛⲁⲕ ⲛ̄ⲟⲩⲉ
ⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲧⲓⲙⲏ ϩⲁ ⲛ̄ϩⲓⲥⲉ ⲧⲏ
ⲣⲟⲩ ⲛ̄ⲧⲁⲕϣⲟⲡⲟⲩ. ⲁⲩⲱ ϯϩⲟ

(1) In questo punto il papiro presenta una raschiatura e la parola ⲧⲏⲣⲟⲟⲩ è di un altro carattere.

ⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ̈ ⲙ̅ⲡⲙ̅ⲛ̅ⲧⲥⲛⲟⲟⲩⲥ ⲛ̅
ⲕⲉⲫⲁⲗⲁⲓⲟⲛ ⲛ̅ⲧⲁⲕϫⲟⲟⲩ ϩⲛ̅ ⲟⲩ
ⲙ̅ⲛ̅ⲧⲁⲧϣⲓⲃⲉ ⲙ̅ⲛ̅ ⲟⲩⲧⲁϩⲟ ⲉⲣⲁⲧϥ̅
ⲉⲁⲕⲧⲁϩⲟ ⲉⲣⲁⲧⲥ̅ ⲛ̅ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ϩⲙ̅
ⲙ̅ⲛ̅ⲧⲥⲉⲙⲛⲟⲥ ⲛⲓⲙ. ⲧⲟⲧⲉ ⲁϥ
ⲕⲉⲗⲉⲩⲉ ⲛ̅ⲧⲉⲩⲛⲟⲩ ⲛ̅ϭⲓ ⲡⲣ̅ⲣⲟ' ⲛ̅ⲟⲩ
ⲃⲉⲣⲉⲧⲁⲣⲓⲟⲥ ⲛ̅ⲉⲝⲟⲩⲥⲉⲩⲇⲩⲛⲁⲧⲟⲥ ⲡⲉ
ϩⲛ̅ ⲧⲉϥϭⲟⲙ ⲉⲧⲣⲉϥⲃⲱⲕ ⲧⲁⲭⲩ
ⲛ̅ⲥⲁ ⲛ̅ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲛ̅ϥⲛ̅ⲧⲟⲩ ⲛⲁϥ ⲛ̅ⲥⲁϣϥ̅ ⲛ̅ϩⲟⲟⲩ
ⲉⲣⲉ ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ϩⲁϩ
ⲧⲙ̅ ⲡⲣ̅ⲣⲟ̂ ⲉϥⲧⲁϫⲣⲟ ⲙ̅ⲙⲟϥ ϩⲛ̅
ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲥⲟⲩⲧⲱⲛ. ⲡϩⲟⲩⲛ
ϭⲉ ⲛ̅ⲥⲁϣϥ̅ ⲛ̅ϩⲟⲟⲩ ⲁϥⲛ̅ⲧⲟⲩ ⲉⲣⲁⲧϥ̅
ⲙ̅ⲡⲣ̅ⲣⲟ ⲉⲧⲫⲟⲣⲉⲓ ⲙ̅ⲡⲉⲕⲗⲟⲙ ⲛ̅
ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ. ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲇⲉ ⲁⲑⲁ
ⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲁϥⲧⲱⲙ̅ⲛ̅ⲧ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲙ̅
ⲡⲃⲟⲗ ⲛ̅ⲧⲡⲟⲗⲓⲥ ⲁⲩⲁⲥⲡⲁⲍⲉ ⲛ̅
ⲛⲉⲩⲉⲣⲏⲩ. ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁⲩ ϫⲉ ϯⲣⲏ

ⲡⲍ̲ XXIV. ⲛⲏ ⲛ̅ⲏⲧⲛ̅ ⲛ̅ⲁⲅⲱⲛⲓⲥⲧⲏⲥ ⲛ̅
ⲧⲉ ⲧⲙⲉ ⲛ̅ⲧⲁⲧⲙⲓϣⲉ ⲕⲁⲗⲱⲥ ⲉ
ϫⲛ̅ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲙ̅ⲡⲉⲛϫⲟⲉⲓⲥ ⲓ̅ⲥ̅
ⲡⲉϫⲁⲩ ⲛⲁϥ ϫⲉ ⲥⲙ̅ⲙⲁⲕ ϩⲱ
ⲱⲕ ⲡⲉⲛⲧⲁⲛⲙⲓϣⲉ ⲕⲁⲗⲱⲥ
ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧϥ̅. ⲧⲟⲧⲉ ⲛ̅ⲧⲉ
ⲣⲉ ⲡⲣ̅ⲣⲟ ⲥⲱⲧⲙ̅ ⲉⲧⲃⲏⲏⲧⲟⲩ ⲁϥ
ⲧⲱⲟⲩⲛ ϩⲓϫⲙ̅ ⲡⲉϥⲑⲣⲟⲛⲟⲥ
ⲁϥⲁⲥⲡⲁⲍⲉ ⲙ̅ⲙⲟⲟⲩ. ⲁⲩⲱ ⲁϥ
ⲟⲩⲱϣⲧ̅ ⲉⲛⲉⲩϭⲓϫ ⲡⲉϫⲁϥ
ⲛⲁⲩ ϫⲉ ⲕⲁⲗⲱⲥ ⲁⲧⲉⲧⲛ̅ⲉⲓ ϣⲁ
ⲣⲟⲛ ⲱ̂ ⲛ̅ⲁⲑⲗⲏⲧⲏⲥ ⲛ̅ⲧⲉ ⲧⲡⲓ
ⲥⲧⲓⲥ. ⲧⲟⲧⲉ ⲫⲓⲗⲓⲡⲡⲟⲥ ⲡⲃⲉ
ⲣⲉⲧⲁⲣⲓⲟⲥ ⲉⲁϥⲧⲁⲩⲟ̂ ⲉⲡⲣ̅ⲣⲟ̂

ⲛ̄ϩⲉⲛⲛⲟϭ ⲛ̄ϣⲡⲏⲣⲉ ⲉⲁ ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲁⲁⲩ ⲛ̄ⲛⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ϩⲓ ⲧⲉ
ϩⲓⲏ . ⲁϥⲟⲩⲱϩ ⲟⲛ ⲉⲧⲟⲟⲧ̄ϥ̄
ⲁϥⲁϩⲓⲟⲩ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲉⲧⲙ̄ⲧⲣⲉⲩϭⲱ̂
ⲛ̄ⲟⲩⲉϣ ⲛ̄ϣⲗⲏⲗ ⲉϫⲱϥ ⲉⲧⲃⲉ
ⲙ̄ⲡⲉⲑⲟⲟⲩ ⲛⲧⲁϥⲁⲁⲩ ⲛⲁⲩ .
ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ ⲇⲉ ϩⲓ ⲟⲩⲥⲟⲡ ⲁⲩϯ ⲛⲁϥ
ⲛ̄ⲣⲏⲛⲏ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧ̄ⲙ̄ ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ
ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ . ⲡ̄ⲣ̄ⲣⲟ ⲇⲉ ⲁϥϫⲟ
ⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲟⲩⲁⲡⲟⲩⲁ ⲉⲡⲉϥⲧⲟⲡⲟⲥ
ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲉⲓⲣⲏⲛⲏ . ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ
ϩⲱϥ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲁϥϫⲟⲟⲩϥ ⲉ
ⲧⲉϥⲡⲟⲗⲓⲥ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲉⲓⲣⲏⲛⲏ . ⲉⲁϥ
ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ ⲛⲁϥ ⲛ̄ϩⲉⲛⲇⲱⲣⲟⲛ ⲉ
ⲛⲁϣⲱⲟⲩ ⲉⲛⲥⲟⲃⲧⲉ ⲛ̄ⲛ̄ⲉⲕ
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲛ̄ⲧⲁⲩϣⲣ̄ϣⲱⲣⲟⲩ ϩⲓ
ⲧ̄ⲛ̄ ⲛ̄ϫⲁϫⲉ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ . ⲉⲁ
ⲡ̄ⲣ̄ⲣⲟ̂ ⲥϩⲁï ϣⲁ ⲛⲁⲧⲉϥⲡⲟⲗⲓⲥ

XXV. ⲛ̄ⲡⲉϣⲡ(ⲏⲣ)ⲉ ⲧⲏⲣ(ⲟⲩ) ⲛ̄ⲧⲁ
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ (ⲙ̄)ⲙⲟⲟⲩ ⲛⲁϥ
ⲛ̄ⲧⲉⲣⲉϥⲉⲓ ⲇⲉ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲣⲁⲕⲟⲧⲉ
ⲛ̄ϭⲓ ⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲁ ⲡⲙⲏⲏϣⲉ
ⲧⲏⲣ̄ϥ̄ ⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲏⲧ̄ϥ̄ ⲉϫⲛ̄ ⲧⲉⲙⲣⲱ̂
ⲛ̄ⲑⲁⲗⲁⲥⲥⲁ ⲉⲩⲱϣ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩ
ⲛⲟϭ ⲛ̄ϩⲣⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲟⲩⲛⲟϥ ⲉⲩⲣⲁϣⲉ
ⲉⲙⲁⲧⲉ ϫⲉ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲓⲛⲉ ⲛⲁⲩ ⲙ̄
ⲡⲉⲩϣⲱⲥ ⲉϥⲟⲩⲟϫ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧ(ⲉⲓ)
ϩⲉ ⲁ ⲡ̄ⲗⲁⲟⲥ ⲃⲱⲕ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏ
ⲥⲓⲁ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲣⲁϣⲉ ⲛ̄ⲧⲉ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ . ⲁ
ⲛ̄ⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲙⲟⲩϩ ⲛ̄ⲣⲁϣⲉ ⲛ̄ⲕⲉⲥⲟⲛ'
ⲁ ⲛⲉⲡⲣⲉⲥⲃⲩⲧⲉⲣⲟⲥ ⲉⲩⲫⲣⲁⲛⲉ
ⲁ ⲛ̄ⲇⲓⲁⲕⲟⲛⲟⲥ ⲟⲩⲣⲟⲧ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ
ⲁ ⲙ̄ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲣ̄ϣⲁ . ⲁ ⲙ̄ⲙⲟⲛⲁ

ⲭⲟⲥ ⲙⲟⲩϩ ⲛ̄ⲟⲩⲣⲟⲩ . ⲁⲩϫⲱ ⲛ̄ⲛⲉⲩ
ⲯⲁⲗⲙⲟⲥ . ⲁ ⲧⲡⲟⲗⲓⲥ ⲧⲏⲣ̄ⲥ̄ ⲙⲟⲩϩ
ⲛ̄ⲣⲁϣⲉ . ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ ⲛⲁï ⲁ ⲡⲙⲁⲕⲁ
ⲣⲓⲟⲥ ⲣ̄ ⲥⲁϣ̄ϥ̄ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ ⲉϥϣⲁϫⲉ
ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲙⲏⲏϣⲉ ⲉϥⲧⲁϫⲣⲟ̄ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ
ϩ̄ⲛ̄ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲥⲟⲩⲧⲱⲛ’ . ⲡⲉ
ϫⲁϥ ⲛⲁⲩ ⲙ̄ⲡⲙⲉϩⲥⲁϣ̄ϥ̄ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ ⲛ̄
ϩⲟⲩⲛ ⲛ̄ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ϫⲉ ⲥⲱⲧ̄ⲙ̄
ⲉⲣⲟï ⲱ̂ ⲛⲁⲥⲛⲏⲩ . ⲁⲩⲱ ⲛⲁϣⲏⲣⲉ
ⲉⲓⲥ ϩⲏⲏⲧⲉ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲥⲕⲉⲡⲁⲍⲉ
ⲙ̄ⲙⲟⲛ ϣⲁⲛⲧ̄ϥ̄ⲛ̄ⲧ̄ⲛ̄ ⲛⲏⲧ̄ⲛ̄ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩ
ⲉⲓⲣⲏⲛⲏ . ϩⲁⲡ̄ⲥ̄ ϭⲉ ⲉⲣⲟï ⲡⲉ ⲉⲧⲣⲁ
ⲃⲱⲕ’ ϣⲁ ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲁⲛⲧⲱⲛⲓⲟⲥ
ⲛⲧⲁϫⲓⲥⲙⲟⲩ ⲉⲃⲟ̄ⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧ̄ϥ̄ ϫⲉ
ⲁ ⲡⲉⲟⲩⲟⲉⲓϣ ⲛ̄ⲧⲉϥⲙ̄ⲛ̄ⲧϩⲗ̄ⲗⲟ̂
ϩⲱⲛ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲧⲣⲉϥⲃⲱⲕ ϣⲁ ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ . ⲧⲟⲧⲉ ⲁϥϯ ⲛⲁⲩ ⲛ̄ϯⲣⲏⲛⲏ ⲁϥⲉⲓ
(ⲉⲃ)ⲟⲗ ϩⲓⲧⲟⲟⲧⲟⲩ . ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ

XXVI. Ⲇⲉ ⲁⲛⲧ(ⲱ)ⲛⲓⲟⲥ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲧⲁ
ⲙⲟϥ (ⲛϩ)ⲟⲩⲛ ⲛ̄ϣⲟⲙ̄ⲛⲧ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ
ⲉⲧⲣⲉ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲉï ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉ
ⲣⲁⲕⲟⲧⲉ ⲁϥⲧⲁⲙⲉ ⲡⲉϥⲙⲁⲑⲏⲧⲏⲥ
ⲥⲛⲁⲩ ⲛⲁⲛⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̄ⲛ̄ ϩⲁⲙⲁⲧⲉ
ⲧⲟⲧⲉ ⲁϥⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲧⲙⲟⲛⲏ ⲉⲧ
ϩⲓⲃⲟⲗ ⲁϥϣⲱⲡⲉ ⲉϥϭⲱϣⲧ
ⲉⲃⲟⲗϩⲏⲧ̄ϥ̄ . ⲛ̄ⲧⲉⲣⲉϥϩⲱⲛ
ϫⲉ ⲉⲧⲙⲟⲛⲏ ⲛ̄ϭⲓ ⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ⲁϥⲧⲱⲟⲩⲛ ⲛ̄ϭⲓ ⲡϩⲗ̄ⲗⲟ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲁϥⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲏⲧ̄ϥ̄ ⲉϥⲧⲁϫⲣⲏⲩ ⲉ
ϫ̄ⲛ̄ ⲧⲉϥϩⲉⲣⲃⲱⲧ’ ⲉⲣⲉ ⲡⲉϥ
ϩⲏⲧ ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲣⲁϣⲉ ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲉⲡ̄ⲛ̄ⲁ
ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲁϥⲣⲁⲕⲧ̄ϥ̄ ⲉⲡⲉ
ⲥⲏⲧ ⲛ̄ϭⲓ ⲡϩ̄ⲗ̄ⲗⲟ̂ ⲉⲧⲛⲁⲛⲟⲩϥ

ⲁϥⲟⲩⲱϣⲧ ⲙ̄ⲡⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ⲁⲩⲱ ⲁϥϯⲡⲓ ⲉⲣⲱϥ ⲁⲩϩⲱⲗϭ ⲉ
ⲛⲉⲩⲉⲣⲏⲩ . ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲱⲥ ⲁⲩⲃⲱⲕ
ⲉϩⲟⲩⲛ ⲁⲩϣⲗⲏⲗ' ⲁⲩϩⲙⲟⲟⲥ
ⲧⲟⲧⲉ ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲁⲛⲧⲱⲛⲓⲟⲥ
ⲁϥⲡⲉⲧϥ̄ ⲣⲱϥ ⲛ̄ⲥⲱⲃⲉ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩ(ⲭ)ⲁ
ⲣⲓⲥ . ⲁⲩⲱ ⲡⲉϫⲁϥ ⲙ̄ⲡⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ϫⲉ ϯⲣⲏⲛⲏ ⲛ̄ⲧⲉⲕϭⲓⲛⲉⲓ ⲉϩⲟⲩⲛ
ϣⲁⲣⲟⲛ ⲱ̂ ⲡⲙⲁⲣⲧⲩⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲥⲱⲧⲛ̄
ⲉⲓⲥ ϩⲏⲏⲧⲉ ⲡⲉ ϯϣⲓⲛⲉ ⲛ̄ⲥⲱϥ ⲁⲓ̈
ⲙⲁⲧⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉⲧⲉ ⲡⲁⲓ ⲡⲉ ⲉⲧⲣⲁ
ⲛⲁⲩ ⲉⲣⲟⲕ . ⲁⲩⲱ ϯⲣⲏⲛⲏ ⲛ̄ⲧⲉⲕ
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲉⲙⲛⲁϯⲕⲁ ⲥⲱⲙⲁ ⲉϩⲣⲁ(ⲓ̈)
ϯⲣⲏⲛⲏ ⲛⲁⲕ ⲍⲟⲣⲟⲃⲁⲃⲉⲗ ⲡⲉⲛ
ⲧⲁϥⲕⲱⲧ ⲙ̄ⲡⲏⲓ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ϯ
ⲣⲏⲛⲏ ⲛⲁⲕ ⲥⲟⲗⲟⲙⲱⲛ ⲡⲣⲉϥ(ⲕⲟ)
ⲥⲙⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲉⲣⲡⲉ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ .

XXVII. ⲉⲓⲥ ϩⲏⲏⲧⲉ ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲕ
ⲛⲁⲓ̈ ϩⲓⲧⲛ̄ ϯⲣⲏⲛⲏ ⲛ̄ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ
ⲕⲁⲧⲁ ⲑⲉ ⲛⲧⲁⲓ̈ⲧⲁⲙⲟⲕ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲛ̄
ⲧⲉⲭⲁⲣⲓⲥ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲙⲛⲁⲧⲕ̄
ⲃⲱⲕ ⲉⲣⲁⲧϥ̄ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲉⲧⲉⲓ ⲅⲁⲣ
ⲕⲉϣⲟⲙ̄ⲛ̄ⲧ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ ⲡⲉⲧⲉ ⲟⲩⲛ̄ⲧⲁⲓ̈
ⲥⲟⲩ ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲓⲕⲟⲥⲙⲟⲥ ⲉⲙⲛⲁϯⲃⲱⲕ ⲉ
ⲣⲁⲧϥ̄ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ϯⲡⲁⲣⲁⲕⲁⲗⲉⲓ ϫⲉ
ⲙ̄ⲙⲟⲕ ⲉⲧⲙ̄ⲧⲁⲙⲉⲣⲱⲙⲉ ⲉⲧϫⲓⲁⲑⲏ
ⲕⲏ ⲉⲧ(ϩ)ⲛ̄ ⲧⲉⲛⲙⲏⲧⲉ ϩⲓ ⲟⲩⲥⲟⲛ ϣⲁⲛ
ϯⲃⲱⲕ ⲉⲣⲁⲧϥ̄ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲏ
ⲥⲩⲭⲓⲁ . ⲛⲁⲓ̈ ϭⲉ ⲉⲣⲉ ⲡϩ̄ⲗⲗⲟ ϫⲱ ⲙ̄
ⲙⲟⲟⲩ ⲁϥⲣⲓⲙⲉ ⲛ̄ϭⲓ ⲁⲡⲁ ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ
ⲡⲙⲁⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲉⲃⲟⲗϫⲉ ⲙ̄ⲡϥ̄ⲕⲁⲁϥ
ⲉϭⲱ̂ ϩⲁϩⲧⲏϥ ϣⲁⲛⲧϥ̄ⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ̄
ⲥⲱⲙⲁ . ⲧⲟⲧⲉ ⲁⲩⲧⲱⲟⲩⲛ . ⲁⲩ

ϣⲗⲏⲗ᾽ ⲁⲩⲁⲥⲡⲁⲍⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲩⲉⲣⲏⲩ ·
ⲁϥϯ ⲛⲁϥ ⲛ̄ϯⲣⲏⲛⲏ ⲁϥⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲓ
ⲧⲟⲟⲧ̄ϥ . ⲁⲥϣⲱⲡⲉ ⲇⲉ ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ
ⲧⲣⲉϥⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧ̄ϥ ⲙ̄ⲡⲙⲁⲕⲁ
ⲣⲓⲟⲥ ⲁⲛⲧⲱⲛⲓⲟⲥ ⲁϥⲉⲓ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉ
ⲣⲁⲕⲟⲧⲉ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ ϣⲟⲙ̄ⲛ̄ⲧ
ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ ⲁϥⲙ̄ⲧⲟⲛ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲛ̄ϭⲓ ⲡⲙⲁ
ⲕⲁⲣⲓⲟⲥ ⲁⲛⲧⲱⲛⲓⲟⲥ . ⲁⲩⲉⲓ ϣⲁⲣⲟ̄
ⲁⲩⲧⲁⲙⲟⲛ ϫⲉ ⲁϥⲙ̄ⲧⲟⲛ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲛ̄ⲕⲟⲧ̄ⲕ ⲉⲛⲁⲛⲟⲩϥ . ⲁⲩⲱ
ⲁⲩϫⲱ ⲉⲣⲟⲛ ⲙ̄ⲡⲉϥⲃⲓⲟⲥ ⲙ̄ⲙⲁⲕⲁ
ⲣⲓⲟⲥ ⲁⲛⲥⲁϩ̄ϥ ⲉⲕⲉϫⲱⲱⲙⲉ ⲙⲁⲩ
ⲁⲁϥ ⲛ̄ⲥⲁⲟⲩⲥⲁ ⲛⲁ̈ⲓ ⲛ̄ⲧⲁϥϫⲟⲕ̄ϥ
ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ ⲟⲩⲉⲓⲣⲏⲛⲏ ⲁϥⲃⲱⲕ ⲉ
ⲣⲁⲧ̄ϥ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲉⲟⲟⲩ .
ⲉⲁϥⲕⲱ ⲙ̄ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲱϥ ⲛ̄ⲟⲩⲥⲧⲩⲗⲏ
ⲛ̄ⲁⲧⲕⲓⲙ ϩ̄ⲛ ⲧⲉⲭⲱⲣⲁ ⲛ̄ⲕⲏⲙⲉ
ⲉⲧⲉ ⲡⲉϥⲃⲓⲟⲥ ⲡⲉ ⲉⲧⲣ̄ⲟⲩⲟⲉⲓⲛ

XXVIII. ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲙ̄ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛ̄
ⲧⲁϥⲧⲟϭ̄ϥ ⲉⲣⲟϥ ϫⲓⲛ ⲧⲉϥⲙ̄ⲛ̄ⲧ
ⲕⲟⲩⲓ̈ . ⲡⲁ̈ⲓ ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧ̄ϥ ϣⲁ ⲉⲛⲉϩ
ⲛ̄ⲉⲛⲉϩ ϩⲁⲙⲏⲛ ~ ~ ~
~ ~ ~ ~
~ ~ ~ ~
ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲩ ⲗⲟⲅⲟⲩ :
~ ~ ~ ~

ⲡⲉⲅⲛⲱⲙⲏ ⲛ̄ⲧⲥⲩⲛϩⲟⲇⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
~ ~ ~ ~
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲡⲉⲓⲱⲧ ⲟⲩⲁⲅⲁⲑⲟⲥ ⲡⲉ
ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ

ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲟⲩⲁⲅⲁⲑⲟⲥ ⲡⲉ . ⲡⲉ
ⲡⲛ̅ⲁ̅ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̅ⲛ̅
ⲧ̅ϥ̅ ϩⲟⲩⲉⲓⲧⲉ . ⲟⲩⲧⲉ ⲙ̅ⲛ̅ ϩⲁⲏ'
ϣⲟⲟⲡ ⲛ̄ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲛ̄
ⲧⲟϥ ⲅⲁⲣ ⲡⲉ ⲧⲁⲣⲭⲏ . ⲁⲩⲱ ⲡϫⲱⲕ
ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣ̅ϥ̅ . ⲙ̄ⲛⲕⲧⲓ

XXIX. ⲥⲙⲁ ϣⲟⲟⲡ ϩ̅ⲛ̅ ⲧⲉⲧⲣⲓⲁⲥ . ⲁⲗⲗⲁ ⲛ̄
ⲧⲟϥ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲁϥⲥⲱⲛ̅ⲧ̅ ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣ̅ϥ̅
ⲙ̄ⲙ̅ⲛ̅ ⲡⲉⲧⲟ̂ ⲛ̄ϫⲟⲉⲓⲥ ⲉⲗⲁⲁⲩ ϩ̅ⲛ̅
ⲡⲉϥϩⲃⲏⲩⲉ . ⲁϥϯ ⲟⲩⲁⲩⲇⲟⲝⲟⲩⲥⲓⲟ͡
ⲇⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲧϩ̅ⲙ̅ ⲡⲧⲏⲣ̅ϥ̅ ϫⲉⲕⲁⲥ ⲉⲣⲉ
ⲛⲉⲓ̈ⲡⲣⲟϩⲁⲓⲣⲉⲥⲓⲥ ⲟⲩⲱⲛ̅ϩ̅ ⲉⲃⲟⲗ
ⲁ ⲧⲉⲡⲣⲟϩⲁⲓⲣⲉⲥⲓⲥ ⲛ̄ϩⲟⲉⲓⲛⲉ ⲉⲙ̄
ⲥⲟⲟⲩ ϩⲁⲧ̅ⲙ̅ ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ . ⲁⲩⲱ ⲁⲥϫⲁⲥ
ⲧⲟⲩ ⲡⲁⲣⲁ ⲛ̄ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ . ϩⲉⲛⲕⲟ
ⲟⲩ ⲇⲉ ⲁⲥϫⲓⲧⲟⲩ ⲉⲁ̅ⲙ̅ⲛ̅ⲧⲉ . ⲙ̄
ⲡⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲥⲛ̅ⲧ̅ ⲗⲁⲁⲩ ⲉϥϩⲟⲟⲩ
ⲛ̄ⲕⲉⲇⲁⲓⲙⲟⲛⲓⲟⲛ ϩⲟⲟⲩ ⲁⲛ ϩ̅ⲛ̅
ⲧⲉⲩⲫⲩⲥⲓⲥ . ⲁⲗⲗⲁ ϩ̅ⲛ̅ ⲧⲉⲩⲡⲣⲟ
ϩⲁⲓⲣⲉⲥⲓⲥ . ⲛ̄ⲕⲉⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲧⲉⲩⲡⲣⲟϩⲁⲓⲣⲉⲥⲓⲥ ⲁⲥ
ϣⲣ̅ⲡ̅ϫⲁⲥⲧⲟⲩ ϩ̅ⲙ̅ ⲡⲁⲅⲁⲑⲟⲛ ⲉⲧ
ⲁⲣⲉⲥⲕⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲧⲏⲣⲟⲩ
ⲉⲛⲉⲩϩⲏⲩ ⲙ̄ⲙⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲙ̅ⲛ̅
ⲡⲉⲩⲧⲁⲉⲓⲟ . ⲧⲉⲫⲩⲥⲓⲥ ⲅⲁⲣ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛ̄ⲥⲣ̅ⲭ̅ⲣⲉⲓⲁ ⲁⲛ ⲛ̄ⲗⲁⲁⲩ ϩ̅ⲛ̅
ⲛⲉⲛⲧⲁⲩⲥⲟⲛⲧⲟⲩ . ⲡⲧⲏⲣ̅ϥ̅ ⲇⲉ
ⲛⲧⲟϥ ϥⲣ̅ⲭ̅ⲣⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲟⲩ
ⲧⲉ ⲛ̄ⲛⲉϥⲥⲛ̅ⲧ̅ ⲗⲁⲁⲩ ⲛ̄ϥϭⲃ̂ⲱ ⲉϥⲟⲩⲟϫ
ⲉⲧⲟⲩⲟⲩϫⲁⲓ̈ ⲅⲁⲣ ⲧⲏⲣⲟⲩ ϩⲓⲧ̅ⲛ̅
ⲧⲉⲛⲉⲣⲅⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲉϥⲟⲩⲱϣ . ⲙ̄
ⲡⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲅⲁⲣ ⲥⲛ̅ⲧ̅ ⲗⲁⲁⲩ ⲉⲓ
ⲙⲏⲧⲉⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧ̅ϥ̅ ⲙ̄

. . . . ⲙ̄ⲛ ⲡⲉϥϣⲏⲣⲉ . ⲛ̄
(ⲥ)ⲱⲛⲧ ⲅⲁⲣ ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ

☩

ⲡ̄ϥ ⲡⲡ̄ⲁ ⲡⲉⲧ (1)

▸ⲝ̄◂ XXX. ⲁⲩϩⲁⲡⲉ ⲙⲙⲟⲟⲩ . ⲉⲣⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲙⲉ ⲡⲡⲉⲧⲥⲱ̄ϥ
ⲡⲉⲧⲥⲱⲧ̄ⲙ ⲇⲉ ⲛⲥⲱϥ
ⲥⲉⲥⲟⲩⲧⲱⲛ ϩ̄ⲛ ⲧⲉⲩⲡⲣⲟϩⲁⲓⲣⲉⲥⲓⲥ
ⲉⲣⲉ ⲧⲉⲡⲣⲟϩⲁⲓⲣⲉⲥⲓⲥ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϩ̄ⲛ
ⲛⲉϥϩⲃⲏⲩⲉ . ϩⲓⲧ̄ⲛ ⲛⲁⲓ̈ ⲅⲁⲣ ⲁⲩⲙⲟⲩ
ⲧⲉ ⲉϩⲟⲉⲓⲛⲉ ϩ̄ⲛ ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ϫⲉ ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ
ⲁⲩⲱ ϩⲉⲛⲕⲟⲟⲩ ϫⲉ ⲇⲁⲓⲙⲱⲛ .
ⲡⲉⲧⲟⲩⲱϣ ⲉⲥⲱⲧ̄ⲙ ⲛ̄ⲥⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ϥⲛⲁϫⲓⲥⲙⲏ ⲉⲛⲉϥⲉⲛⲧⲟⲗⲏ . ⲛⲁⲓ̈ ⲇⲉ
ⲛ̄ⲧⲉⲓ̈ⲙⲓⲛⲉ ⲡⲁϣⲟⲣⲡ̄ϥ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏ
ⲥⲓⲁ . ⲡⲉⲧⲉ ⲛ̄ϥϣⲱⲣ̄ⲡ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲁⲛ
ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲉϥⲁⲙⲉⲗⲉⲓ ⲉⲡⲉϥ
ⲟⲩϫⲁⲓ̈ ⲙ̄ⲙⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲟϥ . ⲡⲉⲧⲛⲏⲧ
ⲅⲁⲣ ⲉⲣⲁⲧ̄ϥ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉϥϣⲓⲛⲉ ⲛ̄
ⲥⲁ ⲟⲩⲃⲟⲏⲑⲓⲁ . ϣⲟⲣ̄ⲡⲕ ⲉⲧⲉⲕ
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲙ̄ⲡ̄ⲛ̄ⲥⲱⲥ ⲁⲧⲉⲕⲧⲉⲭⲛⲏ
ϫⲉⲕⲁⲥ ⲉⲣⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲥⲙⲟⲩ ⲉⲛⲉ
ϩⲃⲏⲩⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲕϭⲓϫ . ⲡⲉⲧϣⲱⲣ̄ⲡ
ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉⲧⲉϥⲧⲉⲭⲛⲏ ⲡⲁⲣⲁ ⲡⲏⲓ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲣⲉ ⲡⲉϥϩⲱⲃ ⲛⲁϣⲱⲡⲉ
ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲙ̄ⲛ̄ⲧⲁⲧϩⲟⲧⲉ . ⲁⲙⲁϩⲧⲉ
ⲛ̄ⲡⲉⲛⲧⲁⲕⲥⲟⲩⲙⲟⲩ ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲏⲓ̈ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲕⲁⲛ ⲉⲕⲣ̄ϩⲱⲃ . ⲏ̄ ⲉⲕⲙⲟ
ⲟϣⲉ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲅ̄ⲛⲁⲣ̄ⲛⲟⲃⲉ ⲁⲛ ⲡⲉ ⲟⲩⲛ̄
ⲡⲉⲧϥⲓⲱⲛ' ⲉϩⲉⲛⲙⲏⲥⲉ ⲟⲩⲱϣ ⲉⲣⲟϥ' ϩ̄ⲛ ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ

---

(1) Le parole ⲡ̄ϥ ⲡⲡ̄ⲁ ⲡⲉⲧ sono di un altro carattere, e trovansi sovrapposte alla prima linea della pagina XXX.

ϥⲥⲟⲧⲡ̄ ⲉⲡⲁⲓ̈ ⲛ̄ϭⲓ ⲡⲉⲧⲛ̄ⲕⲟⲧⲕ ϩⲙ̄ ⲡⲉϥⲏⲓ̈
ⲉⲧⲙⲟⲩⲧⲉ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ϫⲉ . . .
ⲛ̄ⲉⲓⲱ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲛⲛⲟⲃⲉ ⲁⲩⲱ ⲙⲁ
ⲣⲉ ⲡⲟⲩⲁⲡⲟⲩⲁ ⲣⲓⲙⲉ ⲉϫⲛ̄ ⲛⲉϥⲛ̄ⲟ(ⲃⲉ)
ⲟⲩⲕⲟⲩⲓ̈ ⲅⲁⲣ ⲡⲉ ⲡⲉⲛⲁϩⲉ ϩⲓϫⲙ̄(ⲡⲕⲁϩ)

ⳁ ⲉ̄

ⲋⲁ XXXI. ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁⲓ̈ ϣϣⲉ ⲉⲣⲟⲛ ⲉⲣ̄ϩⲏⲃⲉ ⲉ
ϫⲛ̄ ⲛⲉⲛⲛⲟⲃⲉ . ⲡϩⲱⲃ ⲛ̄ⲧⲉⲕ
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲙ̄ⲙⲁⲧⲉ ϩⲓ ⲥⲟⲡⲥ̄
ⲡⲉⲧϣⲁϫⲉ ϩⲛ̄ ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ . ⲙⲁ
ⲗⲓⲥⲧⲁ ⲉⲧⲱϣ ⲉϥⲥⲱϣ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲟⲩ̄ ⲡⲉ ⲡϩⲏⲧ ϫⲉ ⲁⲕⲃⲱⲕ ⲉⲡⲏⲓ̈ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲉϣϫⲉ ⲕⲛⲁⲃⲱⲕ ⲉϩⲟⲩ̄
ⲉⲙⲁⲩ ⲛ̄ⲅⲥⲱϣϥ . ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲛ
ⲙ̄ⲛ̄ⲗⲁⲁⲩ ⲛⲁϣϣⲟⲥϥ ⲧⲉϥⲫⲩⲥⲓⲥ ⲅⲁⲣ
ⲧⲁⲉⲓⲏⲩ ⲉϩⲟⲩⲟ ⲉⲛⲉⲧϣⲟⲟⲡ ⲧⲏⲣⲟⲩ
ⲡⲉⲧⲧⲁϣⲟ̂ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲉϥⲧⲓⲙⲱⲣⲓⲁ
ⲡⲉ ⲡⲉⲧⲛⲁⲧⲟⲗⲙⲁ ⲉⲣ̄ⲡⲃⲟⲗ ⲙ̄ⲡⲟⲩ
ⲱϣ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲡⲉⲧϭⲱϣⲧ̄
ⲛ̄ⲥⲁ ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ϩⲛ̄ ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲉϥ
ⲧⲁϣⲟ̂ ⲛⲁϥ ⲛ̄ⲧⲕⲟⲗⲁⲥⲓⲥ . ⲧⲉ
ⲥϩⲓⲙⲉ ⲇⲉ ⲉⲧⲕⲟⲥⲙⲉⲓ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ⲉⲡⲏⲓ̈
ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲟⲩⲁⲑⲏⲧ ⲡⲉ ⲡⲉⲥⲉⲓ
ⲱⲧ ⲙⲛ̄ ⲡⲉⲥϩⲁⲓ̈ . ⲧⲁⲓ̈ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲓⲙⲓ
ⲡⲉ ⲡⲁⲥⲱⲣⲙ̄ ⲛ̄ⲧⲉⲥⲯⲩⲭⲏ . ⲟⲩ
ⲥϩⲓⲙⲉ ⲉⲥϯⲛⲟⲩⲃ ⲉⲣⲟⲥ ⲉⲧⲉ(ⲕ)
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲙⲁⲗⲓⲥⲧⲁ ⲧⲉⲧⲟⲩⲱⲛ̄ϩ
ⲙ̄ⲙⲟⲥ ⲉⲃⲟⲗ ⲟⲩⲣⲉϥϣⲙ̄ϣⲉ ⲉⲓⲇⲱ
ⲗⲟⲛ ⲧⲉ . ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲃ ⲧⲁⲉⲓⲏⲩ ⲁⲛ
ⲛ̄ⲁϩⲣⲙ̄ ⲡⲥⲟⲫⲟⲥ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲡⲓ
ⲥⲧⲏⲙⲏ ⲛ̄ⲛ̄ⲃⲁⲗ . ⲧⲉⲧⲫⲟⲣⲉⲓ ⲛ̄
ϩⲉⲛⲗⲟⲟⲩ ⲉϫⲛ̄ ⲧⲉⲥⲁⲡⲉ ⲉⲥⲟⲩⲱ
ⲛ̄ϩ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲧⲉⲥⲙⲛ̄ⲧⲁⲑⲏⲧ' ⲁⲩⲱ

ⲧⲉⲧⲉⲣⲉ ⲡⲉⲥϥⲱ' ⲃⲏⲗ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲧⲉ
ⲡⲁ̈ ⲡⲉ ⲉϥ*ⲟ̂ ⲛ̅ϣⲕⲓⲗ' ⲉⲥⲕⲁⲗⲉⲓ̈ ⲛ̅
ϩⲉⲡⲁⲑⲏⲧ' . ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲉϣⲁⲩⲙⲉ
ⲣⲓⲧⲥ̅ ϩⲓⲧⲙ̅ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲣⲱⲙⲉ
ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧϩⲁⲕ ⲙ̅ⲛ̅ ⲧⲇⲓⲟⲓⲕⲏⲥⲓⲥ

>ⲝ̅ⲃ̅< XXXII. ⲙ̅ⲡⲉⲥⲏⲓ̈ . ⲡⲥⲁ ⲅⲁⲣ ⲉⲧϣⲟⲩⲉⲓⲧ
ⲟⲩⲛ̅ ⲟⲩⲙⲟⲥⲧⲉ ⲟⲩⲏϩ ⲛ̅ⲥⲱϥ
ⲕⲟⲥⲙⲉⲓ' ⲙ̅ⲙⲟ̂ ⲙ̅ⲡⲟⲩϩⲁⲓ̈ ϩ̅ⲛ̅
ϯⲟⲡⲉ ⲛ̅ⲡⲟⲩϭⲓϫ . ⲙ̅ⲛ̅ ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧϩⲁⲕ
ⲛ̅ⲧⲟⲩⲧⲁⲡⲣⲟ̂ . ⲉⲣⲉ ⲡⲉⲧⲟⲩⲁ
ⲁⲃ ⲅⲁⲣ ⲙⲟⲩⲧⲉ ⲉⲡⲉⲩϩⲁⲓ̈ ϫⲉ ⲡⲁ
ϫⲟⲉⲓⲥ . ⲙ̅ⲡⲣ̅ⲙⲉⲣⲉ ⲕⲟⲥⲙⲉⲓ ⲙ̅
ⲙⲟ̂ ⲱ̂ ⲧⲉⲥϩⲓⲙⲉ . ⲁⲗⲗⲁ ⲁⲣⲓ ⲡⲙⲉ
ⲉⲧⲉ ⲛ̅ⲡⲓⲥⲁⲉⲓⲉ' ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲉⲧϩ̅ⲛ̅
ⲡⲓⲧⲁⲫⲟⲥ . ⲉⲧⲓ̅ ⲅⲁⲣ ⲉⲩϩⲓϫ̅ⲙ̅
ⲡⲉϭⲗⲟϭ ⲙ̅ⲡϣⲱⲡⲉ ϣⲁⲣⲉ ⲡⲥⲁ
ⲗⲟ ⲛ̅ϩⲏⲧⲟⲩ . ⲕⲟⲥⲙⲉⲓ ⲛ̅ⲧⲟⲩ
ⲯⲩⲭⲏ ϩ̅ⲛ̅ ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧⲙⲁⲓ̈ⲛⲟⲩⲧⲉ · ⲛ̅
ⲧⲉϯ ⲙ̅ⲡⲟⲩϩⲏⲧ' ⲉⲡϣⲁϫⲉ ⲙ̅
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲧⲣ̅ⲥⲱⲧⲙ̅ ⲉⲣⲟϥ .
ⲙ̅ⲛ̅ ⲣⲱⲙⲉ ⲛ̅ⲥⲁⲃⲉ ⲛⲁϭⲱ̂ ⲙ̅ⲛ̅ ⲟⲩ
ⲥϩⲓⲙⲉ ⲛ̅ⲁⲑⲏⲧ . ⲧⲉⲧⲉ ⲛ̅ⲥⲉⲥⲱ̂
ⲧⲙ̅ ⲅⲁⲣ *ⲁⲛ ⲡⲥⲁ ⲡⲉⲥⲉⲓⲱⲧ ⲙ̅ⲛ̅
ⲡⲉⲥϩⲁⲓ̈ ⲟⲩⲁⲑⲏⲧ ⲧⲉ . ⲡⲁ
ϣⲏⲣⲉ ⲥⲁϩⲱⲕ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̅ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲙ̅
ⲙⲁⲓ̈ ⲕⲟⲥⲙⲉⲓ̈ . ⲙ̅ⲙⲁⲉⲓⲛ ⲅⲁⲣ ⲛ̅
(1) ⲙ̅ⲛ̅ ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧⲛⲟⲉⲓⲕ
ⲉⲧϩⲛ ⲡⲉϣⲕⲓⲗ' . ⲙ̅ⲛ̅ ⲛ̅
ϩⲱⲗⲕ̅ . ⲕⲛⲁⲥⲟⲩⲛ̅ ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲉⲥ
ⲙⲟⲥⲧⲉ ⲙ̅ⲡⲛⲟⲃⲉ ϩ̅ⲛ̅ ⲧⲙ̅ⲛ̅ⲧⲕⲁ
ⲑⲁⲣⲟⲥ ⲙ̅ⲡⲉⲥϩⲱ̂

(1) Il principio di questa e della susseguente linea è raschiato nel papiro.

ⲧⲉⲧⲧ̄ⲥⲧⲏⲙ ⲇⲉ ⲉⲡⲉⲥⲃⲁⲗ ⲉⲥ
ⲧⲁϣⲉⲟⲉⲓϣ ⲛ̄ⲧⲉⲥⲙⲛ̄ⲧⲁⲧϣⲁⲩ
ϩⲱⲃ ⲛⲓⲙ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲣ̄ⲭⲣⲉⲓⲁ ⲙ̄
ⲙⲟⲟⲩ ⲁⲛ . ⲟⲩⲙⲛ̄ⲧⲁⲧϣⲁⲩ
ⲧⲉ ⲫⲟⲣⲉⲓ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ . ⲟⲩ ⲡⲉ

>ⲝ̄ⲅ̄< XXXIII. ⲡϩⲏⲧ ⲙ̄ⲡⲉⲥⲧⲏⲙ ⲛ̄ⲛ̄ⲃⲁⲗ' . ⲉⲩ
ⲥⲱϣ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲑⲓⲕⲱⲛ ⲉⲧⲧⲁⲉⲓⲏⲩ
ϩⲓⲧⲙ̄ ⲡⲕⲣ̄ⲙⲉⲥ ⲛ̄ⲛ̄ϩⲏⲃⲥ̄ . ⲡⲉⲧ
ⲕⲟⲥⲙⲉⲓ ⲙ̄ⲙⲟϥ ϩⲛ̄ ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ
ⲡⲁⲣⲁ ⲧⲉϥⲫⲩⲥⲓⲥ ⲉϥⲥⲱϣ ⲙ̄
ⲡⲇⲏⲙⲓⲟⲩⲣⲅⲟⲥ . ϩⲃ̄ⲥ ⲡⲟⲩϩⲟ̂
ϩⲛ̄ ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲙⲛ̄
ⲛ̄ϩⲓⲣ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲥⲕⲁⲛⲇⲁⲗⲓⲍⲉ
ⲛ̄ⲟⲩⲯⲩⲭⲏ . ⲟⲩⲛ̄ ⲡⲉⲧⲙⲟⲟϣⲉ
ϩⲛ̄ ⲟⲩⲏⲥⲭⲏⲙⲁ ⲉϥϩⲟⲟⲩ ⲉϥⲙⲉⲉⲩⲉ
ϫⲉ ⲟⲩⲛ̄ ⲡⲉⲧϭⲱϣ̄ⲧ ⲛ̄ⲥⲱϥ'
ⲡⲁϊ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲉϊⲙⲓⲛⲉ ⲟⲩⲁⲑⲏⲧ ⲡⲉ
ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲉⲧϩⲱⲱⲕⲉ ⲛ̄ⲧⲉϥⲙⲟⲣ̄ⲧ
ⲉϥⲙⲉ ⲛ̄ⲧⲙⲛ̄ⲧⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ ⲛ̄ⲛ̄
ⲕⲟⲩϊ . ⲡⲉⲧⲟ̂ ⲇⲉ ⲛ̄ⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ
ⲥⲉⲟ̂ ⲛ̄ⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ ⲙ̄ⲙⲟϥ . ⲙⲁⲣⲉ
ⲧⲉⲕϩ̄ⲃⲥⲱ ϣⲱⲡⲉ ⲛⲁⲕ ⲡⲣⲟⲥ ⲧⲉ
ⲭⲣⲉⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲕⲟⲥ
ⲙⲉϊ ⲙ̄ⲙⲟⲕ ϩⲛ̄ ⲟⲩϥⲱ̂ ⲡⲁϊ ⲅⲁⲣ
ⲛ̄ⲧⲁⲩⲧⲁⲁϥ ⲛ̄ⲛⲉϩⲓⲟⲙⲉ . ⲉϣϫⲉ
ⲕⲛⲁⲣ̄ⲙⲁϊ ⲕⲟⲥⲙⲉⲓ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ
ⲛ̄ⲁⲑⲏⲧ ⲉⲕϣⲱⲃⲉ ⲉⲣⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲟⲩ . (1)
ⲡϩⲟⲟⲩⲧ ⲅⲁⲣ ⲉϥⲕⲏ ⲉϩⲣⲁⲓ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲛ̄ⲑⲉ
ⲙ̄ⲡϩⲏⲅⲉⲙⲱⲛ ⲛ̄ⲟⲩⲡⲟⲗⲓⲥ
ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲁⲓϣⲏⲣⲉ ϥⲛⲁϯ

---

(1) Questa linea ha ancora tracce poco visibili di lettere aggiunte nel margine come pure è scritta nel margine la parola ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ della linea susseguente.

ⲥⲃⲱ ⲛ̄ⲡⲉϥϣⲏⲣⲉ ⲕⲁⲗⲱⲥ . ⲧⲉϥ
ϣⲉⲉⲣⲉ ⲇⲉ ϥⲛⲁⲧⲥⲁⲃⲟⲥ ⲉⲡⲛⲟⲙⲟⲥ
ϣⲱⲡⲉ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄ⲟⲩϩⲏⲅⲉⲙⲱⲛ
ⲛ̄ⲡⲉⲕϣⲏⲣⲉ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲡⲉⲕϫⲓϣⲓ
ⲡⲉ ⲉϫⲱⲟⲩ . ⲉⲣϣⲁⲛ ⲧⲉⲕϣⲉ
ⲉⲣⲉ ⲉⲡⲓⲑⲩⲙⲉⲓ̈ ⲉⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧⲡⲁⲣⲑⲉ
ⲛⲟⲥ ⲁⲕⲙ̄ⲡϣⲁ ⲛ̄ⲟⲩⲭⲁⲣⲓⲥ ·

ⲡⲉⲕ (1)
XXXIV. ⲥⲉⲛⲁ ⲣ̄ⲡⲙⲉⲉⲩⲉ ϩⲓⲧⲙ̄
ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲅⲁⲣ ⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲁⲩⲱ ϥⲙⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲟⲩ
ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲏ ⲡⲉ ⲉⲥⲧⲛ̄
ⲧⲱⲛ̄ⲥ ⲉⲙⲁⲣⲓⲁ . ⲛⲓⲙ ⲇⲉ ⲡⲉⲧⲛⲁϣϣⲁ
ϫⲉ ⲉⲡⲁⲛⲁⲓ̈ ⲛ̄ⲧⲙⲁⲁⲩ ⲙ̄(ⲡⲉⲛ)ϫⲟⲓⲥ
ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲣⲓⲧⲥ̄ ⲉⲧⲃⲉ ⲛⲉⲥ
ϩⲃⲏⲩⲉ ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁⲓ̈ ⲁϥϭⲟⲓ̈ⲗⲉ ⲉⲣⲟⲥ
ⲙ̄ⲡⲉϥϣⲏⲣⲉ ⲙ̄ⲙⲉⲣⲓⲧ᾽ . ⲉⲩⲙⲟⲩ
ⲧⲉ ⲉⲡⲉⲓⲱⲧ ⲛ̄ⲁⲅⲉⲛⲉⲧⲟⲥ ϫⲉ
ⲡⲉⲓⲱⲧ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲡⲉ
ϩⲛ̄ ⲟⲩⲙⲉ ⲉⲩⲙⲟⲩⲧⲉ ϩⲱⲱϥ ⲉ
ⲙⲁⲣⲓⲁ ϫⲉ ⲧⲙⲁⲁⲩ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲁⲩⲱ
ϩⲛ̄ ⲟⲩⲙⲉ ⲛ̄ⲧⲟⲥ ⲧⲉⲛⲧⲁⲥϫⲡⲟ̂
ⲙ̄ⲡⲉⲛⲧⲁϥⲡⲗⲁⲥⲥⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲥ . ⲟⲩ
ⲧⲉ ⲙ̄ⲡϥ̄ϭⲱϫⲃ ϫⲉ ⲁⲥϫⲡⲟϥ ⲛ̄ϭⲓ
ⲙⲁⲣⲓⲁ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲟⲥ ϩⲱⲱⲥ ⲙⲛ̄ⲥ
ⲧⲁⲕⲟ̂ ⲛ̄ⲧⲉⲥⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲓⲁ . ⲉⲁⲥⲙⲓ
ⲥⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲛⲥⲱⲧⲏⲣ . ⲁⲗⲗⲁ ⲛ̄ϩⲟⲩⲟ̂
ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲁϥϩⲁⲣⲉϩ ⲉⲣⲟⲥ ⲛⲁϥ ⲛ̄ⲑⲉ
ⲛ̄ⲟⲩⲁϩⲟ ⲉϥⲧⲁⲉⲓⲏⲩ . ⲙ̄ⲡⲉ ⲙⲁ
ⲣⲓⲁ ⲛⲁⲩ ⲉⲡϩⲟ̂ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩⲧ ⲉⲛⲉϩ
ⲛ̄ϣⲙ̄ⲙⲟ . ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁⲓ̈ ⲣⲱ ⲁⲥ (2)

---

(1) Il gruppo ⲡⲉⲕ è scritto al disopra del verbo ⲣ̄ⲡⲙⲉⲉⲩⲉ, e tra questo verbo e la preposizione ϩⲓⲧⲙ̄ era una parola di tre o quattro lettere che ora è tutta raschiata.

(2) Questa e la susseguente linea mancano nel testo del Revillout come pure le due ultime di questa pagina.

ϣτορ̄τ̄ρ ⲛ̄τερεccωτ̄ⲙ̄(ετε)
cⲙⲏ ⲛ̄ⲅⲁⲃⲣⲓⲏⲗ ⲡⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ .
ⲛ̄τοc ⲇε πεcοτωⲙ ⲁⲛ ϩωc
εccⲁⲁⲛ̄ϣ ⲛ̄ⲟⲩⲥⲱⲙⲁ . ⲁⲗⲗⲁ
ϣⲁⲥⲟⲩⲱⲙ ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲁⲛⲁⲅⲕⲏ(ⲛ̄)
ⲧⲉⲥⲫⲩⲥⲓⲥ ϫⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲥⲙⲟⲩϩ(ⲉ)
ⲑⲏ ⲙ̄ⲡⲉⲥⲟⲩⲟⲉⲓϣ . ⲡⲉⲥⲥⲟ
ⲟⲩⲛ̄ ⲅⲁⲣ ⲁⲛ ⲡⲉ ⲙⲡⲉⲥⲕⲱⲕ(ⲁϩⲏⲩ ?)

XXXV. ⲙ̄ⲙⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲟⲥ . ⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲥⲕⲁ
ⲛⲉⲥϭⲓϫ ⲙ̄ⲡⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲛⲉⲥⲡⲁλ̊λⲉⲓⲛ
ⲉⲛⲉϩ . ⲛⲉⲥⲁⲛⲁⲭⲱⲣⲉⲓ ⲅⲁⲣ
ⲡⲉ ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲉⲥⲏ̈ⲓ ⲙⲁⲩⲁⲁⲥ ⲉⲩⲇⲓⲁⲕⲟ
ⲛⲉⲓ ⲛⲁⲥ ϩⲓⲧ̄ⲛ̄ ⲧⲉⲥⲙⲁⲁⲩ ⲙ̄ⲙⲓⲛ
ⲙ̄ⲙⲟⲥ . ⲉⲥϣⲁⲛⲛⲟⲩⲉ ⲇⲉ ⲉ
ⲃⲱⲕ ϣⲁⲣⲟⲥ ⲛⲉⲙⲉⲥϭⲙ̄ϭⲟⲙ
ⲉⲧⲁⲩⲉ ⲗⲁⲁⲩ ⲛ̄ϣⲁϫⲉ ⲛⲁⲥ ⲛ̄ⲥⲁ
ⲛⲉⲥϩⲱⲃ ⲙ̄ⲙⲁⲧⲉ . ⲉⲃⲟⲗϫⲉ ⲁⲥ
ⲧⲁⲣⲕⲟⲥ ⲉⲧ̄ⲙ̄ⲧⲣⲉⲥⲧⲁⲙⲟⲥ ⲉⲗⲁ
ⲁⲩ ⲛ̄ⲟⲩⲱ̂ ⲉⲛⲁⲛ(ⲓ)ⲕⲟⲥⲙⲟⲥ ⲡⲉ ⲙ̄ⲛ̄ⲧ
ⲛⲉⲥϩⲙⲟⲟⲥ ⲇⲉ ⲡ̊ⲉ ⲛ̄ⲥⲟⲡ ⲛⲓⲙ ϩⲓ ⲡⲉ
ⲉⲣⲉ ⲡⲉⲥϩⲟ̂ ϭⲱϣⲧ ⲉⲙⲙⲁⲛ̄ϣⲁ
ⲉⲃⲟⲗϫⲉ ⲡⲉⲥϣⲗⲏⲗ ⲡⲉ ⲉϫⲛ̄ ⲱ
ϫ̄ⲛ̄ . ⲛⲉⲣⲉ ⲛⲉⲥⲥⲛⲏⲩ ⲅⲁⲣ ⲉ
ⲡⲓⲑⲩⲙⲉⲓ ⲉⲛⲁⲩ ⲉⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲥⲉϣⲁ
ϫⲉ ⲛ̄ⲙ̄ⲙⲁⲥ . ⲁⲩⲱ ⲛⲉⲙⲉⲥⲁⲛⲉⲭⲉ
ⲛⲉⲣⲉ ⲛ̄ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ⲅⲁⲣ ⲛⲏⲩ ϣⲁ
ⲣⲟⲥ ⲛ̄ϩⲁϩ ⲛ̄ⲥⲟⲡ ⲉⲩⲑⲉⲱⲣⲉⲓ
ⲙ̄ⲡⲉⲭⲁⲣⲁⲕⲧⲏⲣ ⲛ̄ⲧⲉⲥⲡⲟ
ⲗⲓⲧⲉⲓⲁ' ⲉⲩⲣ̄ϣⲡⲏⲣⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲥ
ⲛⲉⲥⲛ̄ⲕⲟⲧ̄ⲕ̄ ⲇⲉ ⲟⲛ ⲡⲣⲟⲥ ⲧⲉ
ⲭⲣⲏⲥⲓⲥ ⲙ̄ⲡϩⲓⲛⲏⲃ ⲙ̄ⲙⲁⲧⲉ'
ⲁⲩⲱ ϩⲱⲥ ⲉⲥϯ ⲙ̄ⲧⲟⲛ ⲙ̄ⲡⲉⲥ
ⲥⲱⲙⲁ ⲁⲛ . ⲟⲩⲧⲉ ⲅⲁⲣ ⲙ̄ⲡ̄ⲥ̄

ⲡⲁⲩ ⲉⲡⲕⲱⲕ*ⲁϩⲏⲩ ⲙ̄ⲡⲉⲥ
ⲥⲱⲙⲁ ⲉⲛⲉϩ . ⲉⲥϣⲁⲛⲛⲟⲩ
ⲇⲉ ⲉⲫⲟⲣⲉⲓ ⲛ̄ⲟⲩϣⲧⲏⲛ ·
ⲡⲉϣⲁⲩϣ*ⲧⲁⲙ ⲛ̄ⲛⲉⲥⲃⲁⲗ ⲡⲉ
ⲉⲧ . . . . ϣⲏ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲧⲉ*ⲥϩⲁ
. . . ⲙ̄ⲡ̄ϥϣⲱⲡⲉ ⲛ̄ϩⲏⲧ̄ⲥ
ⲛ̄ϭⲓ ⲡⲥ*ⲱⲛ̄ⲧ ⲛ̄ⲛⲉϩⲓⲟⲙⲉ

›ξ̄ς̄‹ XXXVI.

ⲡⲉⲥⲟ̂ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ ⲉ*ϩⲁϩ ⲛ̄ϩⲱⲃ
ⲛ̄ⲧⲉ ⲡⲃⲓⲟⲥ . ⲉ ⲟⲗϫⲉ ⲡⲉⲥⲟⲩⲏⲩ
ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲑⲟⲙⲟⲗⲟⲅⲓ ⲛ̄ⲛⲉ
ϩⲓⲟⲙⲉ . ⲛⲧⲁ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲅⲁⲣ
ϭⲱϣ̄ⲧ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲉ(ϥ)ⲥⲱⲛⲧ
ⲧⲏⲣ̄ϥ . ⲙ̄ⲡ̄ϥⲛⲁⲩ ⲉⲡⲉⲧⲉⲓⲛⲉ ⲙ̄
ⲙⲁⲣⲓⲁ . ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁï ⲁϥⲥⲟⲧⲡ̄ⲥ
ⲛⲁϥ ⲉⲧⲙⲁⲁⲩ . ⲉϣϫⲉ ⲟⲩⲛ ⲟⲩ
ⲉï ϭⲉ ⲟⲩⲱϣ ⲉⲧⲣⲉⲩⲙⲟⲩⲧⲉ ⲉ
ⲣⲟⲥ ϫⲉ ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲙⲁⲣⲉⲥ
ⲧ̄ⲛ̄ⲧⲱⲛ̄ⲥ ⲉⲙⲁⲣⲓⲁ . ⲧⲁï ⲇⲉ ⲛⲁ
ⲙⲉ ⲥⲉⲛⲁⲙⲟⲩⲧⲉ ⲉⲣⲟⲥ ϫⲉ ⲧⲙⲁ
ⲁⲩ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲟⲩⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ
ⲉⲙⲉⲥⲛⲏⲥⲧⲉⲩⲉ ⲙ̄ⲙⲏⲛⲉ ϣⲁ
ⲣⲟⲩϩⲉ̀ ⲙ̄ⲡ̄ϣϭⲟⲙ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ⲉⲣ̄ⲡⲁⲣ
ⲑⲉⲛⲟⲥ . ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲅⲁⲣ
ϣⲟⲟⲡ ⲕⲁⲧⲁ ⲡⲉⲥⲣⲁⲛ : ⲛⲁ
ⲛⲟⲩⲥ ⲛ̄ⲧⲉϫⲓϩⲁï ⲉϩⲟⲩⲟ ⲉⲣⲟⲥ
ⲛⲧⲉⲡⲟⲣⲛⲉⲩⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲟ*ⲩⲱϣ
ⲁⲛ ⲉϫⲓϩⲁï ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲧⲥⲓⲟ̂ ⲛ̄ⲟ(ⲉⲓ)ⲕ
ⲟⲩⲧⲉ ϩⲓⲛⲏⲃ . ⲙⲏⲡⲟⲧⲉ ⲛ̄ⲥⲉ
ϩⲉ̀ ⲉⲧⲟⲩⲗⲁⲙⲡⲁⲥ ⲉⲁⲥϫⲛⲁ
ⲙⲉⲣⲉ ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲕⲟⲥⲙⲉï ⲙ̄
ⲙⲟⲥ . ⲟⲩⲧⲉ ⲣⲱ̂ ⲙⲉⲩ*ⲉⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲩϩⲟ̂
ⲧⲉⲩϣⲟⲣ̄ⲡ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲥⲡⲟⲩⲇⲏ ⲡⲉ
ⲧⲱⲟⲩⲛ ⲉϩⲧⲟⲟⲩⲉ . ⲛ̄ⲥⲉϥⲓ ⲙ̄

ⲡϫⲱⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲥⲉⲱϣ . ⲁⲩⲱ ⲉ
ϣⲁⲩⲣ̄ϩⲱⲃ ⲛ̄ϭⲓϫ' ϫⲓⲛ ⲛ̄ϫⲡ̄ⲥⲛ̄ⲧⲉ
ϣⲁ ϫⲡ̄ⲯⲓⲧⲉ . ⲧⲥⲛ̄ⲧⲉ ⲅⲁⲣ
ⲛ̄ⲟⲩⲛⲟⲩ ⲛ̄ϣⲱⲣⲡ̄ ⲉϣⲁⲩ . . . .
ⲉⲩⲱϣ . ⲁⲩⲱ ⲟⲛ ϫⲉ ϫⲓⲛ ⲛ̄(ϫⲡ)

XXXVII. ⲯⲓⲧⲉ . ⲧⲉⲩⲕⲟⲥⲙⲏⲥⲓⲥ ⲅⲁⲣ ⲧⲏⲣⲥ̄
ⲉⲥϣⲟⲟⲡ ⲛⲁⲩ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲗⲟⲅⲟⲥ
ⲟⲩ̄ ⲡⲉ (1) ⲉⲥⲁⲙⲉⲗⲉⲓ̈ ⲉⲛⲁⲛⲁⲅⲛⲱ
ⲥⲓⲥ ⲛ̄ⲥⲛⲁⲉⲓⲙⲉ ⲁⲛ ⲉⲛⲟⲩⲱϣ
ⲙ̄ⲡⲉⲥⲛⲩⲙⲫⲓⲟⲥ . ⲟⲩ ⲡⲉ ⲡϩⲏⲧ
ⲛ̄ⲟⲩⲕⲱϩ̄ⲧ ϩⲁⲧⲛ̄ ⲟⲩⲣⲟⲟⲩⲉ .
ⲁⲩⲱ ⲟⲩ̄ ⲡⲉ ⲡϩⲏⲧ ⲛ̄ⲟⲩⲙⲟⲛⲁⲭⲏ'
ϩⲁⲧⲛ̄ ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲉⲥϩⲙⲟⲟⲥ ⲙⲛ̄ ϩⲁⲓ̈
ⲟⲩⲙⲟⲛⲁⲭⲏ ⲉ(ⲣ)ⲉ ⲛⲉⲥϩⲟⲓ̈ⲧⲉ ⲟ̂ ⲛ̄
ⲁⲧⲁⲧⲁⲛⲁⲧⲁⲛ . ⲛⲉⲥⲛⲁⲑⲟⲥ ⲟ̂ ⲙ̄
ⲙⲓⲛⲉ ⲙⲓⲛⲉ . ⲧⲙ̄ⲛⲧϣⲁⲩ ⲛ̄ⲑ̄ⲃ̄
ⲥⲱ̂ ⲡⲉ ⲡⲁⲧⲁⲛ ⲙ̄ⲡⲥⲟⲣ̄ⲧ . ⲧⲉⲧ
ϫⲟⲟϭⲉ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲥϩ̄ⲃ̄ⲥⲱ̂ ⲧⲉⲥⲯⲩ
ⲭⲏ' ⲕⲏⲙ ⲡⲁⲣⲁ ⲟⲩϭⲟⲟⲩⲛⲉ . ⲟⲩ
ⲙⲟⲛⲁⲭⲏ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲏ ⲙⲉⲥϣⲁϫⲉ
ⲙⲛ̄ ϩⲟⲟⲩⲧ ⲉⲡⲧⲏⲣⲥ̄ . ⲧⲁⲑⲏⲧ
ⲇⲉ ϣⲁⲥⲥⲱⲃⲉ ⲙⲛ̄ ⲛ̄ϩ̄ⲣ̄ϣⲓⲣⲉ .
ⲛ̄ⲑⲉ ⲙ̄ⲡⲣⲁⲛ ⲉⲧⲧⲁⲉⲓⲏⲩ ⲛ̄ⲧⲉ
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛ̄ⲧⲁ ⲛ̄ⲁⲑⲏⲧ ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ
ⲧⲁⲁϥ ⲉⲛⲉⲓⲇⲱⲗⲟⲛ . ⲧⲁⲓ ⲧⲉ ⲑⲉ
ⲙ̄ⲡⲣⲁⲛ ⲛ̄ⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ
ⲉⲩϯ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉϩⲉⲛⲁⲑⲏⲧ ⲛ̄ⲥϩⲓⲙⲉ
ⲡⲣⲁⲛ ⲅⲁⲣ ⲟⲛ ⲛ̄ⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ
ⲡⲉ ⲡⲣⲁⲛ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲙⲛ̄ ⲟⲩ
ⲙⲟⲛⲁⲭⲏ ⲙ̄ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲛⲁϭⲱ

(1) Il papiro in questo punto fu corretto e porta sovrapposta in più piccolo carattere una parola colla finale ⲑⲉⲛⲟⲥ.

ϣⲧ ⲛ̄ⲥⲁ ⲟⲩⲛⲟⲩⲃ' ⲙ̄ⲛ ⲟⲩⲙⲁⲣ
ⲕⲁⲣⲓⲧⲏⲥ . ⲡⲉⲧⲛ̄ⲧⲟⲟⲧⲥ̄ ⲅⲁⲣ
(ⲥⲟ)ⲧⲡ̄ ⲉⲣⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲉⲥⲡⲁⲩ . ⲛ̄ⲑⲉ
. . . . ⲛ̄ ⲡⲉⲧⲥⲟⲧⲡ̄ ⲉⲡⲛⲟⲩⲃ
. . . . ⲩⲗⲏ . ⲧⲁϊ ⲧⲉ ⲑⲉ ⲙ̄ⲛ ⲡⲉⲧ

>ⲗ̄ⲏ< XXXVIII. ⲥⲟⲧⲡ̄ ⲉⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ϩⲛ̄ ⲛ̄
ⲁⲣⲉⲧⲏ . ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲓⲁ ⲇⲉ ⲙ̄ⲡⲥⲱ
ⲙⲁ ⲙ̄ⲛ̄ⲧⲁⲥ ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲛ̄ⲧⲉ . . . (1)
ⲛⲧⲉ ⲯⲏⲭⲏ . . . . . ⲟⲩⲙ̄ⲛ̄ⲧⲥⲟϭ . . . ⲧⲉ
ⲟⲩ̄ ⲡⲉ ⲡϩⲏⲧ ⲛ̄ⲟⲩⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲉⲥ
ⲥⲉⲩϩ' ⲛⲟⲩⲃ ⲉϩⲟⲩⲛ . ⲏ̄ ⲁϣ ⲡⲉ ⲡϩⲏⲧ
ⲛ̄ⲧⲉⲧⲙⲟⲩϩ ⲛ̄ⲛ̄ⲧⲏⲏⲃⲉ ⲛ̄ⲛ̄ϩⲟïⲧⲉ
ⲉⲥϣⲟⲩϣⲟⲩ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϫⲉ ⲁⲛⲅ̄ ⲟⲩ
ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ . ⲡⲙⲁ ⲛ̄ⲥⲱⲟⲩϩ ⲛ̄ⲟ̄ⲩ
ⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲡⲉ ⲡⲁϩⲟ̂ ⲛ̄ⲧⲉⲥⲯⲩⲭⲏ'
ⲡⲉⲧⲕⲏⲕⲁϩⲏⲩ ⲉⲥϣⲁⲛ† ϩⲓⲱⲟⲩ
ⲁⲥⲥⲱⲟⲩϩ ⲛⲁⲥ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲛ̄ⲟⲩⲁϩⲟ'
. . ⲧⲙⲛⲧϣⲁⲩ ⲧⲏⲣⲥ̄ ⲛ̄ⲧⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲓⲁ
ⲧⲉ ⲧϩⲩⲡⲟⲧⲁⲅⲏ . ⲁⲩⲱ ⲧⲁⲡⲟⲧⲁ
ⲅⲏ ⲙ̄ⲛ ⲧⲉⲧⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲥⲧⲥⲓⲟⲥ ⲛ̄ⲟⲉⲓⲕ
ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲉⲥϣⲓⲡⲉ ⲛ̄ⲥⲁ ⲟⲩⲱⲙ
ⲙ̄ⲛ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲛ̄ⲥϣϣⲉ ⲁⲛ ⲉⲙⲉϩ ϩⲏ
ⲧ̄ⲥ ⲉⲡⲧⲏⲣϥ̄ . ⲧⲉⲥⲫⲣⲁⲅⲓⲥ ⲙ̄
ⲡⲧⲃ̄ⲃⲟ̂ ⲡⲉ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ . ⲡⲉⲧ
ⲧⲁϣⲟ̂ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲉϥⲧⲣⲟⲫⲏ ⲛ̄ⲁϣⲉ
ⲡⲉϥϣⲱⲡⲉ . ⲥⲁϩⲱ̈ⲕ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄
ⲟⲩⲡⲁⲣⲑⲉⲛⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲉ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ .
ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲣ̄ϭⲱϣⲧ ⲉⲧⲉⲧⲉ . . .
. . ϩⲁï ϫⲉ ⲛ̄ⲡⲉⲧⲕⲣⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲕ
ϩⲱⲥ ϣⲁⲗ̄ⲣⲡⲉ . ⲟⲩⲙⲟⲛⲁⲭⲏ

(1) Qui pure il papiro porta correzioni di altra mano con raschiature, ma come le correzioni sono ora illeggibili, indicai lo spazio occupato con puntini.

ⲉⲥⲙⲟⲟϣⲉ ⲙ̄ⲙⲉⲉⲣⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲙⲟ
ⲛⲁϫⲏ ⲁⲛ ⲧⲉ . ⲁⲩⲱ ⲧⲉⲧⲙⲟⲟϣⲉ
ⲙⲁⲩⲁⲁⲥ ϩⲏⲛ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲩⲡ(ⲟⲣⲛⲓⲁ)
ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲉϥⲡⲟⲣⲛⲉⲩⲉ ⲉⲩ . . .
ⲧⲉϥⲥϩⲓⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲟⲩⲁⲧϣ . . .

ⲝ̄ⲑ XXXIX. ⲁⲩⲱ ⲟⲩϩⲁⲧⲃ̄ϣⲏⲣⲉ ⲡⲉ . ⲙⲛ̇ ⲟⲩⲛ
ⲟⲩⲟⲉⲓⲉ ⲛⲁⲁⲛⲉϫⲉ ⲉϫⲉ ⲡⲉϥϭⲣⲟϭ
ⲉϫⲛ̄ ⲟⲩⲡⲉⲧⲣⲁ
ϥⲥⲟⲟⲩⲛ ⲅⲁⲣ ϫⲉ ⲛ̄ϥⲛⲁⲣⲱⲧ ⲛⲁϥ ⲁⲛ
ⲟⲩⲧⲉ ⲙ̄ⲛ ⲟⲩⲥⲁⲃⲉ ⲛⲁϯ ⲡⲉϥⲥⲡⲉⲣ
ⲙⲁ ⲛ̄ϩⲉⲛⲡⲟⲣⲛⲏ ⲉϥⲛⲁϣⲱⲡⲉ
ⲅⲁⲣ ⲛⲁϥ ⲁⲛ . ⲕⲁⲛ ⲉϥϣⲁⲛϣⲱ
ⲡⲉ ⲟⲛ ⲉϥⲛⲁϣⲱⲡⲉ ⲉⲛⲥⲁϩⲟⲩ .
ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲉ ϯⲥⲟ̄ ⲉϯ ⲧⲉϥϣⲏⲛ
ⲛ̄ϩⲉⲛⲡⲟⲣⲛⲏ . ϣⲁϥϯ ⲛⲁⲩ
ⲙ̄ⲡⲉϥⲥⲡⲉⲣⲙⲁ ⲉⲧⲧⲁⲉⲓⲏⲩ
ϩⲛ̄ ⲛⲉϭⲣⲱⲱϭ ⲧⲏⲣⲟⲩ . ⲡⲁ
ⲑⲏⲧ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲥⲛϣ ⲛ̄ⲁϩⲣⲁϥ ·
ϣϣⲉ ⲉⲥⲁⲁⲛ̄ϣ ⲛⲉⲕϣⲏⲣⲉ ⲕⲁ
ⲗⲱⲥ . ⲁⲩⲱ ϣϣⲉ ⲉϯⲥⲟ
ⲉⲛⲉⲕⲥⲡⲉⲣⲙⲁ . ϯⲥⲟ̂ ⲉⲣⲟⲕ
ⲙⲁⲩⲁⲁⲕ ⲱ̂ ⲡⲣⲱⲙⲉ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲅ
ϯⲥⲟ ⲉⲛⲉⲕϣⲏⲣⲉ . ⲡⲉⲧϩⲙⲟ
ⲟⲥ ⲙ̄ⲛ ⲥϩⲓⲙⲉ ⲁϩⲣⲟϥ' ϥϭⲱϣ̄ⲧ
ⲛ̄ⲥⲁ ⲕⲉⲟⲩⲉï . ⲉⲣϣⲁⲛ ⲟⲩⲁ̂ ⲅⲁⲣ
ⲉⲙⲛ̄ⲧϥ̄ ⲥϩⲓⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲁⲩ ϭⲱϣ̄ⲧ
ⲡⲉϥⲛⲟⲃⲉ ⲕⲏⲃ . ⲙⲁⲗⲓⲥⲧⲁ ⲡⲉⲧ
ϩⲙⲟⲟⲥ ⲙ̄ⲛ ⲥϩⲓⲙⲉ . ⲉϥⲧⲁⲙⲟ ⲛ̄
ⲟⲩⲟⲛ ⲛⲓⲙ ϩⲙ̄ ⲡⲧⲣⲉϥϭⲱϣ̄ⲧ
ϫⲉ ⲟⲩⲡⲟⲣⲛⲟⲥ ⲡⲉ . ⲙ̄ⲛ ⲡⲟⲣ
ⲛⲟⲥ ϭⲉ ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁⲕⲗⲏⲣⲟⲛⲟⲙⲓ
ⲛ̄ⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧⲉⲣⲟ̂ ⲛ̄ⲙ̄ⲡⲏⲩⲉ . ϩⲱ ⲉ
ⲣⲟⲕ ⲉⲧⲉⲕⲥϩⲓⲙⲉ . ⲉⲥⲉⲓⲛⲉ ⲛ̄ⲛⲉ

(ϩⲓⲟ)ⲙⲉ ⲧⲏⲣⲟⲩ . ⲡⲉⲧϭⲉⲉⲧ
(ⲙⲛ) ⲟⲩⲥϩⲓⲙⲉ ⲙⲁⲩⲁⲁⲥ ϥⲛⲁⲙ̄
(ⲧⲟ)ⲛ ⲛ̄ϩⲏⲧ ⲉϫⲱⲥ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲛ

>ⲟ< XL. ⲡⲉⲧⲛⲁϭⲱϣⲧ ⲛ̄ⲥⲱⲥ ϩⲱⲱⲥ
ϩⲙ̄ ⲡϣⲓ ⲅⲁⲣ ⲉⲧⲕ̄ⲛⲁϣⲓ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ⲉⲧⲛⲁϣⲓ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲛⲁⲕ . ⲡⲉⲧ
ϭⲉⲉⲧ ⲙⲛ̄ ⲧⲉϥⲥϩⲓⲙⲉ ⲕⲁⲧⲁ
ⲧⲙⲛ̄ⲧϣⲁⲩ ⲙ̄ⲡⲅⲁⲙⲟⲥ ϥⲛⲁ
ⲛⲁⲩ ⲉϩⲉⲛϣⲏⲣⲉ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲉ ·
ⲁⲩⲱ ⲡⲉⲧⲛⲁⲧ̄ⲃⲃⲟ ϩⲛ̄ ⲛⲉϩⲟ
ⲟⲩ ⲛ̄ⲥⲉⲧⲛⲁⲅⲉ ⲛⲉϥϣⲏⲣⲉ ⲛⲁ
ϣⲙ̄ϣⲉ ⲛⲁϥ . ⲡⲉⲧϣⲙ̄ϣⲉ ·
ϫⲉ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ' ϩⲛ̄ ⲟⲩⲙⲉ . ⲛⲉϥ
ϣⲏⲣⲉ ⲛⲁϣⲙ̄ϣⲉ ⲛⲁϥ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲙⲉ
ⲙⲛ̄ ⲙ̄ⲧⲟⲛ ⲛ̄ϩⲏⲧ ϣⲟⲟⲛ ϩⲙ̄
ⲡⲱⲛ̄ϩ ⲙ̄ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲑⲉ ⲙ̄ⲡⲉ
ⲧⲉ ⲟⲩⲛ̄ⲧϥ̄ ϩⲉⲛϣⲏⲣⲉ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲉ
ⲉⲩⲟⲩⲟϫ ⲉϣⲱⲡⲉ . ⲉⲧⲟ̂ ⲛ̄ϫⲱ
ⲱⲣⲉ . ⲡⲉⲧⲛⲁⲣ̄ϩⲙ̄ϩⲁⲗ ⲙ̄ⲡϫⲟ
ⲉⲓⲥ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲙⲉ ⲥⲉⲛⲁⲧⲁⲁⲩ ⲛⲁϥ
ⲧⲉⲛ' ⲡⲉⲕϣⲏⲣⲉ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ
ⲁⲩⲱ ⲉϩⲉⲛⲙⲁⲛ̄ⲥⲱ ⲁⲛ . ⲧⲥⲁ
ⲃⲟⲟⲩ ϫⲉ ⲉⲧϭⲓⲛⲥⲱⲧⲙ̄ ϩⲛ̄ ⲟⲩ
ⲕⲁⲣⲱϥ . ⲁⲩⲱ ϩⲙ̄ ⲡⲉⲟⲩⲟⲉⲓϣ
ⲛ̄ⲧⲉⲕⲙⲛ̄ⲧϩⲗ̄ⲗⲟ̂ ⲥⲉⲛⲁⲥ̄ⲗ
ⲥⲱⲗ̄ⲕ ϩⲛ̄ ⲛ̄ϣⲁϫⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲉⲣⲉ ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ⲣ̄ϩⲗ̄ⲗⲟ̂ ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲙⲉ
ⲧⲙ̄ⲛⲧϣⲁⲣⲁϩⲉ ⲅⲁⲣ ⲉⲥϣⲟⲟⲛ
ⲛ̄ⲛ̄ⲣⲉϥϫⲓϭⲟⲗ . ⲟⲩϣ(ⲡⲏⲣⲉ)
ⲧⲉ ⲡⲃⲓⲟⲥ ⲛ̄ⲛⲁϯⲯ̄ⲓⲥ ⲛϣ . .

XLI. ⲣⲟⲙⲡⲉ ϫⲉ ⲙ̄ⲛⲟⲩϭⲛ̄ ⲛⲟⲃⲉ ⲛ̄
ⲥⲱⲟⲩ . ⲧⲁⲓ̈ ⲟⲛ ⲧⲉ ⲑⲉ ⲙ̄ⲡⲣⲱⲙⲉ

ⲉⲧⲛⲁⲣ̄ⲁⲧⲛⲟⲃⲉ' ϥⲛⲁⲣ̄ ⲟⲩⲛⲟϭ
ⲛ̄ⲁϩⲉ . ⲙ̄ⲡⲟⲩⲣ̄ⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲛ̄ϭⲓ ⲛⲉⲧⲥⲟⲟⲩⲛ ⲙ̄ⲙⲟϥ .
ⲧⲙ̄ⲛⲧⲣⲉϥϫⲓϭⲟⲗ ⲅⲁⲣ ⲥⲟ̂ ⲛ̄ⲁⲧⲥⲟ
ⲟⲩⲛ ⲙ̄ⲙⲟⲥ . ⲙ̄ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲭⲣⲓ
ⲥⲧⲓⲁⲛⲟⲥ ⲛⲁϫⲓϭⲟⲗ . ⲧⲙ̄ⲛⲧⲁⲧ
ⲥⲟⲟⲩⲛ ⲅⲁⲣ ⲟⲩⲣⲉϥϫⲓϭⲟⲗ ⲧⲉ .
ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲅⲁⲣ ⲉϥϫⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄ ⲡⲥⲱⲙⲁ
ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲛ̄ϣϣⲉ ⲁⲛ ⲉⲣⲟϥ ⲉϫⲓϭⲟⲗ'
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲅⲁⲣ' ⲟⲩⲙⲉ ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ
ⲡⲉⲧⲙⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲩϫⲓϭⲟⲗ
ⲟⲩϣⲡⲏⲣⲉ' ⲧⲉ ⲧⲧⲉⲗⲙⲟⲣⲓⲁ ⲛ̄
ⲡⲉⲧⲃⲏⲕ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉϫⲙ̄ ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄
ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲉⲧⲙⲉϩ ⲛ̄ⲕⲱϩ ϩⲓ ⲙⲟⲥⲧⲉ
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲟⲩⲙⲁïⲣⲱⲙⲉ ⲡⲉ .
ⲁⲩⲱ ⲡⲉⲧⲙⲟⲥⲧⲉ ⲛ̄ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄
ⲥⲉϣⲓⲛⲉ ⲁⲛ . ⲉⲣⲉ ⲡⲉⲧⲙⲟⲥⲧⲉ
ⲛ̄ⲛⲉⲩⲉⲣⲏⲩ ⲙⲟⲥⲧⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲁⲩⲱ ⲉⲧⲁⲡⲟⲧⲁⲥⲥⲉ ⲛⲁϥ ϫⲉ ⲙ̄ⲡⲣ̄
ⲙⲉⲣⲓⲧⲛ̄ . ⲟⲩⲟⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲉⲧⲙⲟⲥⲧⲉ
ⲛ̄ⲑⲓⲕⲱⲛ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲡⲉⲧⲣ̄ ⲡ
ⲡⲉⲑⲟⲟⲩ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲉϥⲉⲓⲣⲉ
ⲛⲁϥ ⲟⲩⲁⲁϥ . ⲙ̄ⲛ ϩⲩⲡⲟⲛⲏ ϩⲙ̄
ⲡⲡⲁⲑⲟⲥ ⲙ̄ⲡⲙⲟⲥⲧⲉ ⲁⲩⲱ ⲟⲩ
ϣⲡⲏⲣⲉ ⲡⲉ ϫⲉ ⲉϥϭⲙ̄ϭⲟⲙ
ⲉⲣⲟⲛ ⲧⲏⲣⲛ̄ . ⲡⲉⲧⲙⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲧ
ϩⲓⲧⲟⲩⲱϥ ⲉϥⲙⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲡⲉⲧⲙⲉ ⲇⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ

>ⲟ̅ⲃ̅< XLII. ⲡⲁⲙⲉⲣⲓⲧϥ̄ . ⲡⲉⲧⲉⲣⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲇⲉ ⲙⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲟⲩϣⲏⲣⲉ ⲡⲉ ⲛ̄ⲧⲉ
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲟⲩⲃⲟⲧⲉ ⲛⲁϩⲣⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲡⲉ ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲉϥⲕⲧⲟ̂ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ⲉⲃⲟⲗ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲉϥϭⲉⲛ

ⲗⲟⲉⲓϣⲉ ϫⲉ ⲛ̄ϯⲙ̄ⲡ̄ϣⲁ' ⲁⲛ . ⲡⲉ
ⲧⲉ ⲛ̄ϥⲉⲓⲣⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲁⲛ ⲛ̄ⲙ̄ⲡϣⲁ ⲙ̄ⲙⲩ
ⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ϥⲛⲁϫⲓ ⲛ̄ϩⲉⲛⲛⲟϭ
ⲛ̄ⲥⲏϣⲉ . ⲟⲩ ⲡⲉ ⲡϩⲏⲩ ⲙ̄ⲡⲉⲧ
ⲥⲩⲛⲁⲅⲉ ⲙ̄ⲡϥ̄ⲥⲱⲧⲙ̄ ⲉⲡⲱϣ ⲛ̄
ⲛⲉⲅⲣⲁⲫⲏ . ⲡⲉⲧⲉ ⲙ̄ⲡϥ̄ⲥⲱⲧⲙ̄
ⲅⲁⲣ' ⲉⲡⲱϣ ⲛ̄ⲛ̄ⲁⲛⲁⲅⲛⲱⲥⲓⲥ ⲙ̄
ⲡⲉⲩⲁⲅⲅⲉⲗⲓⲟⲛ ⲉϥⲥⲱⲃⲉ ⲛ̄ⲥⲁ
ⲙ̄ⲙⲩⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ . ⲡⲉⲧⲉ ⲛ̄ϥⲁⲓ
ⲥⲑⲁⲛⲉ ⲇⲉ ⲁⲛ ⲉⲧⲙ̄ⲛ̄ⲧⲁⲩⲑⲉⲛ
ⲧⲏⲥ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲉⲥⲛⲟϥ ⲙ̄
ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲧⲣⲉϥϫⲓ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ϩⲏⲧϥ̄ .
ⲡⲉⲧⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ ⲇⲉ ⲉⲣⲟϥ ϥⲛⲁⲣ̄
ϣⲟⲣⲡ̄ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ . ⲡⲣⲱⲙⲉ
ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲣⲉϥⲣ̄ϩⲟⲧⲉ ⲛⲁⲗⲩⲛⲉⲓ' ⲉⲩ
ϣⲁⲛϣⲗⲏⲗ ⲛ̄ⲥⲉⲯⲁⲗⲗⲉⲓ̈ ⲉⲙ
ⲡⲁⲧϥ̄ⲃⲱⲕ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ .
ⲡⲁⲙⲉⲗⲏⲥ ⲇⲉ ⲛ̄ⲧⲟϥ ϣⲁϥⲣ̄ϩⲁⲉ
ⲁⲩⲱ ⲙⲉϥϫⲓⲥⲙⲟⲩ . ⲡⲉⲧⲣ̄ϣⲟ
ⲣ̄ⲡ̄ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ϥⲛⲁϫⲓ ⲛ̄ⲟⲩ
ⲥⲙⲟⲩ ⲉϥⲕⲏⲃ . ⲡⲉⲧⲛⲁⲣ̄ϩⲁⲉ
ⲭⲱⲣⲓⲥ ⲁⲛⲁⲅⲕⲏ . ⲁϥⲣ̄ϩⲁⲉ ⲉ
ⲡⲉⲥⲙⲟⲩ . ϣϣⲉ ⲉϫⲓ ⲉⲃⲟⲗϩⲙ̄
ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲉⲥⲛⲟϥ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅
ⲙ̄ⲡⲉⲥⲙⲟⲩ ⲛ̄ⲟⲩⲕⲟⲩⲓ̈ ⲉϥⲟ(ⲃⲉ)

>ⲟ̅ⲅ̅< XLIII. ⲛⲧⲉⲣⲱⲧⲉ ⲛ̄ⲧϥ̄ⲙⲁⲁⲩ ⲡⲉⲧⲉ ⲛ̄ϥϫⲓ ⲅⲁⲣ
ⲁⲛ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ϩⲏⲧϥ̄ ⲙ̄ⲛ̄ⲧϥ̄ ⲱⲛ̄ϩ ⲙ̄
ⲙⲁⲩ . ⲡⲉⲧϫⲓ ⲇⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉϥϩⲛ̄
ⲟⲩϫⲱϩⲙ̄ ⲙ̄ⲙⲟⲥⲧⲉ . ⲏ̄ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲁ
ⲕⲁⲑⲁⲣⲥⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲟⲣⲛⲉⲓⲁ ϥϩⲟⲟⲩ
ⲉⲡⲉⲧⲉ ⲙ̄ⲛ̄ⲧϥ̄ ⲉⲡⲉⲧⲉⲛ ϫⲓ
. ⲙ̄ⲛ̄ ⲛⲟⲃⲉ ϩⲟ
ⲟⲩ ⲛⲁϩⲣⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛ̄ⲑⲉ ⲙ̄

пмосте . ебол гар ϩм паї е
шаре ϩωтб шωпе . пет
мооше ⲇе ϩп ⲟⲩⲛобе мпа
ра фⲩсιп' псоп ⲇе пе мпет
мосте . шаре тагапн еιω
ебол ппобе пιм . пмосте
ⲇе ϩωωч шачⲇоор ебол ппа
арете ере та
гапн' препеι ппехреιстιа
(п)ос . петⲇι гар мпехс ш
ше ероч еⲇι мпечкеоⲩωш
мпте тагапн мптатсооⲩ
ммаⲩ . тагапн гар' сооⲩп
прωме пιм . пⲇωк пта
гапн пе рпетпаноⲩч п
рωме пιм . петрпетпа
поⲩч ⲇе ппетмосте ммоч
чпатптωпч еппоⲩте .
мп рωме емптч агапн
пабеке петрпетпа

▸ оⲇ ◂ XLIV. поⲩч ппечⲇаⲇе чпаⲇι поⲩ
клом патϩωбб . паш пϩе пч
парпетпаноⲩч ап прωме
пιм пбι петеιре ппечⲇаⲇе .
ере ппетпаноⲩч ⲇе шооп
ммате ап еболϩп ϩаϩ пхрнма
пречрпетпаноⲩч гар шач
ⲇωк еболϩп оⲩапоⲩ ммооⲩ
ммоⲩпωрш мп оⲩоеιк поⲩωт
оⲩшιпе пе поⲩхреιстιапос
етптч штнп спте ечωбш
ммоч епете мптач . еш ⲇе
ϩм пωпϩ тпкоιпωпι мп пеп

ⲉⲣⲏⲩ. ⲡⲟⲥⲱ ⲙⲁⲗⲗⲟⲛ ⲛⲉⲧⲛⲁ
ⲧⲁⲕⲟ. ⲁⲣⲓⲙⲁⲓ̈ⲣⲱⲙⲉ ⲉⲛϩⲓ ⲡϣ̅ⲙ̅
ⲙⲟ' ⲅⲁⲣ ⲧⲏⲣ̅ⲛ̅. ⲙ̅ⲛⲗⲁⲁⲩ ⲛⲁ⃰ⲡⲉ
ϩ̅ⲙ̅ ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲉⲃⲟⲗϩ̅ⲛ̅ ⲧⲕⲟⲗⲁⲥⲓⲥ ⲛ̅
ⲑⲉ ⲛ̅ⲧⲁⲅⲁⲡⲏ. ⲁⲣⲓⲙⲁⲓ̈ⲣⲱⲙⲉ
ϩⲉⲱⲥ ⲉⲕϣⲟⲟⲡ ⲛ̅ⲅ̅ⲛⲁϣⲥ̅ⲕ̅ ⲁⲛ
ⲟⲩⲏⲣ ⲡⲉ ⲡⲉⲕⲁϩⲉ ϩⲓϫⲙ̅ ⲡⲕⲁ(ϩ) ⲛ̅
ⲉⲕϫⲟ' ⲙ̅ⲙⲟϥ ⲉⲃⲟⲗϩ̅ⲛ̅ ⲟⲩⲡⲉⲧ
ϣⲟⲩⲉⲓⲧ'. ⲟⲩⲛ̅ ⲟⲩϩⲟⲟⲩ ⲥⲟⲧ̅ⲡ̅
ⲛ̅ⲁϩⲣ̅ⲙ̅ ⲡⲥⲟⲫⲟⲥ. ⲁⲩⲱ ϣⲁϥⲣⲁ
ϣⲉ ⲉϫ̅ⲙ̅ ⲡϩⲏⲩ ⲛ̅ⲟⲩϩⲟⲟⲩ ⲛ̅ⲟⲩⲱⲧ
ⲡⲁⲑⲏⲧ ⲇⲉ ⲛ̅ⲧⲟϥ ϣⲁϥϫⲉ ⲡⲉϥ
ⲁϩⲉ ⲉⲃⲟⲗϩⲟⲟⲩϩⲟⲟⲩ. ⲙ̅ⲛ̅ⲛ̅ⲥⲱⲥ
ϣⲁϥϣⲱϫ̅ⲡ̅ ⲙⲉϥϭ̅ⲛ̅⃰ ⲗⲁⲁⲩ ϩ̅ⲛ̅ ⲡⲉϥ
ϭⲓϫ. ⲟⲩ̅ⲛ̅ ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲛ̅ⲥⲁⲃⲉ ⲛⲁ
ϯⲥⲟ' ⲉϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ⲡⲥⲟϭ.
ⲡⲁⲑⲏⲧ ⲇⲉ ⲛ̅ⲧⲟϥ ϣⲁϥⲧⲁⲧⲉ ⲥⲱ⃰ϣ
ⲛⲓⲙ. ⲥⲉⲛⲁⲕⲣⲓⲛⲉ ⲙ̅ⲡⲣⲱⲙⲉ

XLV. ϩⲁ ⲛ̅ϣⲁϫⲉ ⲛ̅ⲣⲱϥ. ⲛ̅ⲥⲉⲛⲁⲣ(ⲡⲱ)
ⲃ̅ϣ̅ ⲅⲁⲣ ⲁⲛ ⲛ̅ⲛ̅ⲕⲉⲙⲉⲉⲩⲉ ⲙ̅ⲡ(ⲉϥ)
ϩⲏⲧ. ⲟⲩⲟⲉⲓ ⲙ̅ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲉⲧⲱ(ⲃ̅ϣ̅)
ⲙ̅ⲙⲟϥ ⲉⲣⲟϥ ⲟⲩⲁⲁϥ. ⲁⲩⲧⲁⲁⲥ..
ⲛⲁⲕ ϩⲓⲧ̅ⲛ̅ ⲛⲉⲕⲡⲣⲁⲝⲓⲥ ⲉⲧⲣⲉⲕ..
ⲛⲟⲩⲧⲉ. ⲧⲉⲕⲁⲙⲉⲗⲓⲁ ⲙⲁⲩⲁⲁ(ⲥ)
ⲥⲉⲛⲁⲧ̅ⲛ̅ⲧⲱⲛ̅ⲅ̅ ⲉⲛⲇⲁⲓⲙⲱⲛ
ⲕⲁⲓ ⲅⲁⲣ ⲛ̅ⲧⲁⲩⲣ̅ ⲧⲉⲓ̈ϩⲉ ⲉⲧⲃⲉ ⲧⲉ(ⲧⲁ)
ⲙⲉⲗⲓⲁ. ⲟⲩⲁⲙⲉⲗⲏⲥ ⲛ̅ⲣⲱⲙⲉ ϥϩ(ⲉ)
ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲧⲁⲕⲟ. ⲡⲉⲧⲉ ⲛ̅ϥ̅ϥ(ⲓ)
ⲣⲟⲟⲩϣ ⲅⲁⲣ ⲁⲛ ϩⲁ ⲡⲉϥⲟⲩϫⲁⲓ̈ ⲙ(ⲁ⃰ⲩ)
ⲁⲁϥ. ⲛⲓⲙ ⲡⲉⲧⲛⲁⲧⲁⲛϩⲟⲩ̅ⲧ̅(ϥ̅)
ⲡⲉⲧϥⲓⲣⲟⲟⲩϣ ϩⲁ ⲡⲉϥⲟⲩϫⲁⲓ̈(..
ⲣ̅ⲟⲩϣⲏ ⲛ̅ⲣⲟⲉⲓⲥ ϩⲓⲣ̅ⲛ̅ ⲛ̅ⲣⲟ̂ ⲙ̅ⲡ(ⲏⲓ)
ⲙ̅ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ. ⲁⲩⲱ ⲛ̅ⲡⲉϥⲣ̅ⲁ(ⲧⲥⲟ)

ⲟⲩⲛ ⲉⲛⲉⲧⲟⲩⲛⲁⲟϣⲟⲩ. ⲡⲉ
ⲧⲟ̂ ⲛ̄ⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ' ⲉⲛⲁⲛⲁⲅⲛⲱⲥⲓⲥ
ⲟⲩⲧ̄ⲃⲛⲏ ⲡⲉ. ⲡⲉⲧ† ⲛ̄ϩⲧⲏϥ ⲉ
ⲡⲱϣ' ⲛ̄ϥⲛⲁⲣ̄ⲛⲟⲃⲉ ⲁⲛ. ⲡⲉⲧ
ⲙⲉ ⲙ̄ⲡϣⲁϫⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉϥⲙⲉ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ. ⲡⲉⲧⲉⲓⲣⲉ ⲇⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ⲉϥⲟ̂ ⲛ̄ϣⲃⲏⲣ ⲉⲡⲛⲟⲩⲧⲉ. ⲡⲉⲧ
ⲃⲏⲕ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉϫ̄ⲙ̄ ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲛ
ϫⲟⲉⲓⲥ ϩ̄ⲛ ⲟⲩ†ϩⲉ ⲉϥ†ϭⲱⲛ̄ⲧ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ. ⲡⲉⲧⲛⲁϫⲓ ⲇⲉ ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄
ϩⲏⲧ̄ϥ ⲉϥⲧⲁϩⲉ ⲉϥⲧⲁⲕⲟ ⲙ̄ⲡⲉϥ
ⲱⲛ̄ϩ ⲙⲁⲩⲁⲁϥ· ⲟⲩⲟⲩⲟⲉⲓϣ
ⲡⲉⲧϣⲟⲟⲡ ⲛ̄ⲟⲩⲱⲙ ϩⲓ ⲥⲱ̂ ⲕⲁⲧⲁ
ⲡϣⲓ̈ ⲙ̄ⲙⲉ. ⲡⲉⲟⲩⲟⲉⲓϣ ⲇⲉ ⲙ̄
ⲡⲙⲩⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ϣϣⲉ ⲉⲁⲁϥ ϩ̄ⲛ
ⲟⲩⲛⲟϭ ⲛ̄ϩⲁⲣⲉϩ. ⲡⲉⲧϫⲓ ⲙ̄
ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲛ ⲡⲉⲥⲛⲟϥ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄
ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲧ̄ⲃⲃⲟ ⲁϥϫⲓ ⲛ̄ⲟⲩⲛⲟϭ ⲛ̄

XLVI. (ⲧ)ⲟⲩⲥ̊ⲓⲁ. ⲁⲩⲱ ⲟⲩⲛ̄ϭⲟⲙ ⲙ̄ⲙⲟϥ
(ⲉ)ⲧⲟⲩⲛⲉⲥ ⲣⲉϥⲙⲟⲟⲩⲧ. ⲥⲙⲟ
(ⲧ)ⲛ̄ ⲇⲉ ⲉ̊ⲧⲟⲩⲛⲉⲥ ⲣⲉϥⲙⲟⲟⲩⲧ ⲉ
(ϩ)ⲟⲩⲟ ⲉⲛⲉⲓⲑⲉ ⲛ̄ⲟⲩϩⲁⲓⲣⲉⲧⲓⲕⲟⲥ
(ⲛ)ϩⲁⲓⲣⲉⲧⲓⲕⲟⲥ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲥⲉⲡⲓⲥⲧⲉⲩⲉ
(ⲁ)ⲛ ⲉⲡⲛⲟⲩⲧⲉ. ⲟⲩⲧⲉ ⲡⲉϥⲡⲉⲧ
ⲟⲩⲁⲁⲃ'. ⲁⲗⲗⲁ ⲉⲛⲉⲩⲟⲩⲱϣ ⲙ̄
ⲙⲓⲛ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ. ⲟⲩⲱϣ ⲇⲉ ⲡⲓⲙ
ⲛ̄ϩⲉⲛ ⲉⲃⲟⲗ ⲁⲛ ⲡⲉ ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲉⲡ̄ⲛ̄ⲁ ⲉⲧ
(ⲟⲩ)ⲁⲁⲃ ⲉⲩϫⲓ ⲉⲡⲉⲥⲏⲧ ⲉⲁⲙ̄ⲛ̄ⲧⲉ
(ⲟⲩ)ϣⲡⲏⲣⲉ ⲡⲉ ⲡⲣⲏ̈ ϩ̄ⲛ ⲡⲉⲧϫⲟⲥⲉ
(ⲟ)ⲩⲗⲁⲁⲩ ⲡⲉ ⲛ̄ⲁϩⲣ̄ⲙ̄ ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄
(ⲡ)ⲛⲟⲩⲧⲉ. (1) . . . .

(1) Il resto di questa linea ed il principio della susseguente furono raschiati e riscritti in una maniera illeggibile.

. . . . . ⲧⲁⲓ̈ ⲧⲉ ⲑⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲣⲏ
ⲛ̄ⲁϩⲣⲙ̄ ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ .
ⲉϣϫⲉ ⲙ̄ⲡϣϭⲟⲙ ⲙ̄ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲉ
ⲛⲁⲩ ⲉⲡϩⲟ ⲙ̄ⲡⲣⲏ ⲉϥϣⲟⲟⲡ ϩ̄ⲛ
ⲧⲉⲓ̈ⲛⲟϭ ⲙ̄ⲙⲛ̄ⲧⲉⲩⲧⲉⲗⲏⲥ . ⲧⲁⲓ̈
ⲧⲉ ⲑⲉ ⲙ̄ⲡϣϭⲟⲙ ⲛ̄ⲗⲁⲁⲩ ⲉⲛⲁⲩ ⲉ
ⲡⲙⲉⲅⲉⲑⲟⲥ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲙ̄ⲛ̄
ⲣⲱⲙⲉ ⲅⲁⲣ ⲛⲁ*ⲛⲁⲩ ⲉⲡⲉϥ*ϩⲟ̂ ⲛ̄ϥⲱⲛ̄ϩ
ⲛ̄ⲧⲁϥⲕⲱ ⲅⲁⲣ ⲡⲉϫⲁϥ ⲙ̄ⲡⲉϥⲙⲁ
ⲛ̄ϣⲱⲡⲉ ϩⲙ̄ ⲡⲣⲏ . ⲡⲉϥⲙⲁⲛ̄
ϣⲱⲡⲉ ⲇⲉ ⲡⲉ ⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲙⲉ
ⲉϣϫⲉ ⲙ̄ⲡϣϭⲟⲙ ⲛ̄ⲗⲁⲁⲩ ⲉⲛⲁⲩ
ⲉⲧⲟⲩⲥⲓⲁ ⲙ̄ⲡⲣⲏ ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲙⲁⲛ̄
ϣⲱⲡⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲧϩⲓ*ⲱⲱϥ
ⲕⲁⲓⲡⲉⲣ ⲉϥϭ(ⲱ)ϫ̄ⲃ̄ ⲉⲙⲁⲧⲉ ⲛ̄ⲁ
ϩⲣⲙ̄ ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲡⲁⲣⲁ
ⲉⲡⲧⲏⲣ (?) . ⲕ . ⲧ ⲣⲉⲟⲩⲁ ⲛⲁϣϫⲟⲟⲥ

✝

ⲟ̄ XLVII.

////////// ⲧⲁ ⲟⲩⲕⲟⲩⲓ̈ ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ ⲉϥ
////////// ⲙ̄ⲛ ⲧ*ⲉⲓϩⲉ . ⲡⲁⲓ̈ ⲅⲁⲣ ⲁ
(ϥ✝ ⲙ̄ⲡ)ⲉϥϩ̄ⲙ̄ⲙⲉ ⲙ̄ⲛ ⲕⲁⲣⲡⲟⲥ
. . ⲣ̄ϣⲁⲩ . ⲟⲩⲇ*ⲉ ⲧⲉⲕⲧⲓⲥⲓⲥ ⲛⲁ
. . ⲁⲩ ⲁⲛ ⲁϫⲛ̄ⲧϥ̄ . ⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
(ⲅⲁ)ⲣ ⲕⲁⲑⲓⲥⲧⲁ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉⲧⲉϩⲟⲩ
(ⲥⲓ)ⲁ ⲙ̄ⲡⲉϩⲟⲟⲩ . ⲉϣϫⲉ ⲡⲥⲱ̄
(ⲛⲧ) ⲅ*ⲁⲣ ⲧⲁⲉⲓⲏⲩ ⲛ̄ⲧⲉⲓ̈ϩⲉ ⲉⲓ̈ⲉ
. . ⲛⲧⲁϥⲥⲟⲛⲧϥ̄ ⲟⲩⲟⲧⲃ̄ ⲉⲣⲟϥ
(ⲛ̄)ⲟⲩⲏⲣ . ⲉϣϫⲉ ⲉⲣⲉ ⲛ̄ϩⲉⲑⲛⲟⲥ
(ⲧⲏ)ⲣⲟⲩ ⲟ̂ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲁⲡⲟⲩ' ⲙ̄
(ⲙ)ⲟⲟⲩ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ ⲑⲁⲗⲁⲥⲥⲁ ⲛ̄ⲁ
(ϩⲣ)ⲙ̄ ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ϩⲟ
(. . ⲟ)ⲩ ⲇⲉ ϥϫⲟⲥⲉ ⲁⲩⲱ ϥⲧⲁⲉⲓ
(ⲏ)ⲩ ⲛ̄ⲁϩⲣⲛ̄ ⲥⲱⲛⲧ ⲛⲓⲙ ⲛ̄ⲧⲁⲛ

ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲅⲁⲣ ⲟⲩⲁⲙⲏⲧⲣⲏⲡⲟⲥ
ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ ⲉϥⲙⲟⲩϩ ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ̄
ⲉ. . ϩⲓϫ̄ⲛ ⲡⲉⲭⲉⲣⲟⲩⲃⲓⲛ ⲉϥ
ϣⲱϫ̄ⲡ ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ̄ . ϥ̄ⲟ̂ ⲛ̄ϩⲟⲧⲉ
ⲟⲩⲉⲡⲓⲑⲩⲙⲓⲁ ⲧⲏⲣϥ̄ ⲡⲉ . ⲡⲓⲙ
ⲅⲁⲣ ⲡⲉⲛⲧⲁϥϥⲉⲓ ⲙ̄ⲡⲉϩⲗⲟϭ
ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲛⲉϩ . ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲉ
ϩⲗⲟϭ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲁⲧϣⲁϫⲉ ⲉⲣⲟϥ ϣⲁ
ⲣⲉ ⲡⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲥⲟⲛ̄ⲥ ⲙ̄ⲙⲟϥ
(ⲛ̄)ⲟⲩⲉϣ ⲛⲁⲩ ⲉⲣⲟϥ . ⲉⲧ
(ϣ)ⲁ̊ⲡⲡⲉⲓⲑⲉ ⲇⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ-ⲛ̄
ⲟⲩⲕ̊ⲟⲩⲓ ⲛ̄ϥⲧⲥⲁⲃⲟⲟⲩ ⲉⲧ
ⲕⲟ̊ⲩϊ ⲙ̄ⲙⲉⲣⲟⲥ . ϩⲙ . . .
. . . ⲡϣ . . . .
. . . . ⲉⲧⲙⲡⲁⲩ . . . .
. . . . ⲙⲟϥ ⲡⲉ

>ō..< XLVIII. ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁϊ ϥϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ////
ⲧⲏⲩ ⲛⲧⲱⲧⲥ ⲛ̄ⲧⲁⲅⲁⲡⲏ . ⲁⲩⲱ ////
ⲡⲉⲧⲉ ⲛ̄ϥⲛⲁⲉⲡⲓⲑⲩⲙⲉ ////
ⲡⲥⲁ ⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲉϥϩⲏⲡ ϩ(ⲙ̄ ⲡⲉϥ)
ⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲉϥⲥⲛⲟϥ . ////
ⲡⲁϊ ⲣⲱ ⲉⲧⲙⲟⲩⲧⲉ ⲉⲣⲟ(ϥ ϫⲉ ⲡⲙⲩ
ⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ⲉϥⲟⲩⲁⲁⲃ . ⲉ(ⲣϣⲁⲛ)
ⲟⲩⲁ ⲇⲉ ⲧⲟⲗⲙⲁ ⲉϫⲓ ⲉⲃⲟ(ⲗ ϩ̄ⲙ̄)
ⲡⲁϊ ⲛ̄ϥⲟⲩⲁⲁⲃ ⲁⲛ ϥ̄ⲛⲁϣ(ⲱⲡⲉ)
ⲛ̄ⲉⲛⲟⲭⲟⲥ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄(ⲛ̄ ⲡⲉ)
ⲥⲛⲟϥ ⲙ̄ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲡⲁϊ ⲇ(ⲉ)
ⲡϩⲁⲅⲓⲁⲥⲙⲟⲥ ⲉⲧⲣⲉ ⲡⲣⲱ(ⲙⲉ ϫⲓ)
ⲉⲃⲟⲗ ⲛ̄ϩⲏⲧϥ̄ . ⲁⲩⲱ ⲉⲧ(ⲣⲉϥⲙⲉ)
ⲣⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲛ̄ϣⲟⲣⲡ̄ ⲙⲉ . . .
ⲛ̄ⲧⲛ̄ ⲟⲩⲁϣϥ̄ ⲁⲛ ⲉⲧⲣⲉϥϣⲱ . .
ⲙ̄ⲙⲟⲛ ⲉⲧⲙⲧⲣⲉⲡⲁⲁϥ ϩⲱ(ⲱϥ)
ⲛ̄ⲕⲉⲟⲩⲁ . ⲁⲩⲱ ⲡⲉⲧⲛ̄ⲛⲟⲕ . . .

ⲛⲧⲛⲁⲁϥ ⲙⲡⲉⲧϩⲓⲧⲟⲩⲱ . .
ⲛⲁï ⲡⲉ ⲡⲛⲟⲙⲟⲥ . ⲁⲩⲱ ⲛⲉⲡⲣⲟ
ⲫⲏⲧⲏⲥ . ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲉϥϫⲓ ⲙⲡⲉⲧϩⲓ
ⲧⲟⲩⲱϥ ⲛϭⲟⲛⲥ ⲙⲛⲧϥ ⲕⲟⲓⲛⲱ
ⲛⲓⲁ ⲙⲙⲁⲩ ⲙⲛ ⲡⲥⲱⲧⲏⲣ . ⲟⲩⲁ̂
ⲉϥϣⲃϣ ⲙⲙⲟϥ ⲉⲡⲉⲧϩⲓⲧⲟⲩⲱϥ
ⲉϥⲕⲏⲕⲁϩⲏⲩ’ ⲥⲉⲛⲁⲟⲃϣⲟⲩ ⲉⲣⲟϥ
ϩⲱⲱϥ ⲉϥⲕⲏⲕⲁϩⲏⲩ ϩⲙ ⲡⲃⲏⲙⲁ
ⲙⲡⲉⲭⲥ . ⲡⲉⲧⲃⲏⲕ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉ
ϫⲙ ⲡⲉⲑⲏⲥⲓⲁⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ⲉϥϩⲛ
ⲟⲩϫⲱϩⲙ ⲙⲙⲛⲧⲛⲟⲉⲓⲕ ⲥⲉⲛⲁ
ⲧⲁⲁϥ ⲉⲧⲟⲟⲧϥ ⲛⲧⲥⲁⲧⲉ ⲛⲁⲧ
ϫⲉⲛⲁ . ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ ⲅⲁⲣ ⲙⲡⲟⲣ

XLIX. [...]ⲉ ⲡⲉⲧϣ [...]
[...]ⲡⲉ ⲡⲉⲧϩⲙ ⲡⲕⲁⲕⲉ
[...]ⲟⲉⲓ ⲉⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ
ⲣ[...] ⲡⲉⲧⲛⲃⲁⲗ ⲉⲧϭⲓⲛϭⲱ
ϣ(ⲧ ⲉⲧ)ϣⲟⲩⲉⲓⲧ . ϩⲁⲣⲉϩ ⲉ
ⲡⲉⲧⲛⲗⲁⲥ ⲉⲧⲕⲁⲧⲁⲗⲁⲗⲓⲁ ϩⲁ
ⲣⲉϩ ⲉⲡⲉⲧⲛⲙⲁⲁϫⲉ ⲉⲡⲓϭⲓⲛ
ⲥⲱⲧⲙ ⲉⲧϣⲟⲩⲉⲓⲧ . ϩⲁⲣⲉϩ ⲉ
ⲧⲉⲛⲧⲁⲡⲣⲟ ⲉⲡⲓϭⲓⲛⲱⲣⲕ ⲉⲧⲙⲉϩ
ⲛϣⲗⲟϥ ϩⲓ ϩⲟⲧⲉ . ⲙⲁⲣⲉ ⲡⲟⲩⲁ
ⲡⲟⲩⲁ ⲙⲙⲱⲧⲛ ⲕⲁⲛⲛⲁ̂ ϩⲙ ⲡⲉϥ
ϩⲏⲧ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲉⲧϩⲓⲧⲟⲩⲱϥ
ⲙⲁⲣⲉ ⲡⲟⲩⲁⲡⲟⲩⲁ ⲥⲡⲟⲩⲇⲁⲍⲉ
ⲉϩⲁⲣⲉϩ ⲉⲣⲟϥ ⲉⲛⲉⲛⲧⲟⲗⲏ’ ⲧⲁ
ⲣⲉϥϭⲛ ⲑⲉ ⲛⲃⲱⲕ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲏⲓ
ⲙⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉϣⲗⲏⲗ . ⲉⲛϣⲁⲛ
ⲃⲱⲕ ⲅⲁⲣ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲏï ⲙⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲉⲛⲟⲩⲛ ϩⲙ ⲡⲁⲧⲁⲛ ⲙⲡⲇⲓⲁⲃⲟⲗⲟⲥ
ⲉⲛⲛⲁϣϭⲙϭⲟⲙ ⲛⲁϣ ⲛϩⲉ’ ⲛ
ϣⲱⲡ ⲉⲣⲟⲛ ⲛⲛⲉⲛⲧⲟⲗⲏ ⲙ

ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲛ̄ⲁϣ ⲛ̄ϩⲉ ⲕⲛⲁ
ϣⲗⲏⲗ ϩⲙ̄ ⲡⲏⲓ̈ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ . ⲛ̄
ⲛ̄ⲅⲛⲏⲥⲧⲉⲩⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲕϩⲏⲧ'
ⲥⲟⲩⲧⲱⲛ ⲁⲛ . ⲟⲩⲧⲉ ⲡⲉⲕϭⲓϫ
ⲟⲩⲁⲁⲃ ⲁⲛ . ⲛⲁⲧⲁⲛ ⲅⲁⲣ ⲟⲩⲛ̄
ⲛ̄ⲅⲛⲁϣϭⲙ̄ϭⲟⲙ ⲁⲛ ⲉⲧⲁⲗⲉ ⲛ̄ⲉⲛ
ⲧⲟⲗⲟ*ⲟⲩⲉ ⲉⲧⲉ ⲛⲁⲓ̈ ⲛⲉ ⲛ̄ⲇⲏⲙⲟⲥⲓⲟ̅
ⲛ̄ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ . ⲕϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ
ϫⲉ ϯⲣ̄ⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲉⲕⲣ̄ϩⲱⲃ ⲉⲛϫⲓⲛ
ϫⲏ . ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙⲉϩ ⲙ̄ⲡⲟⲣⲛⲓⲁ
ⲡϩⲏⲧ ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲥⲱⲱϥ . ⲧⲉⲯⲩ

L. (ϫⲏ) //////// ⲟⲛ ////////
ⲕⲙⲉⲉⲩⲉ ⲉⲃⲟ ⲟ////////
ⲙⲛ̄ ⲛⲉϩⲃⲏⲩⲉ . . ϣⲟ ////////
ⲉⲧⲉ ϣⲁ . . ⲱ . . ⲅ̄ ⲕⲁ ////////
ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲥⲉⲣ̄ϣ . . . . .
ⲡⲗⲁⲥ ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲕⲁⲧⲁⲗⲁⲗⲓⲁ
ⲛ̄ϭⲓϫ ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲥⲛⲟϥ . ⲛ̄ⲟⲩⲉⲣⲏⲧⲉ
ⲡ(ⲏ)ⲧ ⲉⲧⲕⲁⲕⲓⲁ . ⲧⲧⲁⲡⲣⲟ ϫⲓ
ϥⲟϭⲥ̄ ϩⲙ̄ ⲡϫⲓⲛϭⲟⲛ̄ⲥ̄ . ⲙ̄ⲙ*ⲁⲁϫⲉ
ⲥⲱⲧⲙ̄ ⲉⲛⲉϩⲃⲏⲩⲉ ⲉⲧⲟ̂ ⲛ̄ϣⲗⲟϥ
ⲕⲙⲉ ⲛ̄ⲣ̄ⲣⲉϥϫⲏⲣ . ⲕⲛⲏⲧ ⲉⲣⲁⲧⲟⲩ
ⲛ̄ⲣ̄ⲣⲉϥⲕⲁⲟⲩⲛⲟⲩ . ⲕⲃⲏⲕ ϣⲁ ⲛ̄
ⲣⲉϥⲙⲟⲩⲧⲉ . ⲕ̄ⲥⲁⲁⲛϣ ⲛ̄ⲡⲉ*ⲫⲁⲣ
ⲙⲁⲕⲟⲥ . ⲕⲟ̂ ⲛ̄ϣⲃⲏⲣ ⲉⲛ̄ⲣⲉϥϫⲓⲟⲩⲉ
ⲕⲧⲏϩ' ⲙⲛ̄ ⲛ̄ⲣⲉϥϯϩⲉ . ⲧⲟⲟⲩⲕ̄
ⲥⲙⲟⲛ̄ⲧ̄ ⲙⲛ̄ ⲛ̄ⲣⲉϥⲧⲱⲣⲡ̄ . ⲡϫⲟⲓ̈
ⲧⲏⲣϥ̄ ⲟⲩⲛ̄ ϩⲁ ⲛⲁⲧⲁⲛ ⲛ̄ⲧⲕⲁⲕⲓⲁ
ⲁⲩⲱ ⲡⲉϫⲁⲕ ϫⲉ ϯⲣ̄ⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ϯ
ϣⲗⲏⲗ . ⲙⲏ ⲉⲧⲃⲉ ⲛⲓⲡⲉⲑⲟⲟⲩ ⲧⲏ
ⲣⲟⲩ (1) ⲛ̄ⲧⲁ ⲛⲉⲡⲣⲟⲫⲏⲧⲏⲥ ⲱϣ ⲉⲃⲟⲗ

(1) L'originale porta in alto fra ⲩ e ⲛ̄ un' ⲁ che sta probabilmente per la particella ⲁⲛ in correlazione qui col ⲙⲏ precedente.

ϫⲉ ⲡⲏⲓ̈ ⲙ̄ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲛ̄ⲧⲱⲧⲛ̄ ⲁⲧⲉ
ⲧⲛ̄ⲁⲁϥ ⲛ̄ⲥⲡⲏⲗⲁⲓⲟⲛ ⲛ̄ⲥⲟⲟⲛⲉ
ⲡⲉϫⲁϥ ⲟⲛ ϫⲉ ⲉⲧⲉⲧⲛ̄ϣⲁⲛⲡⲣ̄ϣ ⲡⲉ
ⲧⲛ̄ϭⲓϫ ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉⲣⲟⲓ̈ ϯⲛⲁⲕⲧⲉ ⲛⲁ*ⲃⲁⲗ
ⲉⲃⲟⲗ ⲙ̄ⲙⲱⲧⲛ̄ . ⲡⲉⲧⲛ̄ϭⲓϫ ⲅⲁⲣ
ⲙⲉϩ ⲛ̄ⲥⲛⲟϥ . ϥⲥⲏϩ ⲟⲛ ϫⲉ ⲡⲉ
ⲧⲛ̄ⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙⲛ̄ ⲡⲉⲧⲛ̄ⲟⲩ*ⲱⲥ̄ϥ
ⲧⲁⲯⲩⲭⲏ ⲙⲟⲥⲧⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ .
ⲡⲉϫⲁϥ ⲟⲛ ⲛ̄ϭⲓ ⲓ̈ⲉⲣⲏⲙⲓⲁⲥ ⲡⲉⲡⲣⲟ
ⲫⲏⲧⲏⲥ ϫⲉ ⲙⲏ ⲟⲩⲃⲏϭ ⲛ̄ϩⲟⲓ̈ⲧⲉ
ⲧⲉ ⲧⲁⲕⲗⲏⲣⲟⲛⲟⲙⲓⲁ ⲛⲁⲓ̈ . . .

LI. [...]
ⲛⲛ [...]
ⲉⲧⲉ ⲙⲛⲧⲟⲩ [...]
ⲅⲁⲣ ⲛⲁⲛ ϩⲓⲧ(ⲛ̄ ⲛ)ⲉⲡⲣ(ⲟⲫⲏ)
ⲧⲏⲥ ϫⲉ ⲁⲓ̈ϫⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲟⲩ [...]
ϩⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲧⲙ̄ⲡⲟⲗⲓⲥ .
ⲁⲓ̈ⲣⲱⲕϩ̄ ⲛ̄ⲛⲉⲧⲛ̄ⲥⲁⲛϩⲟⲩ
ⲛ̄ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲡⲗⲁⲧⲉⲓⲁ .
ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲉⲧⲛ̄ⲕⲧⲉ ⲧⲏⲩⲧⲛ̄
ⲉⲣⲟⲓ̈ ⲡⲉϫⲉ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲁⲓ̈ⲣⲱ
ϩⲧ ⲛ̄ⲛⲉⲧⲛ̄ϣⲏⲣⲉⲕⲟⲩⲓ̈ ⲙⲛ̄
ⲡⲉⲧⲛ̄ϩⲣ̄ϣⲓⲣⲉ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲙⲟⲩ̂
ⲉϥⲟϣ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲉⲧⲛ̄ⲕⲧⲉ
ⲧⲏⲩⲧⲛ̄ ⲉⲣⲟⲓ̈ ⲡⲉϫⲉ ⲡϫⲟⲓ̈ⲥ
ⲁⲓ̈ϫⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲟⲩϣⲱϭⲉ ⲉϫⲙ̄
ⲡⲕⲁⲣⲡⲟⲥ ⲧⲏⲣϥ̄ ⲙ̄ⲡⲉⲧⲛ̄
ⲕⲁϩ . ⲁⲩⲱ ϩⲓⲛⲁⲓ̈ ⲙ̄ⲡⲉⲧⲛ̄ⲕⲧⲉ
ⲧⲏⲩⲧⲛ̄ ⲉⲣⲟⲓ̈ ⲡⲉϫⲉ ⲡϫⲟⲓ̈ⲥ
ⲁⲓ̈ⲧⲁⲕⲉ ⲧⲏⲩⲧⲛ̄ ⲕⲁⲧⲁ ⲑⲉ ⲛ̄
ⲧⲁⲓ̈ⲧⲁⲕⲉ ⲥⲟⲇⲟⲙⲁ ⲙⲛ̄
ⲅⲟⲙⲟⲣⲣⲁ · ⲁⲩⲱ ϩⲓⲛⲁⲓ̈ ⲟⲛ
ⲙ̄ⲡⲉⲧⲛ̄ⲕⲧⲉ ⲧⲏⲩⲧⲛ̄ ⲉⲣⲟⲓ̈

ⲡⲉϫⲉ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲛⲁϊ ϭⲉ
ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲙⲏ ⲛ̄ⲥⲉ ϩⲓϫⲱⲛ ⲁⲛ
ϣⲁ ⲡⲟⲟⲩ ⲛ̄ϩⲟⲟⲩ ⲉⲃⲟⲗ'
ⲙ̄ⲙⲁⲧⲉ ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲛ̄ⲛⲁϊⲥⲑⲁⲛⲉ
ⲁⲛ ⲛ̄ⲑⲉ ⲙ̄ⲡⲁⲑⲏⲧ ⲉⲧⲟⲩ

LII. ////// ⲉⲧ
//////(ϣ)ⲁⲩϫⲟⲟⲥ ϩⲓⲧⲛ̄ ⲛⲉ
////// ⲛ̄ⲁⲣ(ⲭ . ⲟ)ⲥ ⲉⲧⲃⲉ ⲑⲟϊⲧⲉ
////// ⲑⲏⲣⲓⲟⲛ ⲡⲉ ⲉϥⲥⲟⲟϥ ⲉϣⲁϥ
(ⲡⲱⲱ)ⲛⲉ ⲙ̄ⲡⲉϥⲫⲩⲥⲓⲕⲟⲛ ⲉⲫⲩⲥⲓⲥ
ⲥ(ⲛ)ⲧⲉ : ϣⲁϥⲣ̄ ⲟⲩⲕⲁⲓⲣⲟⲥ ⲉϥⲟ̂ ⲛ̄ϩⲟⲟ(ⲩⲧ)
ⲛ̄ϥⲣ̄ ⲟⲩⲕⲁⲓⲣⲟⲥ ⲉϥⲟ̂ ⲛ̄ⲥϩⲓⲙⲉ .
ⲁⲛⲟⲛ ϩⲱⲱⲛ ⲱ̂ ⲛⲉⲥⲛⲏⲩ ⲉⲛϣⲁⲛ '
ⲡⲱⲱⲛⲉ ⲛ̄ⲧⲉⲛⲫⲩⲥⲓⲥ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄
ⲑⲟϊⲧⲉ . ϩⲉⲛⲥⲟⲛ ⲙⲉⲛ ⲉⲛⲡⲱⲧ
ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲉⲛⲡⲱⲣ̄ϣ
ⲛ̄ⲛⲉⲛϭⲓϫ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲛϣⲗⲏⲗ' . ⲏ̄ ⲉⲛ
ⲛⲏⲥⲧⲉⲩⲉ . ϩⲉⲛⲥⲟⲛ ⲇⲉ ⲟⲛ ⲉⲛ
ⲁⲝⲓⲟⲩ ⲛ̄ⲛ̄ⲣⲉϥⲕⲁⲟⲩⲛⲟⲩ ⲙⲛ̄ ⲙ̄
ⲫⲁⲣⲙⲁⲕⲟⲥ ⲙⲛ̄ ⲛ̄ⲣⲉϥⲣ̄*ⲡⲁϩⲣⲉ
ϫⲉ ϣⲱⲡⲉ ⲛⲁⲛ ⲛ̄ⲛⲁϣⲧⲉ .
ⲛ̄ⲁϣ ⲇⲉ ⲛ̄ϩⲉ ⲱ̂ ⲛⲁⲙⲉⲣⲁⲧⲉ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲛⲁϭⲱⲛ̄ⲧ ⲁⲛ ⲉⲣⲟⲛ
ⲛ̄ϥⲛ̄ ⲟⲣⲅⲏ ⲛⲓⲙ* ⲉϩⲣⲁϊ ⲉϫⲱⲛ .
ⲛ̄ⲁϣ ⲛ̄ϩⲉ ϥⲛⲁϭⲱϣⲧ ⲉϫⲛ̄ ⲛⲉⲛ
ⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙⲛ̄ ⲛⲉⲛϣⲗⲏⲗ . ⲙⲏ
(ⲉ)ⲧⲃⲉ ϯⲉ . . ⲛ̄ⲣ̄ϩⲱ . ⲁⲛ ⲉⲑⲟⲟⲩ
ⲛ̄ⲧⲁ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲱϣ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲣⲟⲛ
ϩⲓⲧⲛ̄ ϊⲉⲣⲏⲙⲓⲁⲥ ⲡⲉⲡⲣⲟⲫⲏⲧⲏⲥ
ϫⲉ ⲙⲏ ⲉϩⲣⲁϊ ⲉϫⲛ̄ ⲛⲁϊ ⲛ̄ϯⲛⲁϭⲙ̄
ⲡϣⲓⲛⲉ ⲁⲛ ⲡⲉϫⲉ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ :
ⲏ̄ ⲉϫⲛ̄ ⲟⲩϩⲉⲑⲛⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲉϊⲙⲓⲛⲉ
ⲧⲁⲯⲩⲭⲏ ⲛⲁⲉⲓⲣⲉ ⲁⲛ ⲙ̄ⲡⲟⲩⲕⲃⲁ

ⲁϣ ϭⲉ ⲡ̄ⲉ ⲡⲉⲕⲃⲁ ⲉⲧⲉⲣⲉ ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲛⲁⲛ̄ⲧϥ̄ ⲉϩⲣⲁï ⲉϫⲱⲛ ⲛ̄
ϩⲟⲩⲟ ⲉⲧⲣⲉⲛ ⲙⲉⲧⲁⲛⲟⲉⲓ ⲛ̄ⲑⲉ

▸ⲡ̄ⲅ̄◂ LIII. (1) ⲧⲁⲛⲟⲓⲁ ⲇⲉ ϩ̄ⲛ̄ ⲟⲩⲙⲉ ϣⲁⲥϫⲡⲟ
ⲉⲛⲟⲃⲉ ⲛⲓⲙ . ⲛⲙⲁⲉⲓⲛ ⲛ̄ⲧⲙⲉ
ⲧⲁⲛⲟⲓⲁ ⲡⲉ ⲡⲣⲓⲙⲉ . ⲡⲣⲓⲙⲉ ⲇⲉ .
ⲡⲉ ϣⲁϥϥⲉⲧ ⲛ̄ⲛⲟⲃⲉ ⲉⲃⲟⲗ'
ϯⲥⲃⲱ̂ ⲙ̄ⲡⲉⲕϣⲏⲣⲉ ϫⲉ ⲛ̄ⲛⲉϥⲣ̄
ϣⲃⲏⲣ' ⲉⲩⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲣⲉϥⲣ̄ⲛⲟⲃⲉ
ⲁⲩⲱ ϥⲛⲁⲡⲣⲟⲕⲟⲡⲧⲉ ⲕⲁⲧⲁ
ⲡⲉⲕⲟⲩⲱϣ . ⲙⲁⲣⲉϥϣⲓⲛⲉ ⲛ̄
ⲥⲁ ⲧⲉⲥⲃⲱ ⲛ̄ⲧⲟⲟⲧⲟⲩ ⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁϩ'
ⲛ̄ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ . ⲙⲁⲣⲉϥⲛⲁⲩ ⲉ
ⲛⲉⲩⲥⲃⲟⲟⲩⲉ ⲛ̄ϩⲏⲧϥ̄ · ⲧⲉⲛ' ⲧⲉⲕ
ⲧⲁⲡⲣⲟ̂ ⲉⲛϣⲁϫⲉ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲅⲙⲟⲟϣⲉ ⲙ̄ⲛ̄ ϩⲉⲛⲥⲁⲃⲉ .
ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲧⲉⲛ' ⲣⲱⲕ ⲉⲱⲣⲕ̄ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄
ⲡⲣ̄ⲥⲁϩⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲕⲁⲑⲓⲕⲱⲛ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉ . ϣⲓⲛⲉ ⲛ̄ⲥⲁ ⲡⲉⲥⲙⲟⲩ . ⲁⲩⲱ
ⲙⲁⲣⲉ ⲡⲉⲥⲙⲟⲩ ϣⲱⲡⲉ ϩ̄ⲛ̄ ⲣⲱⲕ
ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲥⲉϣ ⲗⲁⲁⲩ ⲛ̄ⲣⲱ(ⲙⲉ) ⲉ(ⲡⲧⲏ)ⲣϥ̄
ⲁⲩⲱ ⲉϣⲱⲡⲉ ⲕ̄ⲟⲩⲱϣ ⲁⲛ ⲉ
ⲧⲣⲉ ⲣⲱⲙⲉ ⲥⲟϣⲕ . ⲛ̄ⲧⲟⲕ ϩⲱ
ⲱⲕ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲥⲱϣ . ϯⲉⲟⲟⲩ ⲛ̄ⲟⲩ
ϩ̄ⲗⲗⲟ̂ . ⲁⲩⲱ ⲕⲁⲙⲁ ⲛⲁϥ ⲉⲧⲣⲉϥ
ϩⲙⲟⲟⲥ . ϣⲓⲛⲉ ϩⲏⲧϥ̄ ⲛ̄ⲟⲩⲟⲛ
ⲛⲓⲙ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛⲁϯⲛⲟⲩ
ϭ̄ⲥ̄ ⲛⲁⲕ . ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲟⲩⲉϩ ϩⲓⲥⲉ ⲉⲗⲁⲁⲩ
ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲁⲓⲧⲉⲓ̈ ⲛ̄
ⲟⲩⲣ̄ⲙ̄ⲙⲁⲟ ⲛ̄ⲥⲟⲛ ⲥⲛⲁⲩ . ⲟⲩⲛ̄
ⲧⲁⲕ ⲟⲉⲓⲕ ⲛⲟϣϥ ⲉϫⲱⲕ ⲙ̄ⲛ̄

(1) Questa pagina cominciava con un' altra linea, che fu poscia diligentemente raschiata, ma se ne vede tuttavia qualche leggerissima traccia.

петϩітотωк . ϭⲙ̄пϣіпе
п̄петϣωпе . аτω п̄ϩ̄вωк

▸п̄ⲇ◂ LIV. пϩ̄ϭⲙ̄пϣіпе п̄петотп
ϵϩотп . кап п̄τк отр̄ⲙⲙао
ϫек текаⲅіаконіа ϵвоλ'
п̄пекотернте . τ̄пτω
п̄ϩ̄ ϵавраϩаⲙ паї ете паϣ(ϵ)
пеqϩтпарχопта . аτω ϵ
пⲙа п̄теqⲙ̄пτⲙаїϣ̄ⲙⲙô
аqⲙ̄пϣа п̄отωⲙ ⲙ̄п ппотте .
ϩаθн ⲙеп п̄ϩωв пiⲙ' ϫпе от
ⲙ̄пτϣапϩτнq пак тарот
ϣп̄ϩτнт ϩарок . пархωп
п̄тпоλіс . потq пе п̄ка пiⲙ
етϩ̄п тпоλіс . етве паї п̄
ϣϣе ап ероq ефθопе ϵ (1)
λаат . ϵϣωпе ⲇе отр̄ⲙⲙаô
пе ота' ϣϣе ероq п̄ϩотô ер̄
пістос . аτω п̄qср̄qе епек
кλ(нс)іа . ппотте ⲙе п̄пет
па' п̄п̄ϩнке етκнкаϩнт п̄θе
ⲙ̄петпакωт п̄оττωпωс
ⲙ̄пеqрап . отр̄ⲙⲙао еqпа'
п̄п̄ϩнке паї отр̄ⲙⲙаô пе ϵ
воλϩіτ̄ⲙ ппотте . ϣаре
пϩнке раϣе етϣапϣаϫе
п̄ⲙⲙаq ϩіτ̄ⲙ п̄р̄р̄ⲙⲙаô . еq
ϩеλпіζе еⲙ̄топ евоλ ⲙ̄ⲙоq
ϣϣе п̄ϩотô епр̄ⲙⲙаô етреq
раϣе ϩ̄ⲙ птреqтωⲙ̄п̄т ϵ

(1) Questa ϵ è formata da una primitiva п̄ di cui è rimasta una leggera traccia.

пϩнке. ауѡ пq̄ноуноq ϫе а̇(q)
р̄шбнр етрѡме нте пноуте

LV. пархѡн н̄сабе тѡq те т
м̄нтр̄ммаō м̄пкосмос
пϩнке ϩѡѡq н̄сабе тѡq те
тм̄нтр̄ммаō м̄п(к̇)еаιѡн е
те тм̄нтерō н̄м̄пнуе те. оу
ϩоте пе пноуте ϩм̄ пеqеооу
пеооу ϫе м̄пноуте моуϩ м̄
птнрq̄. ниm петнашϩѡн е
пеqбал. ере паϩнт меете ϫе
м̄н петнаеιме ероq. пq̄со
оун ан ϫе qō ноп̄ϩ н̄ѳе ноу
трапетнс. арιϩоте ϩнтq̄ м̄
пноуте ѡ̂ прѡме н̄гшм̄ше
наq ϩн̄ текпроϩаιресιс. оуѡ
н̄ϩ ебол м̄пекноус. шш е
ϩоун ероq ϩн̄ оум̄нтна н̄н̄ϩнке
† м̄пекоеιк н̄петϩкаеιт'. ауѡ
н̄гшѡрп етеккλнсιа. ауѡ
сеп̄̇с тбιϫ м̄пϩнке м̄мнне. ауѡ
† наq ката текбом. оупрос
фора мареснѡпе на̇к ϩм̄ пн(ι)
м̄пноуте. ауѡ тапархн н̄н
генн̇ма. арιшорп̄ ероу. н̄г
таау м̄поунне. † ϩа текψу
хн епϩосон кон̄ϩ. ершан
прѡме гар моӯ мере пеqша
ϫе намоун ебол. пете м̄н
таq λа̇ау н̄са пϩѡб н̄пеqбιϫ
оунбом м̄моq е†м̄н̇тна
е . . е н . . . арι̇ке ероq еq
шан(а . . . .). е̇шϫе оу на

▸ⲡ̄ⲋ̄◂ LVI. ⲁⲣⲓⲕⲉ ⲉⲡϩⲏⲕⲉ ϫⲉ ⲙ̄ⲡϥ̄ϣⲱ
ⲡⲉ ⲛ̄ⲛⲁ*ⲏⲧ . ⲉⲓ̈ⲉ ⲟⲩ̄ ⲡⲉⲧⲛⲁ
ϣⲱⲡⲉ ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲙ̄ⲙⲁⲟ̂ ⲉϥⲕⲁ
ⲛⲟⲩⲃ ⲉϫⲛ̄ ⲛⲟⲩⲃ ϣⲁⲛⲧⲟ(ⲩ)ⲣ̄
ϣⲏⲃⲉ . ⲁⲩⲱ ⲛϥ̄ⲙⲟⲩϩ ⲛ̄ϩⲉⲛ
ⲧⲏⲏⲃⲉ ⲛ̄ϩⲟⲓ̈ⲧⲉ ϣⲁⲛⲧⲟⲩⲣ̄
ϩⲟⲟⲗⲉ . ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁⲓ̈ ⲱ̄ ⲡⲁⲙⲉⲣⲁ
ⲧⲉ ϩⲱⲥ ⲉⲁⲛⲉⲓⲙⲉ ϫⲉ ⲉⲣⲉ ⲡⲟⲩ
ⲱϣ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϩⲙ̄ ⲡⲛⲁ̀ . ⲙⲁ
ⲣ̄ⲡⲙ*ⲉⲣⲉ ⲡⲛⲁ . ⲡⲛⲁ' ⲡⲉϫⲁϥ
ϣⲁϥϣⲟⲩϣⲟⲩ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲉϫⲛ̄
ⲧⲉⲕⲣⲓⲥⲓⲥ . ⲛⲁⲉⲓⲁⲧⲟⲩ ⲅⲁⲣ ⲡⲉ
ϫⲁϥ ⲛ̄ⲛ̄ⲛⲁⲏⲧ ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ ⲡⲉ
ⲧⲟⲩⲛⲁⲛⲁ' ⲛⲁⲩ . ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲓ̄ⲥ̄
ϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϫⲉ ϣⲱⲡⲉ ⲛ̄ϣⲁⲛ
ϩⲧⲏϥ ϫⲉ ⲟⲩϣⲁⲛϩⲧⲏϥ ⲡⲉ
ⲡⲉⲧⲛ̄ⲉⲓⲱⲧ . ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲕⲣⲓⲛⲉ
ϫⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲩⲕⲣⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲙⲱⲧⲛ̄ . ⲙ̄
ⲡⲣ̄ⲧϭⲁⲉⲓⲟ̂ ϫⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲩⲧϭⲁⲉⲓⲉ
ⲧⲏⲩⲧⲛ̄ . ⲕⲱ ⲉⲃⲟⲗ' ⲧⲁⲣⲟⲩⲕⲱ
ⲛⲏⲧⲛ̄ ⲉⲃⲟⲗ . ϯ ⲧⲁⲣⲟⲩϯ ⲛⲏⲧⲛ̄
ⲟⲩϣⲓ ⲉⲛⲁⲛⲟⲩϥ ⲉϥⲧⲉϭⲧⲱϭ
ⲉϥⲛⲉϩⲛⲟⲩϩ ⲉϥⲡⲉⲡⲉ* ⲉⲃⲟⲗ
ⲥⲉⲛⲁⲧⲁⲁϥ ⲉⲕⲟⲩⲛ ⲧⲏⲩⲧⲛ̄
ϩⲙ̄ ⲡϣⲓ ⲅⲁⲣ ⲉⲧⲉⲧⲛⲁϣⲓ ⲙ̄ⲙ(ⲟⲥ)
ⲉⲩⲛⲁϣⲓ ⲛⲏⲧⲛ̄ ⲙ̄ⲙⲟϥ .
ⲡⲁⲓ̈ ⲡⲉⲟⲟⲩ *ⲛⲁϥ ⲙⲛ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ
ϣⲁ ⲉⲛⲉϩ ⲛ̄ⲉⲛⲉϩ ϩⲁⲙⲏⲛ .
~ ~ ~ ~
~ ~ ~ ~

LVII. ~ ~ ~ ⲃⲉ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲧⲥⲩⲛϩⲟⲗⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲟϫ'
ⲛ̄ⲇⲓⲕⲁⲓⲁ ⲉⲧ ~ ~

тпістіс п̄
 таусм̄пт̄с
 ϩ̄п пікаіа
 ебоλϩіт̄п
 θаѓіа п̄стп
 ϩоλос .
т̄мпістєуе
 єупоутє п̄
 оуωт . пєі
 ωт ппапто
 кратωр .
прєqтамıо п̄
 пєт̄ппау є
 рооу . м̄п пє
 тє п̄т̄ппау
 єрооу ап .
ауω оуϫоєіс
 п̄оуωт ї̄с
 (пєх̄с) пϣн

 рє м̄ппоутє .
 єаухпоq м̄мо
 поѓєпнс є
 боλϩ̄м пєіωт .
Єтє паї пє ϫє є
 боλϩ̄п тоусіа
 м̄пєіωт .
Оупоутє єбоλ
 ϩ̄п оупоутє .
Оуоуоєіп єбоλ
 ϩ̄п оуоуоєіп .
Оупоутє м̄мє
 єбоλϩ̄п оупоу
 тє м̄мє .

Єптаухпоq .
 п̄тауҭамıоq
 ап . оуϩомооу
 сıоп пє м̄п
 пєqєіωт .
паї п̄та п̄ка
 пім ϣωпє є
 боλϩітоот̄q .
пєтϩ̄п м̄пнує
 м̄п пєтϩіх̄м
 пкаϩ . паї

Р̄ка LVIII. єтбннт̄п
 апоп п̄рω
 мє . ауω єт
 бє пєпоуϫаї
 аqєі єпєснт .
 аqр̄сар̄ξ аq
 ϣ̄пϩісє .
 ауω аqмоу .
 ауω аqтω
 оуп ϩ̄м пмєϩ
 ϣом̄т п̄ϩооу
 ауω аqбωк
 єϩраї єм̄пнуе .
 єqпну є†
 ϩап єоуоп
 пім єтопϩ
 м̄п пєтмооут .
 ауω пϩаѓіо
 м̄п̄па .
 паї ƛє єтхω
 м̄мос ϫє
 qϣооп п̄оу

ⲟⲩⲟⲉⲓϣ ⲛ̄ϥ
ϣⲟⲟⲡ ⲁⲛ ⲛ̄ⲕⲉ
ⲟⲩⲟⲉⲓϣ .

ϫⲉ ⲙ̄ⲡⲁⲧⲟⲩ
ⲙⲁⲥⲧ̄ϥ ⲛ̄ϥ
ϣⲟⲟⲡ ⲁⲛ.
(ⲏ̄) ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲁϥ
ϣⲱⲡⲉ ⲉⲃⲟⲗ
ϩ̄ⲛ ⲛⲉⲧⲉ ⲛ̄ⲥⲉ
ϣⲟⲟⲡ ⲁⲛ .
ⲏ̄ ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ ⲕⲉ
ϩⲩⲡⲟⲥⲧⲁ
ⲥⲓⲥ . ⲏ̄ ⲉⲃⲟⲗ
ϩ̄ⲛ ⲕⲉⲟⲩⲥⲓⲁ .
ⲉⲩϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ
ⲉⲡϣⲏⲣⲉ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϫⲉ
ϣⲁϥⲡⲱⲱ
ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ ϣⲁϥ
ϣⲓⲃⲉ . ⲡⲁï
ⲥⲉ ⲁⲁⲛⲁ
ⲑⲉⲙⲁⲧⲓ
ⲍⲉ ⲙ̄ⲙ̇ⲟⲟⲩ
ⲛ̄ϭⲓ ⲧⲕⲁⲑⲟ
ⲗⲓⲕⲏ ⲛ̄ⲁ
ⲡⲟⲥⲧⲟⲗⲓⲕⲏ
ⲛ̄ⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ
ⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲛ ⲧⲉⲓ

ⲣ̄ⲕ̄ⲃ̄ LIX. ⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲟⲩ
ⲁⲁⲃ. ⲧⲁï ⲛ̄
ⲧⲁⲩⲥⲙ̄ⲛ̄ⲧ̄ⲥ
ϩ̄ⲛ ⲛⲓⲕⲁⲓⲁ
ⲧⲡⲟⲗⲓⲥ ϩⲓⲧ̄ⲛ̄
ⲛⲉⲛⲉⲓⲟⲧⲉ .
Ⲉⲁⲩⲥⲙ̄ⲛ̄ⲧ̄ⲥ
ⲡⲣⲟⲥ ⲟⲩⲟⲩ
ⲟⲉⲓⲛ ⲛⲛⲓⲁ
ⲕⲁⲓⲣⲉⲟⲥ ⲉⲧⲣⲉⲩ
ⲉⲓⲙⲉ ⲉⲛϣⲁ
ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲁⲩϩⲟ
ⲙⲟⲗⲟⲅⲉï
ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲛ̄ϩⲏ
ⲧ̄ⲥ ⲉⲃⲟⲗϩⲓⲧ̄ⲛ̄
ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ.
ⲉⲩⲟ̄ ⲛ̄ϩⲟⲩⲟ̂
ⲉⲧⲏⲡⲉ ⲛ̄
ϣⲙ̄ⲧϣⲉ
ⲙ̄ⲛ̄ⲧϣⲙⲏⲛ.
ⲙⲁⲗⲗⲟⲛ ⲇⲉ
ⲟⲩⲥⲩⲛϩⲟⲇⲟⲥ
ⲛ̄ⲧⲟⲓⲕⲟⲩⲙⲉ
ⲛⲏ ⲧⲉ .
(. .)ⲇⲉ ⲉⲧⲟⲩⲏϩ

ⲛ̄ⲥⲁ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ
ⲛ̄ⲧⲁⲥⲣ̄ϣⲣ̄ⲡ
ⲥⲙ̄ⲛ̄ⲧ̄ⲥ.
ⲧ̄ⲡⲁⲛⲁⲑⲉⲙⲁ
ⲧⲓⲍⲉ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥ
ⲧⲓⲥ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲉⲗ
ⲗⲓⲟⲥ . ⲧⲁï ⲉⲧ
ϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϫⲉ
ⲡⲁï ⲡⲉ ⲡⲉⲓⲱⲧ
ⲙ̄ⲛ ⲡϣⲏⲣⲉ'
ⲙ̄ⲛ ⲡϩⲁⲅïⲟⲛ
ⲙ̄ⲡⲛ̄ⲁ̄ .

Ϥⲥⲟⲣⲙ̄ ⲅⲁⲣ ⲉϥ
ϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϫⲉ
ⲡⲉⲓⲱⲧ ⲛ̄ⲧⲟϥ
ⲡⲉ ⲡϣⲏⲣⲉ .
ⲁⲩⲱ ⲡϣⲏⲣⲉ
ⲛ̄ⲧⲟϥ ⲡⲉ ⲡⲉⲓ
ⲱⲧ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄
ⲧⲉⲓϩⲉ ⲟⲛ ⲡⲉ
ⲡϩⲁⲅⲓⲟⲛ ⲙ̄
ⲡ̄ⲛ̄ⲁ . ϩⲱⲥ ⲇⲉ
ⲟⲩⲡⲣⲟⲥⲱ
ⲡⲟⲛ ⲛ̄ⲟⲩⲱⲧ
ⲡⲉ ⲡⲉϊϣⲟⲙ̄ⲧ*

ⲣ̄ⲕ̄ⲁ̄ (*sic*) LX. ⲛ̄ⲣⲁⲛ . ⲛⲁϊ ⲉ
ϩⲉⲛϣⲙ̄ⲙⲟ'
ⲛⲉ ⲉⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ .
ⲡⲉⲓⲱⲧ ⲅⲁⲣ ⲧⲛ̄
ⲥⲟⲟⲩⲛ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ⲛ̄ⲉⲓⲱⲧ . ⲁⲩⲱ
ⲡϣⲏⲣⲉ ⲉϥⲟ̂ ⲛ̄
ϣⲏⲣⲉ . ⲁⲩⲱ
ⲡϩⲁⲅⲓⲟⲛ ⲙ̄
ⲡ̄ⲛ̄ⲁ . ⲟⲩⲙⲛ̄
ⲧⲉⲣⲟ̂ ⲛ̄ⲟⲩⲱⲧ .
ⲟⲩⲟⲩⲥⲓⲁ ⲛ̄ⲟⲩ
ⲱⲧ .
Ⲉⲧⲓ ⲇⲉ ⲟⲛ ⲧⲛ̄ⲁ
ⲛⲁⲑⲉⲙⲁⲧⲓⲍⲉ
ⲙ̄ⲙ̄ⲫⲟⲧⲓⲛⲟⲥ
ⲧⲁϊ ⲉⲧϫⲱ ⲙ̄
ⲙⲟⲥ ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲁ
ⲡϣⲏⲣⲉ ϣⲱ
ⲡⲉ ϫⲓⲛ ⲙⲁⲣⲓⲁ
ⲉⲡⲓⲥⲁ .
Ⲉⲡⲉϥϣⲟⲟⲡ
ⲇⲉ ⲁⲛ* ϩⲁⲑⲏ
ⲙ̄ⲡⲁϊ . ⲁⲗⲗⲁ
Ⲉⲁⲩϣⲣ̄ⲡϣⲁ
ϫⲉ ⲙⲉⲛ ⲉⲣⲟϥ

ϩⲛ̄ ⲛ̄ϣⲣ̄ⲡ
ⲛ̄ⲧⲱϣ ϩⲛ̄
ⲛⲉⲅⲣⲁⲫⲏ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ .
ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ ⲇⲉ ⲉⲩ
ϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲥ
ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲁϥϣⲱ
ⲡⲉ ϫⲓⲛ ⲙⲁ
ⲣⲓⲁ ⲉⲡⲓⲥⲁ ⲟⲩ
ⲁⲁϥ ⲕⲁⲧⲁ
ⲧⲉϥⲙⲛ̄ⲧ
ⲛⲟⲩⲧⲉ .
ⲛⲁϊ ⲇⲉ ⲧⲛ̄
ⲥⲟⲟⲩⲛ ⲙ̄
ⲙⲟⲟⲩ ⲉⲩⲟ̂
ⲛ̄ϣⲙ̄ⲙⲟ
ⲉⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ .
ⲡϣⲏⲣⲉ ⲅⲁⲣ
ϣⲟⲟⲡ ⲉϥ ⲙⲛ̄
ⲡⲉϥⲉⲓⲱⲧ
ⲛ̄ⲟⲩⲟⲉⲓϣ
ⲛⲓⲙ . ⲛ̄ⲧⲉ
ⲣⲉϥϫⲡⲟϥ
ⲛⲉϥϣⲟⲟⲡ
ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ ⲛⲉϥ
ⲙⲛ̄ ⲡⲉϥⲉⲓⲱⲧ

XLI.

пе ката ѳе (1)
етснϩ ϩп
пеграфн
м̄п отоеіщ
гар щоос
п̄цщооп а
п̄бі пщнре'
алла п̄ото
еіщ пім от
еішт пе ет
п̄тац м̄мат
м̄пецщнре
атш отщнре
етптац м̄
мат м̄пец
еішт.
Отатбом гар
пе пеішт
ецщооп ехп
щнре п̄от
отшеіщ.
епϩае ɀе п̄
семотте
ероц х(е) п̄(еі)
(шт) ϩшс ка

та прокшпн
алла цщооп п̄
бі пеішт п̄еі
шт п̄отоеіщ
нім ката ѳе
п̄тапщрп

хоос. п̄от
щбнр гар ап
пе. алла п̄те
ротхпоц лец
м̄п пецеішт
ката ѳе п̄
тапщрп̄сϩа(ї)
атш паї мен
епхш м̄мо
от етбе пеі
шт м̄п пщн
ре. етбе пе
п̄па ɀе п̄ϩа
гіоп. таї
те ѳе етм̄піс
теуе хе от
п̄па п̄те
ппотте пе.
от п(п̄а) п̄ϩа

Ркг LXII.

гіоп. от
п̄па ецхнк
ебол' отпа
ракλнтос.
отатсоптц
отатп̄ратц
еацщахе
ϩм пномос
м̄п пепро
фнтнс м̄п п̄
апостолос
Єацеї епеснт

(1) Le prime sedici linee di questa colonna, di cui ho dato il calco nella tavola III, furono omesse nel testo del Revillout come illeggibili.

ⲉϫⲙ̅ ⲡⲓⲟⲩ
ⲇⲁⲛⲏⲥ ⲉⲧ
ⲃⲉ ⲧⲙ̅ⲛⲧ
ⲣⲱⲙⲉ ⲇⲉ ⲙ̅
ⲡϣⲏⲣⲉ ⲛ̅ⲧⲉⲓ̈
ϩⲉ . ⲧⲙ̅ⲛⲓⲥ
ⲧⲉⲩⲉ ϫⲉ ⲁϥ
ϫⲓ ⲟⲩⲣⲱⲙⲉ
ⲛ̅ⲧⲉⲗⲓⲟⲥ ⲉ
ⲃⲟⲗϩⲛ̅ ⲧⲉⲓ̈
ⲣⲉϥϫⲡⲉ ⲛⲛⲟⲩ
ⲧⲉ ⲙⲁⲣⲓⲁ ⲉ
ⲃⲟⲗϩⲛ̅ ⲟⲩ

ⲡ̅ⲛ̅ⲁ ⲉϥⲟⲩ
ⲁⲁⲃ .
ⲛ̅ⲃⲟⲗ ⲁⲛ
ϩⲛ̅ ⲟⲩⲥⲡⲉⲣ
ⲙⲁ ⲛ̅ⲣⲱⲙⲉ
ⲙⲉⲅⲉⲛⲟⲓⲧⲟ̂*
ⲁⲗⲗⲁ ⲉⲃⲟⲗ
ϩⲛ̅ ⲟⲩⲡ̅ⲛ̅ⲁ
ⲉϥⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲕⲁⲧⲁ ⲑⲉ ⲉⲧ
ⲥⲏϩ ϩⲛ̅ ⲛ̅
ⲉⲩⲁⲅⲅⲉⲗⲓⲟ̅.
ⲁϥⲫⲟⲣⲉⲓ ⲇⲉ
ⲙ̅ⲡⲥⲱⲙⲁ
ⲙ̅ⲛ ⲧⲉϥⲯⲩ
ⲭⲏ ⲛⲁⲙⲉ .
ⲁⲩⲱ ϩⲛ̅ ⲟⲩ
ⲥⲙⲟⲧ ⲁⲛ .
Ⲟⲩⲇⲉ ϩⲛ̅ ⲟⲩ
ϭⲓⲛⲙⲉⲉⲩⲉ

ⲁⲛ . ⲛ̅ⲧⲉⲓ̈ϩⲉ
ⲅⲁⲣ ⲁϥⲉⲓ̈ ⲉ
ⲛⲉϩⲙ̅ ⲛⲣⲱ
ⲙⲉ ϩⲛ̅ ⲟⲩ
ϫⲱⲕ (. . .)

ⲣ̅ⲕ̅ⲇ̅ LXIII. ⲁⲩⲱ ϫⲉ ⲁϥ
ϣⲉⲛ̅ⲙ̅ⲕⲁϩ .
ⲁⲩⲱ ϫⲉ ⲁⲩ
ⲥⲟϣϥ .
ⲁⲩⲱ ⲁⲩⲧⲟ
ⲙ̅ⲥϥ . ⲁⲩⲱ
ϫⲉ ⲁϥⲧⲱⲟⲩ͡ⲛ
ϩⲙ̅ ⲡⲙⲉϩ
ϣⲟⲙ̅ⲧ ⲛ̅
ϩⲟⲟⲩ . ⲁⲩⲱ
ϫⲉ ⲁⲩϫⲓⲧ̅ϥ
ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉⲧⲡⲉ .
ⲁⲩⲱ ϫⲉ ⲁϥ
ϩⲙⲟⲟⲥ ⲛ̅ⲥⲁ
ⲟⲩⲛⲁⲙ ⲙ̅
ⲡⲉⲓⲱⲧ .
ⲉⲁϥⲣ̅ ⲛⲣⲱ
ⲙⲉ ⲛ̅ⲛⲟⲩⲧⲉ
ⲛ̅ⲧⲁϥϫⲓⲧ̅ϥ
ⲉϩⲣⲁⲓ̈ ⲉⲧⲡⲉ .
ⲉϥⲛⲏⲩ ⲉϯ
ϩⲁⲡ ⲉⲛⲉⲧ
ⲟⲛ̅ϩ ⲙⲛ̅ ⲛⲉⲧ-
ⲙⲟⲟⲩⲧ .
(ⲡⲁⲓ̈) ⲇⲉ* ⲡⲓⲙ

ⲉⲣⲉ ⲧⲉⲅⲣⲁ
ⲫⲏ ϣⲁϫⲉ ⲉⲧ

ϭηητ̄ϥ ϩ̄ⲛ ⲛ̄
ϣορ̄ⲡ ⲛ̄τωϣ.
ⲛ̄ϑε ⲅⲁⲣ ε
ⲡετϣⲁϫε
εⲧϭε ⲟⲩⲥⲱⲡ̄ⲧ
ⲛ̄ⲉⲩⲛⲁⲧⲁϩⲟ̂
ⲁⲛ ⲉⲣⲁⲧⲟⲩ ⲛ̄
ⲡⲓⲁϣⲏ ⲙ̄ⲙ̄ⲛ̄ⲧ
ⲙ̄ⲛ̄ⲧⲣⲉ. ⲁⲗⲗⲁ
Ⲉⲩϣⲁϫⲉ ⲉⲧ
ϭⲉ ⲡϣⲏⲣⲉ ⲙ̄
ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉⲧ
ϫⲏⲕ ⲉϭⲟⲗ.
ⲁⲩⲱ ⲉⲩⲧⲁϩⲟ̂
ⲉⲣⲁⲧ̄ϥ ⲙ̄ⲡϩⲱϭ
ϫⲉⲕⲁⲥ ⲉϥⲉ
ϫⲱⲕ ⲉϭⲟⲗ
ⲛ̄ϭⲓ ⲡⲉϥⲕⲁ(ⲧⲁ)
ⲥⲁⲣ̄ⲝ.
ⲉⲧⲓ ⲇⲉ ⲧ̄ⲡⲁⲡⲁ
ϑⲉⲙⲁⲧⲓⲍⲉ ⲛ̄
ⲡⲉⲧⲉ ⲛ̄ⲥⲉϩⲟ
ⲙⲟⲗⲟⲅⲉⲓ ⲁⲛ ⲛ̄
. . . .

1° *Frammento.*

ⲧⲉⲡⲓⲥⲧⲟⲗⲏ
ⲛ̄ⲧⲁⲥϣⲱⲡⲉ
ϩ̄ⲛ ⲛⲓⲕⲁⲓⲁ ⲉ
ϭⲟⲗϩⲓⲧⲟⲟⲧ̄ⲥ
ⲛ̄ⲧⲥⲩ(ⲛ)ϩⲟⲇⲟⲥ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁϭ
~ ~ ~ ~
ⲉⲡⲉⲓⲇⲏ ⲡⲉ
ⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲁⲩ
ϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ⲥⲉⲉⲓⲣⲉ ⲛ̄
ϩⲟⲩⲟ ⲉϣ̄ⲙ̄ⲧϣⲉ
ⲙ̄ⲡ̄ⲧϣ(ⲙⲏⲛ)
ϩ̄ⲛ ⲧⲉⲩ(ⲏⲡⲉ)
ⲛ̄ⲧⲉ(ⲣⲉ ⲡⲉⲥⲡⲏⲩ)
ϭⲱⲕ . . . .
. . . . .

2° *Frammento.*

ϩⲟⲙⲟⲓⲱⲥ ⲟⲩⲉ
ⲍⲏⲧⲏⲥⲓⲥ' ⲉⲁϥ
ⲧⲁⲩ(ⲟⲥ') ⲛ̄ϭⲓ ⲁⲡⲁ
ⲁϑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲥ ⲡⲁⲣ
ⲭⲓⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ
ⲛ̄ⲡⲁⲕⲟⲧⲉ' ⲉⲧϭⲉ
ⲡϩⲟⲩⲙⲓⲥⲉ ⲙ̄ⲡⲉ̄
ϫⲟⲉⲓⲥ ⲓ̄ⲥ̄ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄
ⲛ̄ⲥⲟⲩϫⲟⲩⲧⲯ̄ⲓⲥ
ⲛ̄ⲭⲟⲓⲁⲕ̄ϩ ~ ~
~ ~ ~ ~

Ⲁⲙⲏ(ⲉⲓ)ⲧ̄ⲛ ⲛ̄
ϣⲏⲣⲉ ⲛ̄
ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ
ⲡⲗⲁⲟⲥ ⲛⲧⲁϥ
ⲙ̄ⲡϣⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲓ̄
ϣⲙⲛ . . ϥϭ̄ⲛ̄
ⲧⲉⲓϭⲟⲧ̄ⲛ ϩⲉ
ϑⲡⲟⲥ . . .
ⲁϥⲛ . . . . .
ⲡⲉ . . . . .
. . . .

3° *Frammento.*

ⲡⲁⲙⲁϩⲧⲉ ϣⲁ
ⲛⲓⲉⲛⲉϩ ⲛ̄ⲉ
ⲛⲉϩ ϩⲁⲙⲏⲛ·
ⲧϭⲓⲛⲙⲓⲥⲉ' ⲙ̄
ⲡⲉⲛϫⲟⲉⲓⲥ ⲓ̅ⲥ̅
ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲛⲉⲩⲧⲉⲓ̈
ϩⲉ ⲧⲉ' ⲟⲩⲙⲓⲥⲉ
ⲡⲉ ⲛ̄ⲥⲟⲩϫⲟⲩⲧ
ⲯⲓⲥ ⲛ̄ⲭⲟⲓⲁⲕ̅ϩ̅
ⲙ̄ⲡⲛⲁⲩ ⲛ̄ϫ̅ⲛ̅
ⲥⲁϣϥⲉ' ⲛ̄ⲧⲉⲩ
ϣⲏ' ⲉⲁϥⲃⲁⲛ
ⲧⲓϩⲉ' ⲛ̄ϫⲛ ⲙⲏ
ⲧⲉ' ⲛ̄ⲧⲉⲩϣⲏ'
ⲛ̄ⲥⲟⲩⲙⲛⲧⲟⲩⲉ
ⲙ̄ⲡⲉⲃⲟⲧ' ⲛ̄ⲧⲱ
ⲃⲉ' ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ̅ϥ̅
ⲛ̄ⲓ̈ⲱϩⲁⲛⲛⲏⲥ
ⲡⲃⲁⲡⲧⲓⲥⲧⲏⲥ
ⲉⲁⲩⲧⲁϩⲟϥ ⲛ̄
ϭⲓ ⲛ̄ⲓ̈ⲟⲩⲇⲁⲓ̈ ⲛ̄
ⲥⲟⲩⲙⲏⲧ ⲙ̄ⲡⲉ
ⲃⲟⲧ' ⲡⲁⲣⲙⲟⲩ
ⲧⲉ ⲛ̄ⲧ. . . ⲉ'
. . . .

4° *Frammento.*

ⲧⲡⲏⲥⲧ(ⲉⲓⲁ ⲙ̅ⲛ̅) . . . .
ⲡⲧⲁⲗ(ϭ)ⲟ̂ ⲛⲛⲉⲩ . . .
. . . ⲉⲩⲟϣ . ⲱ . . .
. . . ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲧ . . .
(ⲙ̄ⲡ)ⲡⲁⲛⲧⲟⲕⲣⲁ(ⲧⲱⲣ) . . .
ⲧⲛⲩⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙ̅ⲛ̅ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ . .
(ⲭⲣⲏ) ⲙⲁ ⲉⲧⲙⲟⲩ̅ⲛ̅ ⲛ̄ϩⲉ ⲉⲣⲟϥ .
ⲱ̂ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙ̅ⲛ̅ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ
ⲧⲥⲁⲗⲡⲓⲅ̄ⲝ̄ ⲉⲧⲉ ϣⲁⲥⲙⲟⲩⲧⲉ
ⲛ̄ⲧⲉ ⲛⲉⲧⲙⲟⲟⲩⲧ ⲧⲱⲟⲩⲛ
ⲱ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙ̅ⲛ̅ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ
ⲛ̄ⲣⲉϥⲇⲓⲱⲕⲉⲓ̈ ⲛ̄ⲥⲁ ⲛⲉⲡ̅ⲛ̅ⲁ̅
ⲧⲏⲣⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲟⲛⲏⲣⲟⲛ ϩ̅ⲛ̅ ⲟⲩ
ⲡⲁⲣϩⲏⲥⲓⲁ ⲛ̄ⲑⲉ ⲉⲧⲉⲣⲉ ⲡⲥⲱ
ⲧⲏⲣ ⲧⲥⲁⲃⲟ ⲙ̄ⲙⲟⲛ ϩ̅ⲛ̅ ⲧϥ̄ⲥⲃⲱ̂
ϩ̅ⲙ̅ ⲡⲉⲩⲁⲅⲅⲉⲗⲓⲟⲛ ⲛ̄ⲑⲉ ⲛ̄ⲧⲁ
ⲡⲉϥⲙⲁⲑⲏⲧⲏⲥ ϫⲛⲟⲩϥ ⲉⲧⲃⲉ
ⲡⲇⲁⲓⲙⲟⲛⲓⲟⲛ ϫⲉ ⲉⲧⲃⲉ ⲟⲩ̄
ⲁⲛⲟⲛ ⲙ̄ⲡ̄ⲛ̄ⲉϣϭ̄ⲙ̄ϭⲟⲙ ⲉⲛⲟ

ϫϥ̅ ⲉⲃⲟⲗ . ⲁϥⲟⲩⲱϣ̅ⲃ̅ ⲛϭⲓ
ⲛⲥⲁϩ ⲙ̅ⲙⲉ ⲉϥⲧⲥⲁ(ⲃⲉ) ⲛ̅ⲛⲉϥ
ⲙⲁⲑⲏⲧⲏⲥ ϫⲉ ⲁϣ ⲛ̅ . . .
ⲉϣⲁⲩⲇⲓⲱⲕⲉⲓ̈ ⲛ̅ⲥⲁ ⲡⲓⲣⲉϥ
ϣⲁⲁⲣ ⲡⲉϫⲁϥ ϫⲉ ⲡⲉⲓⲅⲉⲛⲟⲥ
ⲙⲉⲧⲉϣⲛⲟϫ̅ϥ̅ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲓⲙⲏⲧⲓ
ϩⲙ̅ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲙⲛ̅ ⲧⲛⲏⲥⲧⲓⲁ . (*sic*)
ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙⲛ̅ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ϣⲁⲩ
ⲃⲟⲏⲑⲉⲓ̈ ⲉⲛⲉⲧϩⲛ̅ ⲙ̅ⲙⲉⲧⲁⲗ . . .

. . . ϩⲧ . . . . . ⲧ̅ⲛ̅
. . . ⲉⲥⲁⲁⲓ̈ϣ . . ⲱⲧⲛ̅
. . . . . ⲁⲩϣ . . ⲛ . . .
. . . . . ⲧ . . ⲁⲁ . . ⲟ . .
. . . ⲙⲁⲓ̈ ⲉⲧⲃⲉ . ⲉⲧ . .
(ⲛⲧⲁⲛ) ⲟⲩϫⲁⲓ̈ ⲙ̅ⲙⲟ . . . . ⲙ̅ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅
ⲡⲁⲓ̈ ⲛ̅ⲧⲁⲛⲛⲉϫ ⲡⲉⲛⲣⲟⲟⲩϣ
ⲧⲏⲣ̅ϥ̅ ⲉⲣⲟϥ . ⲛⲧⲱⲧⲛ̅ ⲇⲉ ⲱ̂
ⲛⲁϣⲏⲣⲉ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ . ϩⲁⲑⲏ ⲛ̅
ϩⲱⲃ ⲛⲓⲙ ϯϩⲱⲛ ⲉⲧⲟⲟⲧⲧⲏⲩⲧⲛ̅
ⲉⲧⲣⲉⲧⲉⲧⲛ̅ⲡⲱⲧ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲉ
ϣⲗⲏⲗ ⲙⲛ̅ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲁⲩⲱ ⲧⲛⲏ
ⲥⲧⲉⲓⲁ ⲛⲉⲓ̈ⲣⲉϥⲣⲟⲉⲓⲥ ⲉⲣⲟⲛ ϩⲙ̅
ⲙⲁ ⲛⲓⲙ ⲛ̅ⲧⲁⲛⲃⲱⲕ ⲉⲣⲟⲟⲩ . ⲁ
ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲙⲛ̅ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲣ̅ⲟⲩⲟⲉⲓⲛ
ⲉⲣⲟⲛ ϩⲛ̅ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲙ̅ⲡⲕⲁⲕⲉ
ⲁ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲟⲩⲱⲛ ⲛ̅ⲛ̅ⲣⲟ ⲙⲡⲉ
ϣⲧⲉⲕⲟ ⲁⲥⲛ̅ⲧⲛ̅ ⲉⲃⲟⲗ ⲉⲛⲟⲩⲟϫ'
ⲛ̅ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲙ̅ⲡⲇⲏⲙⲟⲥ ⲧⲏⲣ̅ϥ̅
ⲱ̂ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲙⲛ̅ ⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲡϩⲟ
ⲡⲗⲟⲛ ⲉⲛⲁⲩ ⲉⲧⲙⲟⲩⲧⲛ̅ ⲙ̅ⲙⲓϣⲉ
ⲙ̅ . . . ϩⲓⲧⲛ̅ ⲛⲉⲭⲣⲉⲓⲥⲧⲓⲁⲛⲟⲥ
ⲱ̂ (ⲡⲉϣⲗ)ⲏⲗ ⲙⲛ̅ . ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲛ̅
ϩⲁⲣ ⲛ̅ⲣⲉϥⲛⲟⲩϩⲙ̅

ⲛ̄ⲛⲉⲧⲏⲡ ⲉⲣⲟⲟⲩ . ⲱ̂ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ
ⲙ̄ⲛ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲛϩⲉⲛⲟⲩϥⲉ ⲛ̄
ⲛⲉⲧϩ̄ⲙ̄ ⲛϩⲉⲃⲱⲱⲛ . ⲱ
ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲙ̄ⲛ ⲡⲉϣⲗⲏⲗ ⲛⲉ ⲛ̄
ⲧⲁⲩⲣ̄ϩⲃⲥⲱ ⲛ̄(ⲛⲉ)ⲧⲕⲏⲕⲁϩⲏⲩ
ϩⲛ̄ ⲧⲙⲏⲧⲉ ⲙ̄ⲡϫⲁϥ' . ⲱ̂ ⲧⲛⲏ
. . . .

5° *Frammento.*

ⲙⲓⲭⲁⲏⲗ' ⲣ̄ ⲟⲩϩⲱⲃ ⲛ̄ⲧⲉ ⲡⲇⲓ(ⲁ)
ⲃⲟⲗⲟⲥ . ⲟⲩⲙⲟⲛⲟⲛ ⲡⲁï . ⲁⲗⲗⲁ
ⲛ̄ⲕⲉⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ⲧⲏⲣⲟⲩ ϣⲁϩⲣⲁï
ⲉⲡⲟⲟϩ ⲙ̄ⲛ ⲛ̄ⲥⲓⲟⲩ . ⲙ̄ⲛ ⲧⲉⲥⲧⲣⲁ
ⲧⲉⲓⲁ ⲧⲏⲣ̄ⲥ̄ . ⲥⲉⲟ̂ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲃ̄ⲗ̄ⲗⲉ ⲛ̄
ϭⲓ ⲡⲉⲡⲗⲁⲛⲟⲥ ⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲛ̄ⲑⲉ
ⲉⲧϥ̄ⲙⲟⲩⲟⲩⲧ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲛ̄ϭⲓ
ⲡⲥⲁⲧⲁⲛⲁⲥ . ϣⲁⲩϫⲓϩⲃ̄ⲣ̄ (?) ⲅⲁⲣ
ϩⲱⲥ ⲁⲅⲅⲉⲗⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲉ ⲡⲟⲩⲟⲉⲓⲛ
ϣⲁⲛⲧϥ̄ⲉⲝⲁⲡⲧⲁ ⲙ̄ⲡϩⲏⲧ ⲛ̄
ⲛⲓⲃⲁⲗϩⲏⲧ . ⲡⲉⲧⲉ ⲟⲩⲛ̄ⲧⲁⲩ
ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲙ̄ⲡⲉⲩϩⲏⲧ ⲉϥⲟ̂ ⲛ̄ⲱⲛⲉ
Ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁï ϭⲉ ⲡⲉⲧⲛⲁⲧⲟⲗⲙⲁ
ⲛϥϯ ⲙ̄ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲛ ⲡⲉⲥⲛⲟϥ
ⲙ̄ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲛ̄ⲟⲩⲙⲁⲅⲟⲥ ⲉϥⲣ̄ⲛⲟⲃⲉ
ⲉϥⲧ̄ⲛ̄ⲧⲱⲛ ⲅⲁⲣ ⲉïⲟⲩⲇⲁⲥ .
ⲡⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲅⲁⲣ ⲛ̄ⲧⲁϥⲣ̄ ⲡⲉⲛ
ⲧⲁϥⲁⲁϥ ⲁϥⲡⲁⲣⲁⲇⲓⲇⲟⲩ ⲙ̄
ⲡⲉⲛϫⲟⲉⲓⲥ ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲉⲧϭⲓϫ ⲛ̄ϩⲉⲛ
ⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲣⲉϥⲣ̄ⲛⲟⲃⲉ ⲛ̄ⲟⲩⲥⲟⲛ
ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲉⲣⲉϥⲉⲓⲙⲉ ⲉⲡⲉⲛⲧⲁϥ
ⲁⲁϥ ⲁϥⲕⲣⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲙⲟϥ ⲟⲩⲁⲁϥ
ϫⲉ ⲛ̄ϥⲙ̄ⲡϣⲁ' ⲁⲛ ⲙ̄ⲡⲱⲛ̄ϩ .
ⲁⲩⲱ ⲁϥⲟϭⲧϥ̄ ⲁϥⲙⲟⲩ . ⲡⲁï ⲇⲉ
ϩⲟⲟⲩ ⲉϩⲟⲩⲟ̂ ⲉⲡⲇⲁⲓⲙⲱⲛ' ⲉ

ⲧⲣⲉϥϫⲓ' ϩ̄ⲙ̄ ⲡⲥⲱⲙⲁ ⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ .
ⲛ̄ⲇⲁⲓⲙⲟⲛⲓⲟⲛ ⲅⲁⲣ ⲁⲩ(ⲥ////)
ⲡⲥⲱⲧⲏⲣ ⲁⲩⲱϣ ⲉⲃⲟⲗ(ϫ////)
. . ⲕⲡⲉ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲡⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛ̄ⲧⲉ
(ⲡⲛⲟⲩ)ⲧⲉ . ⲁⲩⲱ ⲛ̄ⲧⲉⲣⲉϥⲉ

ⲡⲓⲧⲓⲙⲁ ⲛⲁϥ ⲙ̄ⲡⲟⲩⲁⲛ . . .
ⲅⲉ ⲛⲁϥ . ⲡⲙⲁⲅⲟⲥ ⲇⲉ ⲁϥⲥⲟⲩ
ⲱⲛϥ ⲁϥϫⲓϣⲕⲁⲕ ⲉϩⲣⲁï ⲉⲩ
ⲇⲁⲓⲙⲟⲛⲓⲟⲛ ϫⲉ ⲥⲱⲧ̄ⲙ̄ ⲉⲣⲟï
ⲡⲁï ⲇⲉ ⲙ̄ⲙⲁⲧⲉ ⲁⲛ . ⲁⲗⲗⲁ ϣⲁϥ
ϭⲟⲟⲗⲉϥ ⲛ̄ⲟⲩϩ̄ⲃⲥⲱ ⲛ̄ⲥⲟⲟ////
ⲛ̄ϥⲡⲉⲓⲑⲉ ⲛ̄ⲛⲓⲃⲁⲗϩⲏⲧ' ϣⲁⲛ
ⲧⲟⲩⲣ̄ ⲛⲓⲃⲟⲧⲉ . ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁï ϥ(ϩⲟ)
ⲟⲩ ⲛ̄ϩⲟⲩⲟ̂ (ϫ)ⲉ ⲛ̄ϥⲙ̄ⲡϣⲁ ⲁⲛ
ⲛ̄ⲃⲱⲕ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲱⲛ̄ϩ̄ . ⲁⲩⲱ
ⲡⲉⲧⲃⲏⲕ ⲛ̄ϥⲕⲱ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ ⲁⲛ
ⲥⲙⲟⲩⲧ̄ⲛ̄ ϭⲉ ⲉϣⲁϫⲉ ⲙ̄ⲛ ⲟⲩ
ⲣⲉϥϣⲙ̄ϣⲉ ⲉⲓⲇⲱⲗⲟⲛ ⲉϩⲟⲩⲟ
ⲉϣⲁϫⲉ ⲙ̄ⲛ ⲟⲩⲙⲁⲅⲟⲥ . ⲡⲁï
ⲅⲁⲣ ⲉϥϣⲁⲛⲙ̄ⲡϣⲁ ⲛ̄ⲟⲩⲇⲱⲣⲉⲁ
ⲟⲩ ⲛ̄ . . . . ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ⲣⲱ
ϣⲉ ⲉⲣⲟϥ ⲉⲡⲉϥⲟⲩϫⲁï . ⲡⲙⲁ
ⲅⲟⲥ ⲇⲉ ⲕⲁⲛ ⲉϥϣⲁⲛⲕⲧⲟϥ
ⲙⲟⲅⲓⲥ ⲛ̄ⲧⲁⲛϩⲟⲩⲧ̄ϥ ⲉⲡⲙⲩ
ⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ϩ̄ⲛ ⲧⲙⲉϩ'ⲙⲁⲁⲃ ⲛ̄
ⲣⲱⲙⲉ . ⲟⲩⲉⲓⲟⲛⲉ ⲉⲧⲙⲟⲥ
ⲧⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϩⲓⲧ̄ⲙ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙ̄ⲛ
ⲛ̄ⲣⲱⲙⲉ ⲙ̄ⲛ̄ⲣ̄ⲕⲟⲓⲛⲱⲛⲉⲓ'
ⲉⲣⲟⲥ . ⲁⲩⲱ ⲙ̄ⲛ̄ⲣ̄ϯⲉⲃⲟⲗϩ̄ⲙ̄
ⲡⲙⲩⲥⲧⲏⲣⲓⲟⲛ ⲛ̄ⲗⲁⲁⲩ ⲉⲓⲙ(.)
(. .) ϩ̄ⲛ ⲟⲩⲙ̄ⲛⲧⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ
(ⲧⲙⲛ)ⲧⲁⲧⲥⲟⲟⲩⲛ ⲅⲁⲣ ⲟⲩⲛ̄
ⲧⲁⲥ ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲛ̄ⲟⲩⲕⲱ ⲉⲃⲟⲗ

ⲡⲉⲧⲉⲓⲣⲉ ϫⲉ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲥⲟⲟⲩ(ⲛ)
(ϣⲁⲩ)ϫⲓⲕⲃⲁ ⲙ̄ⲙⲟϥ . ⲧⲙ . .
. . . .

6° *Frammento.*

(. . . . . .)ⲉⲧⲉⲕⲧⲓⲥⲓⲥ ⲧⲏⲣⲥ̄
(. . . . .)ϩⲛ̄ ⲟⲩⲛⲟϭ ⲛ̄ⲏⲥⲩⲭⲓ(ⲁ)
(. . . . . . ⲉⲩ)ⲫⲣⲟⲥⲩⲛⲏ ⲉⲥⲟϣ
(. . . ⲟⲩⲟⲉⲓ)ϣ ⲅⲁⲣ ⲙ̄ⲡⲉϣⲧⲉ
(ⲕⲟ ⲉⲧ)ⲉⲓⲛⲉ . ⲁ ⲧⲗⲩⲡⲏ ⲡⲱⲧ
(. . .)ⲁϣⲁϩⲟⲙ . ⲁ ⲡⲉⲧⲕ(ⲁⲥ)
ⲛ̄ⲛ̄ⲡⲁⲗⲁⲕⲉ ⲟⲩⲱⲥϥ̄ . ⲁ ⲡⲉ
ϣⲧⲟⲣⲧⲣ̄ ⲛ̄ⲛ̄ϩⲟⲉⲓⲙ ⲛ̄ⲑⲁⲗⲁⲥⲥⲁ
ⲡⲁⲣⲁⲅⲉ . ⲁ ⲡⲉϫⲏⲩ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲙⲟⲟⲛⲉ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲡⲗⲓⲙⲏⲛ
ⲙ̄ⲡⲉⲩϫⲁⲓ . ⲁ ⲛ̄ϣⲟⲟⲥ ⲛ̄ϥⲁⲓ̈
ⲣⲟⲟⲩϣʼ ⲥⲱⲟⲩϩ ⲛ̄ⲛⲉⲥⲟⲟⲩ ⲉ
ϩⲟⲩⲛ ⲉⲧⲉⲩϣⲁⲓⲣⲉ ⲉⲧⲟⲣϫ
ⲁⲩⲡⲱⲧ ⲛ̄ⲥⲁ ⲛⲉⲑⲏⲣⲓⲟⲛ ⲉⲧ
ϩⲟⲟⲩ ⲁⲩⲛⲟϫⲟⲩ ⲉⲃⲟⲗ . ⲁ ⲛ̄
ϫⲁⲩϥ(ⲉ ⲛ̄)ⲣⲉϥⲛⲉϫⲙⲁⲧⲟⲩ ⲁ
ⲡⲁⲭⲱ(ⲣⲉ)ⲓ ⲉⲛⲉⲩⲃⲏⲃⲉ ⲉⲧⲙⲉϩ ⲙ̄
ⲡⲁϩⲥ̄(. . ⲛ . . . ϭⲉ) ⲛ̄ⲧⲁⲛⲟ
ⲙⲓⲁ ϩ(ⲱ)ⲛ ⲙⲛ̄ ⲛⲉⲩϣⲛⲏⲩ
(. . . . .)ⲏʼ ⲛ̄ⲧⲁⲛⲟⲙⲓⲁ ⲣⲱⲕϩ̄
ⲙⲛ̄ ⲛⲉⲧⲉⲛⲧⲏⲛϭ ⲉⲑⲟⲟⲩ . ⲁ ⲛ̄
ⲟⲩⲱⲛϣ̄ ⲛ̄ⲣⲉϥⲛⲉϩⲯⲩⲭⲏ ϩⲱⲡ
ϩⲛ̄ ⲛⲉⲩⲙⲁⲛ̄ⲕⲁⲕⲉ . ⲁ ⲛ̄ⲃⲁⲣⲃⲁ
ⲣⲟⲥ ϣⲧⲟⲣⲧⲣ̄ ⲁⲩⲡⲱⲧ ϩⲓⲧⲙ̄
ⲡⲣ̄ⲣⲟ ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ . ⲁ ⲛⲉϣⲁⲧⲉ ⲛ̄ⲗⲟⲓ
ⲙⲟⲥ ⲧⲁⲕⲟ ⲙⲛ̄ ⲛⲉⲩⲁⲅⲅⲓⲟⲛ
ⲉⲧⲙⲉϩ ⲙ̄ⲙⲁⲧⲟⲩ ϩⲓⲧⲙ̄ ⲡⲉ

†

ⲉⲃⲥⲁϩⲉⲙ̄ⲡⲉⲭ̄ⲥ̄ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉⲛ̄
ⲧⲁϥⲧⲟϭϥⲉⲓ ⲟⲩϫⲓⲛⲧⲉϥⲙⲛ̄ⲧ
ⲕⲟⲩⲓ̈ … ⲡⲁⲓ̈ⲡⲉⲟⲟⲩ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩ
ⲧⲉⲉⲃⲟⲗ· ⲧⲱⲟⲧϥ̄ ϣⲁⲉⲛⲉϩ
ⲛ̄ⲉⲛⲉϩ ϩⲁⲙⲏⲛ:

ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲩ ⲗⲟⲅⲟⲩ:

ⲁⲁⲃ

ⲛⲉⲅⲛⲱⲙⲏ ⲛ̄ⲧⲥⲩⲛϩⲟⲇⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩ

ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲡⲉⲓⲱⲧ ⲟⲩⲁⲅⲁⲑⲟⲥ ⲡⲉ
ⲡⲉⲭⲥ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲡⲉ . ⲁⲩⲱ
ⲡⲛ̄ⲟⲩⲧⲉ ⲟⲩⲁⲅⲁⲑⲟⲥ ⲡⲉ· ⲡⲉ
ⲡⲛ̄ⲁ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ· ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲙⲛ̄
ⲧϥϩⲟⲩⲉⲓⲧⲉ· ⲟⲩⲧⲉ ⲙⲛ̄ ϩⲁⲏ
ϣⲟⲟⲡ ⲛ̄ⲧⲙⲛⲧⲛⲟⲩⲧⲉ· ⲛ̄
ⲧⲟϥ ⲅⲁⲣ ⲡⲉ ⲧⲁⲣⲭⲏ· ⲁⲩⲱ ⲡϫⲱⲕ
ⲙ̄ⲡⲧⲏⲣϥ ⲙⲛ̄ⲕⲧⲓ

Torino Lit. F.lli Doyen.

ⲁⲣⲓⲕⲉ ⲉⲡϩⲏⲕⲉ ϫⲉ ⲙ̄ⲡϥϣⲱ
ⲡⲉⲛ̄ⲛⲁⲏⲧ. ⲉⲓⲉ ⲟⲩⲡⲉⲧⲛⲁ
ϣⲱⲡⲉ ⲙ̄ⲡⲣⲙ̄ⲙⲁⲟ ⲉϥⲕⲁ
ⲛⲟⲩⲃ ⲉϫⲛ ⲛⲟⲩⲃ ϣⲁⲛⲧϥⲣ̄
ϣⲏⲃⲉ. ⲁⲩⲱ ⲛ̄ϥⲙⲟⲩϩ ⲛ̄ⲥⲛ
ⲧⲏⲏⲃⲉ ⲛ̄ϩⲟⲓⲧⲉ ϣⲁⲛⲧⲟⲩⲣ̄
ϩⲟⲗⲟⲗⲉ ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁⲓ ⲱ ⲛⲁⲙⲉⲣⲁ
ⲧⲉ ⲉⲱⲥⲉ ⲁⲛ ⲉⲓⲙⲉ ϫⲉ ⲉⲣⲉ ⲡⲟⲩ
ⲱϣ ⲙ̄ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ϩⲙ̄ ⲡⲛⲁ. ⲙⲁ
ⲣⲛ̄ⲙⲉⲣⲉ ⲡⲛⲁ. ⲡⲛⲁ ⲧⲉ ϫⲁϥ
ϣⲁϥϣⲟⲩϣⲟⲩ ⲙ̄ⲙⲟϥ ϫⲉ ⲁⲛ̄
ⲧⲉⲕⲣⲓⲥⲓⲥ. ⲛⲁⲉⲓⲁⲧⲟⲩ ⲅⲁⲣ ⲡⲉ
ϫⲁϥ ⲛ̄ⲛ̄ⲛⲁⲏⲧ ϫⲉ ⲛ̄ⲧⲟⲟⲩ ⲛⲉ
ⲧⲟⲩⲛⲁⲛⲁ ⲛⲁⲩ. ⲡϫⲟⲉⲓⲥ ⲓⲥ
ϫⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲥ ϫⲉ ϣⲱⲡⲉ ⲛ̄ϣⲁ
ϩⲧⲏϥ ϫⲉ ⲟⲩϣⲁⲛ̄ϩⲧⲏϥ ⲡⲉ
ⲡⲉⲧⲛ̄ⲉⲓⲱⲧ. ⲙ̄ⲡⲣ̄ⲕⲣⲓⲛⲉ
ϫⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲩⲕⲣⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲙⲱⲧⲛ̄. ⲙ̄
ⲡⲣ̄ ⲧϭⲁⲉⲓⲟ ϫⲉ ⲛ̄ⲛⲉⲩⲧϭⲁⲓⲉ
ⲧⲏⲩⲧⲛ̄. ⲕⲱ ⲉⲃⲟⲗ ⲧⲁⲣⲟⲩⲕⲱ
ⲛⲏⲧⲛ̄ ⲉⲃⲟⲗ. ϯ ⲧⲁⲣⲟⲩϯ ⲛⲏⲧⲛ̄
ⲟⲩϣⲓ ⲉⲛⲁⲛⲟⲩϥ ⲉϥ ⲅⲉϭⲧⲱϭ
ⲉϥⲛⲉϩⲛⲟⲩϩⲉ ⲉϥⲡⲉⲛⲉ ⲉⲃⲟⲗ
ⲥⲉⲛⲁⲧⲁⲁϥ ⲉⲕⲟⲩⲛ ⲧⲏⲩⲧⲛ
ϩⲙ̄ ⲡϣⲓ ⲅⲁⲣ ⲉⲧⲉⲧⲛⲁϣⲓ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ⲉⲩⲛⲁϣⲓ ⲛⲏⲧⲛ̄ ⲙ̄ⲙⲟϥ
ⲡⲁⲓ ⲡⲉ ⲡⲟⲟⲩ ⲛⲁⲩ ⲙⲛ̄ⲧ . . . ⲧⲉ
ϣⲁ ⲉⲛⲉϩ ⲛ̄ⲉⲛⲉϩ ϩⲁ . . .

Torino Lit. F.lli Doyen

ⲡⲉⲕ· ⲧⲁϩⲉ
ⲉ ⲏϩϩⲛ̄
ⲛⲉⲅⲣⲁ ⲏ
ⲙ̄ⲛⲟⲩⲟⲉⲓϣ
ⲣϣⲟⲟⲡ
ⲛ̄ϥϣⲟⲟⲡⲁ̄
ⲛ̄ϭⲓⲡϣⲏⲣⲉ'
ⲁⲗⲗⲁⲛ̄ⲟ
ⲉⲓϣⲙⲓⲙⲟⲩ
ⲉⲓⲱⲧ ⲡⲉⲉⲩ
ⲛⲧⲉϥⲙ̄ⲙⲁⲩ
ⲙ̄ⲡⲉϥϣⲏⲣⲉ
ⲁⲱ ϣⲏⲓⲉ
ⲛ̄ⲧⲉϥⲙ
ⲙⲁⲩ ⲙ̄ⲡⲉϥ
ⲉⲓⲱⲧ
Ⲟⲩⲁⲧϭⲟⲙ ⲅⲁⲣ
ⲡⲉⲡⲉⲓⲱⲧ
ⲉϥϣⲟⲟⲡ ⲉϫⲛ̄
ϣⲏⲣⲉ ⲛ̄ⲟⲩ
ⲟⲩⲟⲉⲓϣ·
ⲉⲡϩⲁⲉ ⲇⲉ ⲛ̄
ⲥⲉⲙⲟⲩⲧⲉ
ⲉⲣⲟϥ ϫⲉ ⲧⲉ
ϩⲱⲥ ⲕⲗ

ⲧⲁⲡⲣⲟⲕⲟⲡⲏ·
ⲁⲗⲗⲁϥϣⲟⲟⲡ ⲛ̄
ϭⲓⲡⲉⲓⲱⲧ ⲛ̄ⲉⲓ
ⲱⲧ ⲛ̄ⲟⲩⲟⲉⲓϣ
ⲛⲓⲙ ⲕⲁⲧⲁⲑⲉ
ⲛⲧⲁⲛϣⲣ̄ⲡ
ϫⲟⲟⲥ· ⲛ̄ⲟⲩ
ϣⲃⲏⲣ ⲅⲁⲣ ⲁⲛ
ⲡⲉ· ⲁⲙⲁⲛⲧⲉ
ⲣⲟⲩϫⲡⲟϥ ⲛⲉϥ
ⲙ̄ⲛ̄ ⲡⲉϥⲉⲓⲱⲧ
ⲕⲁⲧⲁⲑⲉ ⲛ̄
ⲧⲁⲓ ⲓϣⲣ̄ⲡ ⲥϩⲁⲓ'
ⲁⲩⲱ ⲛⲁⲓⲙⲉⲛ
ⲉⲛϫⲱ ⲙ̄ⲙⲟ
ⲟⲩ ⲉⲧⲃⲉⲡⲉⲓ
ⲱⲧ ⲙⲛ̄ ⲡϣⲏ
ⲣⲉ· ⲉⲧⲃⲉⲡⲓ
ⲛ̄ⲁⲇⲉ ⲛ̄ϩⲁ
ⲅⲓⲟⲛ· ⲧⲁⲓ
ⲧⲉⲑⲉ ⲉⲧⲙ̄ⲡⲓⲥ
ⲧⲉⲩⲉϫⲉⲟⲩ
ⲡⲛ̄ⲁ ⲓⲧⲉ
ⲡⲛ̄ⲁ ⲉⲧⲉⲡⲉ
ⲟⲩⲡ̄ⲛ̄ⲁ ⲛ̄ϩⲁ

ϩⲗⲟϭ ⲙ̄ⲛ . . . .
ⲉϥⲧⲱⲛ ⲧⲉⲛⲟⲩ . . . . . .
ϫⲓ ⲟⲩ . . ⲁⲩⲱ ⲡϫ . . . .
ⲉϥⲧⲱ . . ⲁⲧ ⲧⲁ . . . . .
ⲛ̄ⲟⲩ . . . ⲱϫⲛ̄ . . . . . .
ⲁϥ ⲥⲣ . . . . . ⲁϥⲛⲱ . . . .
ϩⲙ̄ϩⲁⲗ ⲛ̄ⲣⲉϥϩⲉ . . . .
ⲧⲉⲕⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ϩⲱⲱⲥ ⲙ . . . . .
ⲁⲥⲥⲧⲉⲫⲁⲛⲟⲩ . ⲁ ⲡ̄ⲉ(ⲡⲓⲥⲕⲟ)
ⲡⲟⲥ ⲣ̄ϣⲁ . ⲁ ⲛⲉⲡⲣⲉⲥ(ⲃⲩ)ⲧⲉⲣⲟⲥ
ⲣⲁϣⲉ . ⲁ ⲛ̄ⲇⲓⲁⲕⲟⲛⲟⲥ ⲡⲁⲣ
ϩⲏⲥⲓⲁⲍⲉ ⲙ̄ⲙⲟⲟⲩ . ⲁ ⲙⲡⲁⲣ
ⲑⲉⲛⲟⲥ ϫⲱ ⲛ̄ⲛⲉⲩϩⲩⲙⲛⲟⲥ
ⲁ ⲙ̄ⲙⲟⲛⲁⲭⲟⲥ ϫⲱ ⲛ̄ⲛⲉⲩⲯⲁⲗ
ⲙⲟⲥ . ⲁ ⲛ̄ϩⲗ̄ⲗⲟ ⲥⲱⲟⲩϩ ⲉϩⲟⲩⲛ
ⲉⲡⲉⲩⲛϩⲉⲇⲣⲓⲟⲛ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲁⲩϫⲱ ⲛ̄ⲛ̄ⲱⲇⲏ ⲙ̄ⲡⲛ̄ⲓ̄ⲕⲟ̄ⲛ̄
ⲁ ⲧⲟⲩⲗⲗⲉ ⲥⲱⲕ' ϩⲙ̄ ⲡⲏⲓ̈ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ
ⲁ ⲧⲛⲏⲥⲧⲉⲓⲁ ⲣ̄ⲙⲁⲁⲩ ⲛ̄ⲧⲉⲕ
ⲕⲗⲏⲥⲓⲁ ⲁⲥⲭⲟⲣⲉⲧⲉ(. .)ⲉ ⲛⲉⲥ
ϣⲏⲣⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲥⲕⲱⲧ(ⲉ .) †
ⲥϩⲁⲓ̈ ϭⲉ ϣⲁⲣⲱⲧⲛ̄ ⲡ(ⲁ)ϣⲏⲣⲉ
ⲙ̄ⲛ ⲡⲁϣⲉⲉⲣⲉ ⲙ̄ⲙⲉ(ⲣⲓ)ⲧ' . †
ⲣⲁϣⲉ ϩⲙ̄ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ · ⲁⲩⲱ †ⲣⲟ
ⲟⲩⲧ' ϩⲙ̄ ⲡⲁⲡⲛ̄ⲁ . †ⲁⲥⲡⲁⲍⲉ
ⲙ̄ⲙⲱⲧⲛ̄ ⲧⲏⲣⲧⲛ̄ ϩⲛ̄ ⲟⲩⲁⲥⲡⲁ
ⲥⲙⲟⲥ ⲛ̄ⲁⲧⲱϫⲛ̄ ⲉϥⲙⲉϩ ⲛ̄
ⲉⲓⲣⲏⲛⲏ . ⲡⲉⲥⲛⲏⲩ ⲧⲏⲣⲟⲩ
ⲉⲧⲙ̄ⲙⲁⲓ̈ ϣⲓⲛⲉ ⲉⲣⲱⲧⲛ̄
ϩⲙ̄ ⲡϫⲟⲉⲓⲥ . ⲡⲉⲭⲟⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲛ̄
ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲛ̄
. . . .

7° Frammento (diritto).

ⲥⲱⲧⲙ̅ ⲇⲉ ⲡⲓϣⲁϫⲉ ⲁϥⲱ . . .
ⲁⲩⲱ ⲡⲉϫⲁϥ ⲛⲁⲩ ϫⲉ ⲛ̅ⲧ . . .
ⲧ̅ⲛϭⲓⲛⲉ ⲧⲱⲛ ⲙ̅ⲡⲁⲣⲭⲓⲉⲡⲓ
ⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲛ̅ⲧⲉⲭⲱⲣⲁ ⲧⲏⲣ̅ⲥ̅
ⲁⲩⲧⲁⲙⲟϥ ⲉⲧⲗⲟⲓϭⲉ . ⲁϥⲁⲓ
ⲥⲑⲁⲛⲉ . ⲛ̅ⲧⲟⲟⲩ ϩⲱⲟⲩ ⲁⲩ
ⲥⲱⲧⲙ̅ ϫⲉ ⲡⲣ̅ⲣⲟ ⲇⲓⲱⲕⲉⲓ ⲛ̅(. . .)
ⲉⲧⲃⲉ ⲛ̅ⲁⲣⲓⲁⲛⲟⲥ . ⲛ̅ⲧⲉⲩⲛⲟⲩ
ⲁϥⲡⲱⲧ ⲉϩⲟⲩⲛ ⲉⲣⲟϥ ⲁϥⲡⲁϩ
////)ϩⲁⲛ(. .)ⲟⲩⲉⲣⲏⲧ ⲛ̅ ⲁϥϩⲱ
ⲗ)ϭ ⲉⲣⲟï . ⲁⲛⲟⲕ ⲇⲉ ⲁïⲧⲟⲩⲛⲟⲥϥ̅
(ⲁï)ⲁⲥⲡⲁⲍⲉ ⲙ̅ⲙⲟϥ . ⲉⲛϩⲟ
//// ⲡⲉϥϣⲁϫⲉ ⲛ̅ⲙ̅ⲙⲁï ⲁⲩⲱ . .
. . . . . . ⲉⲉⲓ ϩⲓⲧⲉϩⲓⲏ ⲉⲣ . . .
. . . .

(Rovescio)

ϩⲁⲧⲉⲕϩⲏ ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ(ⲓⲙ) ⲛⲁⲩ .
ⲉⲧϭ̅ⲙ̅ϭⲟⲙ ϩ̅ⲛ̅ ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ·
ⲛ̅ⲧⲉ ⲡⲉⲭ̅ⲥ̅ ⲭⲁⲣⲓⲍⲉ ⲛⲁⲕ ⲛ̅
ⲧⲉϥⲉⲓⲣⲏⲛⲏ ⲛ̅ⲥⲁ ⲥⲁ ⲛⲓⲙ ⲱ
ⲡⲁⲑⲗⲏⲧⲏⲥ ⲛ̅ⲧⲉ ⲧⲙⲉ
ⲉϥϫⲱ ⲇⲉ ⲛ̅ⲛⲁï ⲛ̅ϭⲓ ⲡⲣⲱⲙⲉ
ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ϩⲱⲥ ⲉⲓⲛⲁⲩ ⲉⲡⲉⲭ̅ⲥ̅
ⲉϥϣⲁϫⲉ ⲉⲃⲟⲗϩ̅ⲛ̅ ⲧⲉϥⲧⲁⲡⲣⲟ
ⲙ̅ⲛ̅ⲛⲥⲱⲥ ⲁϥϫⲓⲧ ⲉϩⲟⲩⲛ ////
ⲙ̅ⲡⲉϥⲣⲁⲥⲧⲉ ⲁϥϫⲟⲟⲩ ⲛ̅ⲛ̅ ////
ⲥⲛⲏⲩ ⲛ̅ⲕⲗⲏⲣⲓⲕⲟⲥ ⲉⲧⲣⲉ ////
ⲃⲱⲕ ϣⲁ ⲅⲉⲛⲛⲁⲇⲓⲟⲥ //// ////
ⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ . ⲁï //// //// ////
. . . .

TRADUZIONE DEI TESTI COPTI

Il primo di questi testi ci ha conservato, come già notammo, alcuni episodii della vita di Sant' Atanasio, il cui racconto, a giudicare dalle parole ⲁⲑⲁⲛⲁⲥⲓⲟⲩ ⲗⲟⲅⲟⲩ poste in fine del testo, lo scriba copto ritrarrebbe da un sermone di questo illustre padre della Chiesa.

Ora di questo sermone noi non possediamo più che due brani, dei quali do qui la traduzione, per quanto è possibile, letterale (1).

Mancano le sedici prime pagine del manoscritto; la diciasettesima, la prima della mia trascrizione, così comincia:

... (Giacobbe) pregò, e Dio lo salvò dalla mano di Esau, suo fratello; Giuseppe pregò, e Dio lo liberò dall'Egiziana; Giosuè di Nave (Nun) pregò, e fece che il sole si arrestasse nel mezzo del cielo; Gedeone pregò e vinse i Madianiti; Sansone pregò e fece dalla mascella d'asino scaturire acqua a calmare la sua sete (2); Anna pregò e Dio le donò Samuele (3); Davide pregò e lenì la contrizione del popolo (4); Salomone pregò, e Dio gli diede la saggezza e la prudenza; Elia pregò e chiuse il cielo tre anni e sei mesi (5); Eliseo pregò e risuscitò tosto i morti (6); furono concessi altri quindici anni (di vita) ad Ezechia per la preghiera (7); pregarono i tre santi e Dio mandò loro il suo angelo e li soccorse; Giobbe nel letamaio fece orazione al Signore, e Dio lo soccorse, e lo sanò de' suoi mali; Daniele nella fossa dei leoni (pag. ɪɪ) pregò e Dio chiuse la loro bocca; Gesù Cristo pregò ed insegnò pure a' suoi discepoli a pregare. Pietro pregò e risuscitò Tabita, Cornelio pregò e Dio inviò a lui Pietro, che gli diede il battesimo; Paolo pregò e risuscitò il morto Eutico (8). Io pure, padre vostro, Atanasio venni in molte tribolazioni molte volte a causa degli Ariani, ma confidai in Dio e lo pregai, ed egli mi soccorse in tutti i miei travagli; e con me gli altri vescovi coi quali fui mandato in esiglio nella penisola di *Ôrbatos* (9); là abi-

---

(1) Nella mia traduzione ho notato con questo segno (?) quei passi in cui, o per inesattezze o per lacune nel testo, non sono ben certo d'avere afferrato il pensiero dell'autore copto.

(2) I Giudici, XV, 18, 19.

(3) I Re, I, 20.

(4) II Re, XXIV, 17.

(5) III Re, XVII, 1.

(6) IV Re, IV, 35.

(7) Ivi, XX, 6.

(8) Atti degli Apostoli, XX, 9.

(9) ⲟⲩⲣⲃⲁⲧⲟⲥ si potrebbe considerare come traduzione di *Urbate*, oggi Gradiska, che nell'*Itinerario di Antonino* è posta sulla via tra Sirmio e Salone, se l'autore copto non l'avesse designata coll'epiteto ⲛⲏⲥⲟⲥ (isola o penisola). Due antiche città in Egitto, che nella forma dei loro nomi si accostano a questo sono Arbat e Pharbait o Pharbaetus, entrambe nel Delta, e poste dallo Champollion (*l'Égypte sous les Pharaons*) la prima sul ramo canopico del Nilo e la seconda sul ramo pelusiaco.

tavano uomini d'indole molto malvagia, e l'aria (pag. III) era ivi molesta molto e fredda; noi passammo in quel luogo due anni e tre mesi. Nel principio che vi ci avevano rilegati, noi fummo molestati, per alcuni giorni, da grave fetore (1), che è terribile a dirsi. Quegli che disse: « giudica me, ed io renderò il contraccambio, » è Quegli in cui ponemmo tutta la nostra sollecitudine. Dopo quattro mesi che eravamo in quella oppressione, noi stendemmo simultaneamente le nostre mani al Signore, a Colui che ha cura di tutti gli uomini che sperano in lui; noi pregammo con tutto il nostro cuore nelle afflizioni e nelle lacrime. Tosto ascoltò noi Quegli che disse: « tu parli ancora, egli dirà: ecco io sono ivi (2). »

Noi eravamo in una oscura spelonca, ove non avea modo di vedere l'un l'altro affatto (p. IV) e non si sentiva che la voce di ciascuno di noi che pregavamo Cristo nella nostra orazione, perchè ci aiutasse e si ricordasse di noi nella terra della nostra umiliazione; poichè i fratelli vescovi furono molto oppressi da quel fetore ed oscurità. Imperocchè quella spelonca era profonda nella terra, e chiusa da molte barre, ove ci gettavano ogni giorno all'ora in cui il sole tramontava. I soldati ci guardavano tutto attorno. Non avendo quindi alcuna speranza di vita ci rivolgiamo a Dio, che salva coloro che sperano in lui; epperò a lui erano stese le nostre mani; stando i nostri cuori appesi a Dio, benediciamo, inneggiamo a Cristo con canti spirituali, ciascuno di noi vegliando, ed a vicenda ci consoliamo nelle parole della Scrittura e con quelle dell'Evangelio (p. V), consumiamo nella parola di Dio l'intera notte; la parola di Dio è dolce alla nostra bocca più che miele e cera, noi ci rifacciamo sulla costituzione dei nostri Padri santi, noi sopratutto ricordiamo le parole piene di dolcezza, e le grandi meditazioni del beato Antonio, il portatore di Cristo, e del beato Pacommio, l'uomo dei Profeti, che dimora nell'Egitto australe; esse ci commovono come un musico, che tocca le corde della sua chitarra. Queste adunque sono le nostre consolazioni, e noi ci rallegriamo vicendevolmente nel luogo in cui siamo chiusi. Nel mezzo della notte sorgemmo in piedi tutti insieme, una gran luce si fece in mezzo alle tenebre in cui eravamo avvolti. Allora si compì sopra di noi la Scrittura: a quelli che seggono nelle tenebre e nelle ombre di morte la luce splendette.

Il luogo tutto poi essendo splendente più che la luce del giorno, noi guardammo e tutti subito (p. VI) vedemmo ritto in mezzo a noi il Signore. Egli stese la sua mano santa sopra di noi e ci disse: Pace a voi tutti, la mia pace, che è mia, io la dono a voi; pace a voi, miei pastori fedeli, che guidate le mie pecore nella retta via; pace a voi, miei pescatori d'uomini, che gettate le vostre reti e prendete le anime; pace a voi, miei medici, che sanate coi vostri medicamenti, che curate l'umanità, acciocchè non si putrefaccia nel peccato; pace a voi, miei predicatori santi, che avete confessato il mio nome sulla terra tutta; pace a voi, o miei martiri atleti, che avete testimoniato molte volte in faccia al re della terra contro gli Ariani. Ecco

---

(1) La radice ⲁϭϭⲉⲥ, che non trovasi nel dizionario del Peyron, è data dal Parthey come parola sahidica col significato di *odore*, onde la traduzione letterale della nostra frase ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲃⲁⲣⲟⲥ ⲛ̄ⲧⲁϭϭⲉⲥ a causa del grave odore.

(2) Isaia, LXV, 24.

io vi ho sciolto dai vostri travagli tutti, che avete patito per colpa degli Ariani. Questo povero disgraziato, che impugna l'essenza della divinità . . . .

Dopo una lacuna di due pagine prosegue il testo (p. VII, lin 2).

Allora il re fece prendere quel malvagio co' suoi compagni e lo consegnò nelle nostre mani. Essendosi accostato ad Atanasio disse: abbia quaranta giorni a pentirsi e confessare la fede ortodossa dei vescovi, che io esigliai per causa sua, ed i canoni della fede santa, che fu proclamata nella città di Nicea, essendo il mio padre Costantino in quel luogo, e avendola sottoscritta anche il vescovo Atanasio, che era notario (1), in quel tempo, del beato Alessandro vescovo. Non confessando le cose, che gli ha insegnato Atanasio, o sia bruciato vivo con tutti quelli che lo ascoltano, o sia mandato al luogo, in cui furono confinati i santi vescovi per causa sua. Io pure, Costanzio, riprovo la sua fede malvagia, e riprovato sia innanzi a Dio, (p. VIII) ed agli uomini quegli che dice colla sua lingua, degna di essere tagliata, colla sua bocca, degna di essere otturata, che una creatura è il figlio di Dio.

Io poi confesso la Triade Santa, inseparabile, perchè è un Dio solo, un Signore solo, un' essenza sola, senza alcuna separazione della divinità, che non genera mutazione, non genera divisione, non produce perdita; Dio vero di Dio vero, luce vera di luce vera, vita vera di vita vera, sapienza vera di sapienza santa, l'onnipotente, che comprende il mondo intero; e confesso lo Spirito Santo, informante l'universo. I tre sono uno, una triade unica di essenza. Io confesso queste cose innanzi a Dio ed agli uomini nel modo, che ha pure confessato il padre mio beato, finchè si congiunse a Dio, e nel modo (p. IX) che le ha insegnate a me Atanasio, quello delle buone dottrine, l'arcivescovo di Alessandria (2) . . . .

Questi poi sono i nomi dei vescovi santi ortodossi nella fede santa:

Atanasio in Alessandria, Liberio in Roma, Dionisio nell'Africa (?), Eusebio in Ponto, Sarapione in Thmoui, Macario in Tkoou, Eustachio in Joppe, Eulogio in Tafne, Giovanni in Efeso, Marco nell'Asia, Paolo in Gerico, Nestorio in Menfi, Silvano in Tanis (p. X), Eutrepio in Rodi, Geremia in Sion, Dragonzio in Poubaste, Timoteo in Leonto, Matteo nella Cilicia, Pietro in Corinto.

Questi adunque avendo ricevuto Ario dal re, lo condussero nel mezzo del Sinedrio fra i vescovi santi, e ragionarono dei canoni della fede santa con lui, e con quelli che erano con lui. Ma essi non poterono scacciare il loro veleno di serpe, che s'era insinuato nella loro anima, per cui tanti si perdettero.

Il Dio dell' universo, l'onnipotente, strappò di mezzo ai denti velenosi di Ario, questo bestemmiatore di Cristo, il re, amante di Cristo, che confessò la fede dei suoi

---

(1) Gli scribi dei vescovi scelti per lo più nell' ordine dei chierici, portavano il titolo di *notario* e quando i vescovi avevano più notari, il primo di essi chiamavasi *cancellario* od anche *archi cancellario* (Ducange, *Glossarium ad scriptores mediae et infimae latinitatis*).

(2) Qui abbiamo un passo di circa nove linee, della cui correttezza molto dubito, ove trovasi fra le altre cose la parola ⲉⲩⲁϫⲓⲡϩⲟⲣⲟⲥ affatto ignota. La traduzione letterale di questo passo sarebbe: « Io poi ordino in ogni contrada nella mano dei vescovi che sono venuti da tutti i luoghi e quelli « che sono venuti dall'esiglio, che tutti confessino la fede santa. Quelli poi che non ubbidiranno e non « la confesseranno, si perderanno (?) con Ario il bestemmiatore di Cristo. » Con queste parole ha voluto probabilmente l' autore copto alludere a qualche ordine del re per la riunione dei vescovi di ogni contrada e di quelli che erano stati esigliati per giudicare Ario il bestemmiatore di Cristo.

padri. Ma non ostante tutto ciò, nei quaranta giorni stabiliti dal re, non volle Ario ritrarsi dalla sua apostasia, piena di bestemmia; egli ed i suoi consiglieri si presentarono al re (1).

(*Pag.* XI) . . . Il suo volto era pieno di ira contro di noi; ma noi non ce ne davamo alcun pensiero, a causa della grande gloria che in noi ne veniva. Disse poi ad Atanasio: tu sei Atanasio, il perturbatore delle chiese di tutto il mondo. Dissi a lui, non io sono il perturbatore di esse, ma tu sei il loro perturbatore, e la casa di Dio è desolata per causa tua, e dell'altro che siede presso di te, ascoltando le parole d'Ario (?) e tormentando i pastori di Cristo. Dove sono le dottrine (sante) ed il culto, che il padre tuo ti ordinò di prestare a Dio? Ove è la grande libertà di parola (παῤῥησία) di Cristo, che fu fatta da tuo padre alla chiesa di Cristo? Ove sono i favori, che ne' suoi giorni Costantino accordò ai vescovi? Ora sotto di te i vescovi furono dispersi, scemarono i sacerdoti, i diaconi . . . . i monaci (p. XII) cessarono di mostrarsi. Sotto di te le chiese furono spogliate, nè più chierici in esse; si cessò di psalmodiare nella casa di Dio, e cessarono di salire al cielo gli olocausti. Ecco io erro da parecchi anni sulla terra, e mi nascondo in molteplici luoghi a quelli che mi ricercano; io ho obliato il gaudio della Chiesa, l'ordinazione (χειροτονία) fu tolta (?) alle mie mani, i diaconi (?) tutti furono conturbati; l'intero coro degli angeli fu meravigliato della nostra dispersione, poichè cessarono di salire sino ad essi i nostri incensi. Ma Cristo Gesù non ci abbandonerà in eterno, ma verrà a noi e ci trarrà dalla cattività in cui siamo.

Queste cose poi io dissi contro il re, volendo che egli si adirasse e lo palesasse (?) (ⲡ̄ϥϯⲁⲡⲟⲫⲁⲥⲏⲥ). Ma egli disse a me: Cessa. . . . . (2) (p. XIII, lin. 3) ed il giudizio che pronuncieranno, lo farò io (eseguire) e manderò te alla tua città. Io risposi e dissi a lui: ho già fatto le mie riflessioni e questa è la mia deliberazione: io soffrirò co' miei compagni pazientemente (?) finchè Dio avrà misericordia di noi e (ci rimetterà) le nostre chiese un'altra volta ed i popoli gioiranno con noi.

Egli poi disse a me: a qual città (3) vuoi tu andare, finchè tu abbi fatto le tue riflessioni? Io risposi e dissi a lui: ogni luogo, ove sorge il sole, è luogo dei Cristiani; imperocchè dovunque tu mi mandi, io troverò Cristo innanzi a me che mi regge.

E così ordinò al malvagio, che siede presso di lui, che ci prendesse di nascosto, e me con Isidoro e coi sacerdoti ponesse con inganno in un piccolo scafo, come per condurci al luogo dei vescovi (ma) ci togliesse, ci gettasse in mezzo delle acque e ci facesse ivi perire.

I carnefici ci presero e (p. XIV) ci posero in un piccolo scafo. Essi poi uscirono salendo sopra una grande nave. Trovandoci noi nel mezzo delle acque, guardammo e

---

(1) Il racconto è qui nuovamente interrotto da una lacuna di diciotto pagine.

(2) La breve lacuna che qui presenta il testo, rende oscuro il senso delle tre prime linee della susseguente pagina, la cui traduzione letterale sarebbe: « con questa disubbidienza andate e vi giudichino ad un tempo i vescovi. »

(3) Nella trascrizione copta (p. XIII, l. 14) leggi ⲉϫⲟⲟⲧⲕ ⲉⲁϣ ⲙ̄ⲡⲟⲗⲓ̄ⲥ̄.

vedemmo l'uomo di sangue Eusebio l'eunuco, salito sulla nave, col volto pieno d'ira contro di noi; era egli il compagno di Ario.

Dissi io Atanasio: tu ti affaticasti a fuggire . . . . . (il testo che segue di otto linee presenta pochissime parole ancora leggibili, quindi prosegue): tu pure tu sei un vescovo? in qual città? Egli poi disse: io non sono un vescovo, nè sono degno pure di altro sacerdozio . . . . ma io sono col padre mio Atanasio sin dalla mia fanciullezza e non lo abbandonerò finchè piaccia a Dio chiamarci a lui. La morte adunque . . . . (altra lacuna di due linee) (p. XV). Tosto ordinò ai soldati carnefici, che ci legassero le mani ed i piedi, e perforassero lo scafo sotto di noi. Dopochè ebbero navigato molto alto (pel mare) ci abbandonarono. Noi poi tenevamo le nostre mani stese sul petto . . . . Tosto poi venne una nube che avvolse noi e lo scafo, e ci condusse al lido, senza che l'acqua penetrasse punto nella barca; i vincoli, che tenevano strette le nostre mani, si sciolsero, noi ci trovammo ritti senza alcun legame alle mani ed ai piedi. Ma la gloria di Cristo circondava noi da ogni parte governandoci. L'angelo poi del Signore, che ci resse sulle acque, disse a noi: ottimamente, o atleti di Cristo, andate dal re contro Ario, non temete, io sono con voi e vi salverò e vi servirò in tutti i luoghi in cui andrete, tu ed i tuoi compagni vescovi a stabilire la fede santa (1). Dopo ciò si nascose a noi, e noi entrammo (p. XVI) nella città. Gli abitanti poi vennero al mare a vedere, come noi eravamo stati salvati dalle onde, in cui il re ci aveva fatto gettare; ed uscirono da tutta la città esclamando con grande voce: uno è il Dio di Atanasio Cristo Gesù, e nessun altro fuori di Lui, una è la sua fede sana e nessun'altra fuori di lei. Noi poi confessiamo anche la fede di Atanasio, arcivescovo santo, noi confessiamo la Triade santa consustanziale, inseparabile, inconvertibile, immutabile, immortale, incomprensibile, ininvestigabile, impeccabile, datrice di vita. La nostra città tutta riprova la fede di Ario, il bestemmiatore di Cristo. Queste cose la città tutta disse commossa dal prodigio fatto, e si portò presso il re (p. XVII).

Il beato Atanasio poi ed il sacerdote Isidoro furono tosto guidati dall'economia di Dio, e si collocarono nel mezzo del palazzo del re. Allora il padre Atanasio stette innanzi al re con la franchezza di Cristo, fidente nelle forze, che Dio gli accordava.

Disse a lui il re: Bene venisti a noi, o Atanasio, guerriero di Cristo, campione della verità, l'*atloforo* invincibile, l'economo dei misteri santi, l'amministratore della fede sana della Chiesa cattolica. Tu venisti a noi sopra le acque, senza navi, nè nocchieri, tu sei colui, che Cristo regge sulle ali dei venti; tu venisti a noi senza i custodi, che ti aprissero le salde porte; tu sei quegli, cui il creatore dell'universo indicò la via. Tu hai dato la pace a noi, o portatore di Cristo, re della pace, tu hai

(1) Il racconto di questo prodigio, che leggesi pure in un papiro copto del Museo Borgiano, segnato nel catalogo del Zoega col n. CLX (p. 261), è narrato nella vita di S. Atanasio, tradotta da un testo arabo in latino da D. Renandosio, con queste parole, che sono la traduzione quasi letterale del papiro copto del Museo Borgiano: « L'imperatore poi comandò che fosse posto (Atanasio) in una piccola nave, « senza acqua, senza pane, senza nocchiere o timoniere, e così solo fosse abbandonato in alto mare. « Ma Dio protesse il suo eletto e sotto il suo governo la nave dopo tre giorni approdò in Alessandria. « Il clero ed il popolo gli andarono incontro, e salmeggiando per via lo condussero con grande pompa « nella chiesa, di dove furono cacciati Gregorio e quelli che seguivano la sua perversa fede. »

sostenuto molte lotte (p. XVIII) contro di noi, nè fosti vinto. A te che fosti fatto compagno degli angeli nella tua pugna di gloria, il mio regno tutto, su cui Dio mi collocò, accorda la gloria del tuo primo sacerdozio regnando sul trono d'Alessandria, acciocchè tu faccia anche ricordo di noi nelle tue preghiere sante; e tu amministrerai tutte le chiese secondo la prudenza e la sapienza che Dio ti concesse, secondo i canoni santi, che gli Apostoli hanno ricevuto dalla bocca del grande maestro che è Cristo. Ora, dunque, sana noi dagli errori degli Ariani, questi che negano l'essenza dell'Unigenito.

Tu, poi, oh! pastore fedele, di' a noi i capi che ci riguardano, secondo quello che Dio ti avrà istruito con la carità di Cristo, questi che ci ha preparato il regno.

(*Pag.* XIX) Allora rispose con calma, e disse al re padre Atanasio; per verità, o re, fu il tuo cuore preso dall'eunuco Eusebio, questi accusante noi per causa degli Ariani, finchè tu ci esigliasti con gli altri vescovi santi per la fede dei padri nostri, che essi professarono sulla Trinità santa.

Dove è mai colui che si vanta nella sua superbia? Non lo immerge forse nel fondo del mare, come il Faraone di una volta, lui e quelli che sono con lui?

Tu poi, o re, ascolta me, che ti annunzio con franchezza la fede santa, immortale di Cristo.

1. Noi crediamo a Dio, padre onnipotente, o re, quegli che ha creato il cielo e la terra, e le cose tutte che vediamo, e quelle che non vediamo;

2. E noi crediamo all'unigenito figlio di Dio Gesù Cristo, Dio vero di Dio vero, luce vera di luce vera, vita vera di vita vera, il vivificatore del vivificatore;

3. (p. XX) E noi crediamo nello Spirito Santo vivificatore, quegli che riempie l'universo della sua energia, quegli che è in ogni creatura, e spira in ogni luogo, e non è veduto;

4. Noi crediamo poi ancora in Cristo, o re, dicendo che non è una creatura, secondo la fede malvagia di Ario, ma è col padre fin dal principio, ed ha creato l'universo da sè, secondo la sua volontà;

5. Parimente crediamo alla Triade, formante unità col Padre vivificatore, Figliuolo vivificatore, Spirito Santo vivificatore, una triade consustanziale, non avente divisione in sè (1);

6. Dopo questo confessiamo anche la accogliente Dio (ⲑⲉⲟⲇⲟⲕⲟⲥ (2)) Maria, la generatrice di Dio, la vergine incontaminata, quella che generò il formatore del mondo, quella che concepì senza il concorso del maschio, figliò senza macchia, partorì

(1) La traduzione letterale di questo passo del testo è: « noi crediamo nei tre che sono uno, Padre « vivificatore, Figlio vivificatore, Spirito Santo vivificatore; questi tre sono uno, una Triade di essenza, ecc. e formano, secondo la dottrina di S. Atanasio, le tre *ipostasi* della Santissima Trinità, che sono distinte ma non divise. »

(2) ⲑⲉⲟⲇⲟⲕⲟⲥ: questa parola formata da *θεος* *Dio* e dal verbo *δεχομαι* (forma ionica *δεκομαι*) significa letteralmente *che accoglie* o *che riceve Dio*, titolo perfettamente adatto a Maria la generatrice di Dio. Tuttavia per il frequente cambiamento nel copto della ⲧ in ⲇ potrebbe anche altri credere che ⲑⲉⲟⲇⲟⲕⲟⲥ stesse per *θεοτοκος* la Deipara; ma questo non deve essere nel caso nostro, poichè questo epiteto è dato a Maria immediatamente dopo, nella sua vera forma copta; ⲧⲣⲉϥ ϫⲡⲉⲛⲟⲩⲧⲉ; sarebbe quindi una ripetizione inutile dello stesso titolo.

senza dolore, nutrì senza travaglio, (p. XXI) allattò senza malattia, divenne gravida senza affanno, credette senza investigazione;

7. Noi crediamo poi ancora alla risurrezione (ⲁⲛⲁⲥⲧⲁⲥⲓⲥ) santa, che avverrà di ogni carne da Dio; sia il giusto, sia il peccatore, risusciteranno tutti, essendo immortali per essere giudicati da Colui che li ha creati;

8. Parimente noi crediamo al sacrifizio santo del corpo e del sangue di Gesù Cristo, nostro Signore. Il pane ed il vino, prima che noi li consacriamo, è pane e vino, ma, dopochè il sacerdote ha pronunciato (le parole sacre) su essi, il pane è fatto corpo divino, il vino è fatto sangue divino;

9. Dopo questo crediamo ancora ad un solo battesimo, quello che genera un'altra volta lo Spirito, che fa l'uomo nuovo, il mondatore dei peccati, il generatore senza matrice, questo con cui il Padre si manifestò a noi sul fiume Giordano;

10. Di più ancora noi confessiamo la presenza (ⲡⲁⲣⲟⲩⲥⲓⲁ) del Signor nostro, poichè come salì (al cielo), così egli viene portando il corpo che prese da Maria, la Vergine santa; sono gli angeli tutti con lui, che arreca la gloria del Padre.

11. Parimente confessiamo le scritture inspirate da Dio, queste che dettò lo Spirito Santo.

12. Come il più grande di tutti questi capi noi confessiamo i quattro evangelii, a cui attingono (lett. bevono) tutti i Cristiani. Ecco questi sono i capi, o re, cui piacque a Dio che dicessi a te, affinchè sanassero la tua anima dalla fede malvagia degli Arii, questi che trassero in errore te ed altri molti. Se dunque, o re, questi capi che io dissi, sono retti al tuo cospetto, io dirò: vieni insieme co' miei compagni vescovi, che hai esigliato per causa degli Arii.

Queste cose avendo detto il beato ed impavido Atanasio, rispose il re con voce piena di mansuetudine, dicendo al padre Atanasio: Tu veramente, o banditore di verità, ci hai bene istruito molte volte, ma noi fummo increduli verso di te, a causa dei consigli di questo corruttore dei cuori, Eusebio, degno di disprezzo. Or dunque la potenza del mio regno ti accorda gloria ed onore per le fatiche tutte, che hai sostenute. Ed io confesso i dodici capi, che dicesti immutabili e saldi, su cui hai stabilito la fede con ogni venerazione. Allora chiamò tosto il capo (1) de' suoi corrieri (2) e lo mandò ai vescovi santi perchè li conducesse a lui fra sette giorni.

Essendo il beato Atanasio presso il re, lo confermò nella fede retta. Fra i sette giorni adunque li condusse innanzi al re, portanti la corona della fede. Il beato Atanasio poi andò loro incontro fuori della città, e si abbracciarono vicendevolmente. Disse loro: pace a voi, campioni della verità, che avete ben combattuto per la fede

(1) ⲉⲝⲩⲥⲉⲩⲗⲩⲡⲁⲧⲟⲥ (ⲉⲝⲟⲩϭⲓⲟⲗⲩⲡⲁⲧⲟⲥ): questa parola che non trovo nei dizionari, e nella forma si accosta ai titoli, in uso nel periodo bizantino, ἐξουσιαρχης ed ἐξουσιοκρατωρ *governatore, comandante* (V. *Glossary of later and Byzantine Greek by E. A. Sophocles, pag.* 301) fu da me presa nel senso di principale, superiore, capo.

(2) ⲃⲉⲣⲉⲧⲁⲣⲓⲟⲥ (ⲃⲏⲣⲓⲗⲁⲣⲓⲟⲥ, ⲃⲉⲣⲉⲗⲁⲣⲓⲟⲥ) erano i corrieri che portavano gli ordini dei principi. Questi corrieri una volta saliti a cavallo, non ne discendevano più, neppure per mangiare, finchè non avessero compiuto il loro mandato; epperò si tenevano sempre pronti cavalli al loro servizio, detti *veredi* dal latino *vehendo* e *veredarii*, i detti corrieri. (V. il dizionario già citato del Ducange alla parola *veredarii*, pag. 1489).

del Signore nostro Gesù Cristo. Dissero a lui: essa sia pure con te, pel quale noi abbiamo bene combattuto.

Allora il re, avendo ricevuto il loro annunzio, sorse dal trono, li abbracciò ed adorò le loro mani, e disse loro: ottimamente, voi siete venuti a noi, o atleti della fede. Allora Filippo il corriere del re gli narrò i grandi prodigii che Dio aveva fatto ai vescovi per via.

Li ringraziò inoltre ancora di non avere cessato di pregare per lui, non ostante il male che aveva loro fatto. Ma essi ad una volta diedero a lui pace per il beato Atanasio. Il re poi rimise ognuno al suo posto in pace. Mandò pure il beato Atanasio nella sua città, in pace avendogli largito molti doni per riparare le chiese, che erano state distrutte dai nemici della fede, e scrisse agli abitanti della sua città i prodigi tutti, che Dio gli aveva fatto. Essendo poi il padre Atanasio entrato in Alessandria, il popolo tutto gli venne incontro sul lido del mare, mandando grandi grida di gioia, e rallegrandosi molto, perchè Dio gli avea ricondotto il suo pastore salvo. E così il popolo entrò in chiesa nel gaudio di Cristo.

Le chiese furono nuovamente piene di letizia, i sacerdoti si rallegrarono, i diaconi furono giulivi, le vergini fecero festa, i monaci pieni di contento cantarono i loro salmi, la città tutta era in gioia.

Dopo queste cose stette il beato sette giorni, parlando alla moltitudine, che confermava nella fede retta. Al settimo giorno nella chiesa disse: ascoltatemi, fratelli miei; ecco, Dio ci ha difesi finchè ci condusse a voi in pace. Mi abbisogna dunque che io vada al beato Antonio, e riceva la benedizione da lui, poichè il tempo della sua vecchiaia si avvicina, ed egli andrà a Dio.

Allora egli diede loro la pace, e li lasciò. Dio poi annunziò al beato Antonio che fra tre giorni Atanasio sarebbe entrato in Alessandria, ed egli l'annunziò a' suoi due discepoli Paphunzio (ⲡⲁⲡⲛⲟⲩⲧⲉ) ed ϩⲁⲙⲁⲧⲉ (1). Allora uscì fuori della sua cella e stette guardando.

Accostandosi poi alla cella padre Atanasio, sorse il santo vecchio ed uscì appoggiato al suo bastone, col cuore pieno di gioia nello spirito di Dio. Si chinò il buon vecchio, ed adorò padre Atanasio, e baciò la sua bocca, e si abbracciarono tra loro. Poscia entrarono (nella cella) pregarono e sedettero. Allora il beato Antonio piegò la bocca ad un amorevole sorriso, e disse a padre Atanasio: pace alla tua visita a noi, o martire eletto; ecco quello, che io cerco, l'ho ottenuto, e questo è di vedere te e la pace della chiesa, prima che io lasci il corpo. Pace a te, Zorobabele, il costruttore della casa del Signore, pace a te, Salomone, l'adornatore del tempio del Signore. Ecco Dio ti ha donato queste cose per la pace della Chiesa, nella maniera che l'annunziai per l'amore di Dio, prima che io salga a Dio. Imperocchè sono ancora a me tre altri giorni in questo mondo prima che io salga a Dio. Ti prego poi di non annunziare ad alcuno il patto (ⲇⲓⲁⲑⲏⲕⲏ) che è insieme tra noi, finchè io sia salito a Dio in pace. Queste cose dicendo il vecchio, pianse padre Atanasio, poichè non gli permise di rimanere presso di lui, finchè uscisse di vita (lett. dal corpo).

---

(1) Ho conservato questo nome come è scritto nel copto.

Allora sorsero, pregarono e si abbracciarono vicendevolmente, ei gli diede la pace ed uscì.

Avvenne poi che separatici dal beato Antonio, rientrammo in Alessandria, e tre giorni dopo morì il beato Antonio, e vennero a noi e ci annunziarono, che riposò in un buon sonno, e ci narrarono la vita sua beata, e noi la scrivemmo in un altro solo volume, separatamente da questo, che fu compiuto in pace. Egli salì a Dio in gloria, avendo lasciato dietro di sè una pietra immobile nella contrada d'Egitto, ove la sua vita è splendente per Cristo Dio, a cui egli si attaccò sin dalla sua fanciullezza. — Gloria a Dio sino alla fine dei secoli. Amen (1).

---

(1) Atanasio, della cui vita un notevole episodio ci hanno conservato i nostri papiri, nacque nell'anno 296 dell'êra cristiana in Alessandria da illustre famiglia. Dotato di felicissimo ingegno, compì con molto onore i suoi studii nelle scuole dei grammatici e retori più in fiore a quei tempi, e poco più che ventenne già scriveva contro l'Arianesimo, che allora infestava la Chiesa, opere piene di erudizione.

L'arcivescovo della sua città natale, Alessandro, uomo di molta dottrina ed invecchiato nelle lotte contro le sette, lo volle, sebbene non fosse allora che diacono, compagno nel concilio di Nicea, che l'imperatore Costantino, per togliere i dissidii sorti nella Chiesa Orientale, convocava in Bitinia nell'anno 325, ove convennero dalle diverse parti della terra trecento e diciotto vescovi. In quelle adunanze di tanti insigni prelati rifulse su tutti il valore del giovane Atanasio nel confutare le dottrine ariane. Morto poco tempo dopo Alessandro, Atanasio, già preconizzato dal suo antecessore, fu dal clero e dal popolo innalzato alla cattedra di Alessandria. Questo sommo onore accordato al loro più acerrimo nemico, accrebbe vieppiù l'odio degli Ariani contro di lui. Onde si fecero a combatterlo con ogni sorta di accuse e calunnie, e riuscirono colle loro male arti a fare per ben cinque volte esulare il santo vescovo dalla sua sede.

Il suo primo esiglio ebbe luogo sotto il regno di Costantino, il quale alle accuse degli Ariani, e colla speranza forse di ottenere più facilmente la loro conciliazione, nell'anno 335, senza udirne le discolpe, confinò Atanasio a Treveri nelle Gallie. Ritornato in Alessandria dopo la morte di Costantino, avvenuta nell'anno 337, ebbe nuovamente, sempre per la guerra degli Ariani, ad esulare due altre volte mentre regnava l'imperatore Costanzio.

La prima volta fuggì da Alessandria per sottrarsi alle persecuzioni di Georgio, che raccolto, coll'aiuto degli Ariani, un discreto numero di soldati, invase la città e si fece ad incrudelire colla plebe cristiana che parteggiava per Atanasio, inondando di sangue le chiese, rubando i vasi sacri e violando le vergini.

Atanasio, dopo sei anni di vita raminga nei deserti della Tebaide, ritorna colla protezione divina in Alessandria, ove è accolto dal clero e dal popolo con grandi feste, e costringe Georgio a fuggire co' suoi settari.

Sette anni dopo questo fatto, un altro Georgio, entrato con duemila soldati in Alessandria, occupa l'episcopato, e, preso Atanasio, lo consegna ad un certo Sunno, o come altri lo chiamano, Salis, un cultore di idoli, perchè lo conduca con Liberio Romano e Dionisio Antiocheno all'imperatore in Costantinopoli, ma con segreto ordine di ucciderli per via. Dio li scampò da questo pericolo, ed Atanasio venne con Liberio a Roma, ove stette sino alla morte dell'imperatore.

Il quarto esiglio ebbe luogo sotto Giuliano l'Apostata, il quinto ed ultimo ai tempi dell'imperatore Valente. Onde si può dire che dei quarantasei anni in cui tenne la cattedra arcivescovile di Alessandria, quaranta anni passò in continui perigli e lotte, e solo negli ultimi sei anni della sua vita potè godere di una tranquilla e non più turbata pace, ma affranto dagli anni, e più ancora dai lunghi travagli cessava di vivere quasi ottuagenario nella sua città natale, nel mese di maggio dell'anno 373.

S. Gregorio Nazianzeno che nell'anno 379, al giorno anniversario della sua morte, ne pronunziava il panegirico, lo chiama il vescovo secondo l'ideale proposto da S. Paolo nella sua lettera a Timoteo. « Egli, dice S. Gregorio, assiduo nei digiuni e nelle orazioni, insuperabile nelle veglie e nel salmo-
« diare, pronto a soccorrere gli indigenti, sapeva resistere ai potenti ed ai superbi, e farsi umile coi
« deboli. Le vergini ammiravano in lui il modello del celibato cristiano, le donne maritate il consi-
« gliere, i romiti la voce che eccita ed eleva il pensiero al cielo, coloro che vivono in sodalizio il le-
« gislatore, quei che si danno alle speculazioni filosofiche il provetto teologo. Egli era ai semplici
« guida, agli impetuosi freno, agli infelici consolatore, alla vecchiaia bastone d'appoggio, alla gio-
« ventù pedagogo, alla povertà mano liberale, alla ricchezza dispensiero. Nè basta. Le vedove loda-

SENTENZE DEL SINODO SANTO

Dio Padre è buono; Cristo è Signore e Dio; buono è lo Spirito Santo. Dio non ha principio, nè alcun termine è alla divinità. Imperocchè Egli è il principio ed il fine dell' universo. Nessuna creatura (p. XXIX) è nella Trinità, ma il Signore stesso creò l'universo; nè vi ha chi domini alcuna cosa nelle opere sue. Egli diede poi il libero arbitrio a quelli che sono nel mondo, acciocchè le volontà si manifestino. La volontà di alcuni li collocò presso Cristo e li innalzò sopra gli angeli, altri poi precipitò nell' inferno. Dio non creò cosa alcuna cattiva, anche i demoni non sono per loro natura malvagi, ma per loro volontà. Gli angeli pure di Dio sono primieramente portati al bene dalla loro volontà, preferendo tutti Dio al loro proprio utile, ed alla loro stessa gloria.

La natura di Dio non abbisogna di alcuna delle cose create, ma l'universo ha bisogno di Dio; nè egli creò cosa alcuna acciocchè permanga salvo (1), imperocchè tutte le cose sono salve per l'energia della sua volontà. Dio nulla ha creato se non per suo figlio; imperocchè lo Spirito suo è (p. XXX) quegli che sviluppa tutte le creature di Dio. Dio ama quelli che lo ascoltano, quelli poi che lo ascoltano, sono retti nella loro volontà. La volontà dell'uomo è nelle sue opere; imperocchè per esse alcuni fra gli uomini sono chiamati angeli ed alcuni altri demoni. Quegli che vuole ubbidire a Dio, ascolterà i suoi precetti. Costui poi si affretterà alla chiesa. Chi non si affretta alla chiesa, trascura la sua propria salute. Imperocchè quegli che si rifugge in Dio, cerca un aiuto. Affrettati alla chiesa, poscia alla tua arte, acciocchè Dio benedica le opere delle tue mani. Chi si affretta all'arte sua fuori della casa di Dio, la sua opera sarà a temerità.

« vano in lui il protettore, gli orfani il padre, i poveri l'amico dei poveri, i pellegrini l'albergatore « volonteroso, i fratelli l'affettuoso fratello, gli infermi il medico, i sani il guardiano della loro salute. « Tutti infine trovavano in lui l'uomo intento a spandere su tutti o sul maggior numero possibile i « tesori della sua carità. »

I numerosi scritti di questo strenuo campione della fede ortodossa composti in lingua greca furono per la prima volta riuniti e pubblicati a Parigi nell'anno 1698, in cinque volumi in foglio col titolo: *Athanasii opera omnia*, preceduti dalla vita di questo santo, da cui trassi questi brevi cenni.

(1) La traduzione che il Révillout dà di questo passo: « rien n'a été créé pour subsister par soi même, etc. » non è del tutto fedele al nostro testo, che dice, verbo per verbo, *non creò cosa alcuna acciocchè permanga salvo* (ⲡ̄ϥϭⲱ ⲉϥⲟⲩⲟϫ); nelle quali parole parmi meglio espresso il pensiero, che il mondo non contiene in se stesso la ragione della sua conservazione e della sua salvezza, ma esso perdura ed è salvo per la volontà di Dio; od in altri termini, la dottrina dell'azione permanente di Dio nel mondo.

Tienti alle cose che hai udito nella casa di Dio, sia che tu lavori, sia che tu passeggi, e non peccherai. Quegli che ha l'animo alle usure, che cosa desidera a sè nella chiesa? A costui è da preferirsi chi dorme nella sua casa.

La chiesa è chiamata il luogo di purificazione dei peccati, ed ognuno pianga i suoi peccati, imperocchè breve è la nostra durata di vita sulla terra (p. XXXI). Perciò dobbiamo piangere sui nostri peccati.

Oggetto della chiesa è solamente la preghiera e la supplicazione. Chi parla in chiesa, sopratutto alla lettura, si fa beffe di Dio. Ma a Dio nessuno può fare ingiuria, imperocchè la sua natura è gloriosa più di tutte le cosa esistenti, ma aumenta la sua punizione colui che oserà trasgredire la volontà di Dio.

Chi guarda una donna in chiesa, si accresce il castigo. La donna poi che si abbella per la casa di Dio, ha stolto il suo padre ed il suo marito; questa poi in tal modo perderà la sua anima. Una donna che si copre d'oro in chiesa, sopratutto quella che ne fa pompa, è un'idolatra. L'oro non è stimato dal saggio più che l'antimonio agli occhi. Quella che porta ornamenti sul capo fa palese la sua insipienza, e quella che ha la chioma sciolta, cioè ondeggiante, chiama a sè gli insensati. Una donna è amata da Dio e dagli uomini, per la temperanza e buon governo (p. XXXII) della sua casa. Imperocchè la bellezza vana ha un odio che la insegue. Adornati per tuo marito coll'opera delle tue mani e colla moderazione della tua bocca; imperocchè le sante chiamano il marito loro, mio signore; non amare di ornarti, o donna! ma pensa a tutte le belle che sono nella tomba; imperocchè anche quelle che giacciono nel letto inferme, la bellezza le abbandona. Adorna la tua anima dell'amore di Dio, e dà il tuo cuore alla parola di Dio, ascoltandola.

Nessun uomo saggio dimorerà con una donna stolta, imperocchè quella che non ubbidisce al padre suo ed al suo marito, è una stolta. Figlio mio, sta lontano da una donna che ama gli ornamenti, imperocchè sono indizi di (vanità) e di adulterio i cincinni ed i gioielli. Conoscerai una donna che odia il peccato, alla mondezza del suo volto. Quella che dà l'antimonio a' suoi occhi rivela la sua vanità. Il corpo non ha bisogno di alcun ornamento (lett. cosa), è vanità portarli; a che (p. XXXIII) giova l'antimonio agli occhi? Una splendida immagine è deturpata dal fumo delle lampade. Chi si adorna in chiesa contro sua natura offende il Creatore. Tieni (o donna) il tuo volto coperto in chiesa e per le piazze, e non dare scandalo ad un'anima!

Vi ha chi cammina con un contegno cattivo credendo di attirare a sè lo sguardo, ma un uomo di tal fatta è un insensato. L'uomo che si rade la barba ama l'ignoranza dei fanciulli (rassomiglia cioè ai fanciulli senza esperienza); l'ignorante poi non ha coscienza di sè.

Il tuo vestimento sia a te secondo il bisogno del corpo. Non ornarti di una (lunga) chioma, poichè ciò conviene alla donna; se tu amerai ornarti a guisa di una donna stolta, in che cosa differisci da essa?

L'uomo è costituito sopra la donna come il governatore di una città. Un uomo amante dei figli istruirà i figli suoi bene, alla figlia sua poi insegnerà la legge. Sii come un governatore a tuoi figli, e non arrossirai di essi. Se tua figlia desidera di rimanere vergine, tu sei fatto degno di una grazia, (p. XXXIV) ed il Signore si è ricordato di te. Imperocchè il Signore è santo, ed ama i santi. Una vergine saggia è

quella che rassomiglia a Maria. Chi mai potrà dire la bellezza della madre del nostro Signore, che fu amata da Dio per le sue opere. Per questo ha fatto abitare in lei il figlio suo prediletto. Si chiama padre increato, il padre di Cristo, ed egli è in verità; chiamasi pure Maria la madre del Signore, ed è in verità, essa è quella che ha generato colui che l'ha creata, nè fu abbassato, perchè Maria lo generò; ed essa pure non perdette la sua verginità, avendo partorito il nostro Salvatore. Ma di più egli se la conservò come un tesoro prezioso.

Maria non vide mai il volto d' uomo straniero, epperò si conturbò quando udì la voce dell'angelo Gabriele. Questa non si consuma al modo di chi nutre un corpo, ma si consuma per necessità di sua natura, non compiendosi prima del suo tempo. Non conosceva la sua propria nudità (?) . . . . . (1).

(P. XXXV) Si ritirava nella sua casa sola, servita dalla sua propria madre. Quando poi essa veniva presso di lei, non le poteva dire neppure una parola del suo stato, poichè aveva giurato a se stessa di non parlare a persona di questo mondo, dell' annunzio. Sedeva poi volgendo ogni volta la sua faccia all'oriente, poichè pregava senza intermissione. I suoi fratelli desideravano vederla e parlare con lei, ma ella non li riceveva. Gli angeli venivano molte volte presso di lei, contemplando il carattere del suo governo, ammirandolo. Dormiva poi anche ugualmente un solo sonno, e così non dava riposo al corpo; nè vide mai la nudità del suo corpo; se era a portare una tunica, si chiudevano i suoi occhi . . . . . non erano in lei le consuetudini delle donne; (p. XXXVI) ignorava molte cose della vita, poichè stava lontana dal conversare delle donne. Il Signore guardò in tutta la sua creazione, e nulla vide che rassomigliasse a Maria, perciò se la scelse a madre.

Se dunque una donna vuole essere chiamata vergine, rassomigli a Maria. Questa poi fu chiamata in verità la madre del Signore. Una vergine che non digiuna ogni giorno sino a sera, non ha forza per essere vergine. La vergine sia secondo il suo nome. È meglio che tu prenda marito anzichè prostituirti (ⲡⲟⲣⲛⲉⲩⲉ). Se non vuoi prendere marito non saziarti di pane, nè di sonno, per tema che sia trovata la tua lampada spenta. Le vergini non stanno allo specchio, nè fanno lozioni alla loro faccia. La loro prima cura è sorgere al mattino per prendere il libro e leggere, ed attendono alle opere di mano dall'ora seconda sino alla nona. Le due prime ore sono (consacrate) alla lettura, ed anche dopo la nona; (p. XXXVII) imperocchè ogni loro ornamento traggono esse dal verbo. Che è di colei che neglige le letture? Essa non conoscerà la volontà del suo sposo. Qual è il vantaggio della paglia vicino al fuoco? e qual è il vantaggio di una monaca (2) presso una donna che abiti col marito? Una monaca che porta vesti di vario colore, ha pure affezioni di diverse specie. La bontà del vestimento è

---

(1) L' originale è qui molto annerito e temo della fedeltà della mia trascrizione, poichè il gruppo ⲟⲩⲧⲉ ⲙⲉⲥⲕⲁ ⲡⲉⲥϭⲓϫ ⲙ̄ⲡⲃⲟⲗ ⲛ̄ⲡⲉⲥⲡⲁⲗⲗⲉⲓⲛ ⲉⲛⲉϩ, significherebbe letteralmente: *nè pose le sue mani fuori, nè si agiterà mai* (?). Il signor Révillout, di questo passo e di quello che segue, o per meglio dire, dalla linea 21 della pagina XXIV sino alla linea quarta della pagina XXVI del testo (46 linee in tutto) non dà la traduzione, e si restringe a dire che il passo si riferisce alla Vergine Maria; dubita tuttavia se esso riguarda la vita reale di Maria Vergine, o descriva solo un tipo ideale della vergine cristiana.

(2) La parola monaca (ⲙⲟⲛⲁⲭⲏ) è qui presa in senso largo e si applica a qualunque donna che viva appartata nel mondo e consacrata alla preghiera senza tuttavia far parte di alcun sodalizio.

il colore (naturale) della lana. Quella che tinge la sua veste ha l' anima sua nera a guisa di un sacco (1). Una monaca saggia non parla affatto cogli uomini, ma la stolta scherza coi giovanetti. Come gli uomini stolti danno il nome venerato di Dio agli idoli, così pure danno a donne insensate il nome di vergine. Imperocchè anche il nome di vergine è un nome divino. La monaca vergine non volgerà lo sguardo nè all' oro, nè alle perle; imperocchè ciò che ha è migliore di queste due cose. Come altri sceglie l'oro fra le cose materiali, così altri (p. XXXVIII) sceglie la verginità fra le virtù: ma la verginità del corpo senza quella dell' anima è pazzia. A che giova una donna che ammucchia l' oro, o qual è l'utilità di colei che riempie le casse di vesti, e si vanta dicendo: « io sono vergine! » Il ripostiglio di una vergine è il tesoro della sua anima. Se ella veste i nudi, accumula per sè un tesoro. La bontà tutta della verginità è la sommessione, la rinunzia e l' astinenza. Una donna che cerca il cibo, il Cristo non può saziarla affatto. Il suggello della purità è il digiuno. Chi fa copioso il suo nutrimento moltiplica (2) le sue malattie.

Sta lontano da una vergine del Signore e non portare lo sguardo sulla donna che ha marito, acciocchè non ti giudichino come un sacrilego. Una monaca che va a passeggio a mezzogiorno non è una monaca, e quella che passeggia sola si avvicina alla prostituzione. Un uomo che commette adulterio, avendo la sua donna è un insensato (p. XXXIX) ed un infanticida. Un agricoltore si guarderà dal gettare il suo seme sulla pietra, imperocchè sa che non gli germoglierà, nè alcun uomo saggio darà il suo seme ad una meretrice, imperocchè non riuscirà per lui, o se anche riuscirà sarà a maledizione.

L'uomo saggio si guarda di dare la sua tunica a meretrici e darà il suo seme prezioso sopra tutti i semi? ma lo stolto lo tiene in disprezzo (3).

Tu devi nutrire i tuoi figli bene, e devi risparmiare il tuo seme. Sii parco con te stesso, o uomo! e non lo sii co' tuoi figli. Chi ha moglie, perchè guarda le altre? Imperocchè se uno che non ha moglie, pecca col suo sguardo due volte, tanto più quegli che ha moglie; esso mostra a tutti col suo sguardo che è un incontinente. Nessun incontinente, è detto, erediterà il regno dei cieli. Basti a te la tua donna; essa è simile a tutte le altre. Chi abita con una sola donna, riposerà il cuore in essa e non quegli (p. XL) che la perseguiterà collo sguardo. Imperocchè colla misura con cui misurerai sarai misurato. Chi convive colla sua donna, secondo il fine del matri-

---

(1) Invece di ⲕⲏⲙ ⲡⲁⲣⲁ ⲟⲩϭⲟⲟⲩⲡⲉ il signor Révillout legge (ⲧⲉⲥⲯⲩⲭⲏ) ⲕⲏ ⲙ̄ⲡⲁⲣⲁ ⲟⲩϭⲟⲟⲩⲡⲉ, e traduce *son âme reste sans même un sac*, mentre secondo la mia trascrizione si verrebbe a dire che « l' anima della donna vana è nera, spregievole come un sacco, » similitudine a cui ricorre frequentemente la Bibbia per esprimere il cordoglio, l' umiliazione, ecc. e corrisponde anche all'interpretazione che il Kabis, nelle sue aggiunte al dizionario copto del Peyron, dà di questa parola: ϭⲟⲟⲩⲡⲉ(ⲟⲩ) *tela vilis, ac rudis et coloris admodum nigri.*

(2) Révillout corregge il gruppo ⲡⲁϣⲉ del testo in ⲧⲁϣⲉ che rende più chiara la sentenza dell'autore copto « Quiconque rend abondante sa nourriture, rend abondantes ses défaillances, » ma se si vuole stare al testo deesi tradurre: *a chi fa copioso il suo nutrimento molte (sono) le malattie.*

(3) Il testo è, nell'originale alterato, con raschiature ed aggiunte di altra mano. Il signor Révillout corregge il testo ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲥⲁⲃⲉ in ⲡⲣⲱⲙⲉ ⲛ̄ⲁⲑⲏⲧ e traduce tutto questo passo secondo un testo da lui esaminato a Napoli che suona così: « l'insensé regarde à donner son vêtement: et pretiosum semen suum dat consuete meretricibus. Quid pretiosius semine hominis? Quid inter cuncta semina? Insano semen contemptum.

monio, vedrà figliuoli saggi, e chi sarà casto nei giorni della sinassi (ⲤⲨⲚⲀⲄⲈ), i figli suoi lo serviranno. Quegli poi che serve il Signore in verità, i suoi figli lo serviranno in verità. Non vi è nessuna tranquillità di animo nella vita dell' uomo come quella che si ha in figli saggi, sani di malattia e forti. A chi servirà il Signore in verità la stessa cosa sarà fatta a lui.

Fa che i tuoi figli prendano amore alla chiesa e non all'osteria. Insegna poi loro ad ascoltare in silenzio, e nel tempo della tua vecchiaia ti consoleranno colle parole di Dio. Gli uomini si fanno vecchi per la verità, imperocchè breve è la durata di vita dei mentitori. Come è un prodigio la vita di uomini di novecento (p. XLI) anni (?) perchè non peccarono, così pure l'uomo che non peccherà avrà una lunga durata di vita.

Non sono ignorati a Dio quelli che lo riconoscono. Ma il mentire è non conoscere. Il cristiano non mentirà, imperocchè la non conoscenza è un mentire. Un uomo che riceve il corpo di Cristo non deve mentire, imperocchè Dio è verità, e quelli che amano Dio non mentiscono. Maravigliosa è l'audacia di quelli che vanno verso il corpo di Cristo pieni di invidia e di odio. Dio ama l'uomo, e coloro che odiano gli uomini non hanno onta! Quelli che si odiano tra loro, odiano Dio e lo respingono dicendo: non amarci!

Guai a colui che odia l'immagine di Dio! Imperocchè chi fa male all'uomo, lo fa a se stesso. Non vi è alcun allettamento nella passione dell'odio, ed è cosa meravigliosa, che essa abbia potenza sopra di noi tutti.

Colui che ama il suo prossimo ama Dio; chi poi ama Dio, Dio (p. XLII) l'amerà, e quegli che è amato da Dio, un figliuolo è di Dio. È una abbominazione innanzi a Dio l'uomo che si scosta dal corpo di Cristo, pigliando il pretesto di non essere degno. Quei che non si fa degno del mistero riceverà grandi castighi. A che giova venire alla sinassi e non ascoltare la lettura delle Scritture? Imperocchè colui che non ascolta la lettura dell' Evangelio si fa gioco del mistero. Chi poi non attende al sacrifizio (ⲘⲠⲦⲀⲨⲐⲈⲚⲦⲎⲤ) del corpo e del sangue di Cristo, non vi partecipi! Ma quegli che vi crede, si affretterà alla chiesa, imperocchè l' uomo religioso si affligge se si prega e si salmeggia prima che egli sia arrivato in chiesa, ma il negligente è ultimo, e non è benedetto. Chi si affretta alla chiesa, sarà benedetto doppiamente; quegli che sarà ultimo senza necessità, è ultimo alla benedizione. Bisogna ricevere il corpo ed il sangue di Cristo a guisa del bambino che ha sete (p. XLIII) del latte di sua madre; imperocchè colui che non lo riceve, non ha vita. Quegli poi, che bruttato d'odio o nella sozzura della prostituzione lo riceve, meglio sarebbe per lui il non aver vita. Nessun peccato è, al cospetto di Dio, più grave dell'odio, imperocchè l'odio è quello che uccide. Chi poi cammina nel peccato contro natura, è il fratello di colui che odia. La carità lava tutti i peccati, l'odio invece discaccia (tutte) le virtù. La carità conviene ai Cristiani, imperocchè quegli che riceve Cristo, deve ricevere anche la sua volontà. La carità non disconosce alcuno, imperocchè riconosce tutti gli uomini. La perfezione della carità è far bene a tutti gli uomini; colui che fa bene a quelli che l'odiano, si renderà simile a Dio. L'uomo che non avrà carità, non avrà mercede. Chi fa del bene a' suoi nemici riceverà una corona incorruttibile. Come mai non farà del bene a tutti gli uomini quegli che fa del bene ai suoi nemici? Il bene poi non sta

solo nelle molte ricchezze, imperocchè colui che fa il bene lo compie con un bicchiere d'acqua fresca, e con un solo pane. È un'onta per un cristiano, che ha due tuniche, obliare quello che non ne ha alcuna. Se in vita ci associamo gli uni con gli altri, quanto più innanzi alla morte (lett. i perituri). Ama l'uomo, imperocchè siamo tutti pellegrini, e nulla salverà l'uomo dalla punizione come la carità. Ama l'uomo mentre sei, non dimorerai a lungo. Quanta è la tua durata di vita sulla terra? non disperderla in cose vane!

Vi è per il saggio un giorno migliore, ed egli gioisce dell'utilità di un solo giorno. Ma lo stolto disperde la sua vita in un giorno e, venuta la sua fine, non trova nulla nelle mani.

L'uomo saggio si asterrà dalle parole contumeliose, ma lo stolto pronuncia ogni sorta di contumelie. L'uomo sarà giudicato dalle parole della sua bocca, imperocchè non saranno dimenticati anche i pensieri del cuore.

Guai all'uomo che oblia se stesso! Ti fu dato di divinizzarti colle tue opere, la tua sola negligenza ti farà simile ai demoni; imperocchè essi divennero tali per la loro negligenza. L'uomo negligente cade in perdizione, imperocchè quegli che non ha cura della sua propria salute chi lo vivificherà? Chi ha cura della sua salute passa le notti di veglia alle porte della casa di Dio, e non ignorerà le cose che si leggeranno, chi non conosce le letture, è (come) una bestia. Quegli che attende alla lettura, non peccherà; e quegli che ama la parola di Dio ama Dio; chi poi lo fa, diventa l'amico di Dio. Chi va verso il corpo del nostro Signore come ad un festino (lett. in ebrietà), irrita Dio, e chi lo riceverà essendo ebbro, perde la sua stessa vita. Vi ha un tempo per mangiare e bere secondo una giusta misura. Il tempo poi del mistero è necessario che si compia con grande osservanza. Quegli che riceve il corpo ed il sangue di Cristo con purità, riceve una grande sostanza (ⲟⲩⲛⲟϭ ⲛ̄ⲧⲟⲩⲥⲓⲁ (1)), ed ha potere di risuscitare i morti. Ma è più facile risuscitare i morti che persuadere un eretico. Imperocchè gli eretici non credono a Dio nè ai suoi santi, ma alla loro propria volontà. Ogni volontà poi non proveniente dallo Spirito Santo, conduce all'inferno. Ammirabile è il sole nell'alto dei cieli (in excelsis), ma è nulla in confronto alla gloria di Dio, come (è una tenue facella in confronto ad un vasto incendio) così è della gloria del sole in confronto alla gloria di Dio. Se non è possibile all'uomo guardare la faccia del sole, che è pure (al confronto di Dio) di così poco momento, gli sarà tanto meno possibile di contemplare la grandezza di Dio, imperocchè nessun uomo vedrà mai in vita la sua faccia, perchè pose, egli disse, la sua abitazione nel sole. La sua abitazione poi è la luce in verità; se nessuno può contemplare l'essenza del sole a causa dell'abitazione di Dio che è in esso, ancorchè esso sia ben poca cosa in confronto della gloria di Dio . . . .
Imperocchè questo (il sole) ha dato il suo calore, e nessun frutto maturerà, nè la creazione durerà senza di lui. Imperocchè Dio l'ha collocato a dominazione del giorno. Se dunque la creatura è così prestante, di quanto mai non la supera colui che l'ha creata? Se le nazioni tutte sono come un bicchiere d'acqua nel mare, a petto della gloria di

(1) Il signor Révillout, invece di ⲟⲩⲥⲓⲁ, legge ⲟⲩⲱⲙ e traduce: *reçoit une nourriture sublime.*

Dio, tanto più egli è elevato e prestante a petto di tutta la creazione di noi. Imperocchè Dio è immensurabile e riempie l'universo. Egli (riposa) sui cherubini lasciando l'universo in timore; egli è ogni (nostro) desiderio (?). Imperocchè chi mai ha potuto sopportare la soavità di Dio? Per questa soavità ineffabile i santi lo pregano senza vederlo . . . .
Per questo è detto, chi (sarà respinto) dalla sede della carità? e chi non desidererà quella bellezza nascosta nel suo corpo e nel suo sangue? Per questo anche è chiamato il mistero santo. Se uno poi osa ricevere questo, quando non è puro, diverrà colpevole del corpo e del sangue del Signore Questa poi è l' oblazione (ⲁⲅⲓⲁⲥⲙⲟⲥ) a cui l'uomo partecipa . . . .

. . . .

Un uomo che fa ingiuria al suo prossimo, non ha alcuna comunione col Salvatore; uno che oblia il suo prossimo nudo, sarà pure obliato nudo innanzi al tribunale di Cristo. Chi va all'altare contaminato di adulterio sarà dato alle fiamme eterne imperocchè un uomo adultero, ...

. . . .

(guardate) i vostri occhi da sguardi inutili, guardate la vostra lingua dalla maldicenza; guardate le vostre orecchie da ascoltare cose vane; guardate la vostra bocca da giuramenti pieni di spavento e di orrore. Ciascuno di voi ponga nel suo cuore la misericordia verso il suo prossimo, studii ciascuno di osservare i comandamenti, e troverà il modo di andare nella casa di Dio a pregare. Imperocchè se noi entriamo nella casa di Dio, portando i colori del diavolo, come potremo ricevere noi i comandamenti di Dio? Come pregherai tu nella casa di Dio? o digiunerai col tuo cuore non retto? colle tue mani non pure? Imperocchè i colori (del diavolo) pesano, e tu non potrai portare i comandamenti che sono il tesoro pubblico della chiesa. Tu dici: io digiuno; tu operi invano. Il corpo pieno di lascivia, il cuore pieno d'impurità, l'anima . .

. . . .

la lingua piena di maldicenza, le mani piene di sangue, i piedi corrono al vizio (ⲕⲁⲕⲓⲁ), la bocca esulta nella violenza, le orecchie ascoltano cose turpi, tu ami gli istrioni, tu corri ai piedi degli indovini, tu ti porti presso gli incantatori, tu nutri i facitori di filtri (ⲫⲁⲣⲙⲁⲕⲟⲥ), tu ti fai compagno dei bestemmiatori, tu ti mescoli coi crapuloni, la tua mano si unisce con quella dei rapaci, la nave è tutta carica di ogni sorta di vizi, e tu dici: io digiuno! io prego!

Non è forse a causa di tutti questi mali che il Profeta gridò: la casa della preghiera voi l'avete fatta caverna di ladri. Disse ancora: se voi stendete le vostre mani a me, io distoglierò gli occhi miei da voi, imperocchè le vostre mani sono piene di sangue. È anche scritto: i vostri digiuni e le vostre contrizioni sono odiate dalla mia anima. Disse ancora il profeta Geremia: forse un antro di iene è la mia eredità a me? . . . .
a voi dai Profeti: io ho mandato un . . . . . in mezzo alle vostre città, io ho abbruciato le vostre masserizie (1) in mezzo delle piazze, e voi non vi siete conver-

---

(1) Considerai la parola ⲥⲁⲛϩⲟⲩ come forma deturpata di ⲥⲁⲛϩⲟⲩⲛ la *parte interna*, ciò che è *nell'interno* quindi ⲛⲉⲧⲛⲥⲁⲛϩⲟⲩ *le cose vostre interne, le vostre masserizie.*

titi a me, disse il Signore; ho colpito i vostri fanciulli e le vostre fanciulle di morte violenta, e voi non vi siete convertiti a me, disse il Signore; io ho mandato una malattia sopra ogni frutto della vostra terra, e tuttavia non vi siete convertiti a me, disse il Signore; io ho distrutto voi al modo che distrussi Sodoma e Gomorra, e tuttavia non vi convertiste ancora a me, disse il Signore. Tutte queste cose forse non sono su noi sino a questi giorni? Ma noi non intendiamo a guisa dello stolto . . . .

(p. LII) Si disse ai tempi antichi (?) della iena, che è un animale immondo, che muta natura in altra natura, e un tempo è maschio, ed un tempo è femmina. Noi pure, o fratelli, cangiamo di natura come la iena. Ora corriamo alla chiesa, stendiamo le nostre mani, preghiamo e digiuniamo, ora corriamo agli indovini, agli incantatori, ai facitori di filtri, perchè siano a noi di protezione. Come mai, o miei cari, Dio non s'irriterà contro di noi, e non porterà sopra di noi tutta la sua collera? Come guarderà i nostri digiuni e le nostre preghiere? Non è forse a causa di queste male azioni (?) che Dio gridò a noi per mezzo del profeta Geremia: forse che non li visiterò? disse il Signore, di una nazione di tal fatta l'anima mia non farà vendetta? Qual è dunque la vendetta che Dio prenderà di noi, se non ci pentiamo come. . . . .

(p. LIII) La penitenza in verità trionfa di tutti i peccati. Il segno della penitenza è il pianto. Il pianto poi asterge i peccati. Istruisci tuo figlio, acciocchè non si faccia compagno del peccatore, e progredirà secondo la tua volontà. Cerchi l'istruzione dai dottori della chiesa, ed imprima (lett. vegga) in se i loro ammaestramenti. Fa gustare alla tua bocca la parola di Dio, e cammina coi saggi. Non fare che la tua bocca prenda gusto a giurare, e non oltraggiare l'immagine di Dio (o chi è fatto all'immagine di Dio). Ricerca la benedizione, e sia la benedizione nella tua bocca. Non offendere mai alcun uomo; e se vuoi che nessuno ti insulti, tu pure non insultare. Onora il vecchio e lasciagli il posto perchè segga. Sii rispettoso con tutti, e nessuno si adirerà con te. Non dare molestia ad alcun uomo, e non domandare due volte al ricco. Avendo del pane, dividilo col tuo prossimo. Visita gli infermi, e va (p. LIV) a visitare i carcerati, se anche tu sei ricco, compi il tuo servigio sacro de' tuoi piedi. Sii simile ad Abramo che aveva molti possedimenti, e per la sua ospitalità fu fatto degno di condividere il cibo con Dio.

Innanzi poi d'ogni cosa sii misericordioso, acciocchè sia usata misericordia con te.

Il governatore della città ha sue tutte le cose che sono nella città, per questo a lui non conviene essere geloso di alcuno. Se poi uno è ricco, deve ancor più essere fedele, ed attendere alla chiesa. Dio ama quelli che hanno pietà dei poveri nudi, al pari di coloro che costruiranno un santuario (ⲧⲟⲡⲟⲥ) al suo nome. Un ricco che abbia pietà dei poveri, questi è un ricco innanzi a Dio. Il povero si rallegra se il ricco gli rivolge la parola, poichè spera ristoro da lui. Conviene piuttosto al ricco essere lieto di incontrarsi col povero, e gioire di farsi compagno ad un uomo di Dio. (p. LV) L'arconte saggio ha sua la ricchezza del mondo; parimente il povero saggio ha sua la ricchezza dell'altra vita (ⲙ̄ⲡⲕⲉⲁⲓⲱⲛ), che è il regno dei cieli.

Terribile è Dio nella sua gloria. La gloria di Dio riempie il mondo. Chi si occulterà a' suoi occhi? Lo stolto crede che nessuno lo conoscerà. Egli ignora che trovasi nella vita come ad un convito! Temi Dio, o uomo! e servilo colla tua buona volontà (ⲡⲣⲟϩⲁⲓⲣⲉⲥⲏⲥ); aprigli la tua mente, ed invocalo per la misericordia dei

poveri. Dà il tuo pane agli affamati, ed affrettati alla chiesa, e porgi la mano al povero ogni giorno, e dà a lui secondo il tuo potere. Fa la tua offerta nella casa di Dio, e le primizie dei prodotti affrettati a portarli al sacerdote. Dona per la tua anima, mentre vivi, imperocchè quando l'uomo muore, la sua parola non permarrà. . . . (p. LVI) Sii propenso al povero, perchè non è felice. Che cosa sarà del ricco, che pone oro sopra oro, sino a che arrugginisca, e riempie i cofani di vesti sino a che siano tarlate? Perciò, o miei cari, siccome sappiamo che la volontà di Dio è per la misericordia, amiamola; la misericordia, disse, è lodata sopra la giustizia; imperocchè, disse, beati i misericordiosi, perchè sarà loro fatta misericordia. Il Signore Gesù disse: siate misericordiosi, perchè misericordioso è il padre vostro. Non giudicate e non sarete giudicati, non condannate e non sarete condannati, perdonate e sarete perdonati, donate e vi sarà donato. Una misura buona, copiosa, compatta, traboccchevole sarà versata nel vostro seno, imperocchè colla misura con cui misurerete, sarete misurati.

Di ciò sia gloria a Dio sino alla fine dei secoli. Amen.

(P. LVII) IL SINODO DI NICEA SULLA FEDE SANA

LA FEDE STABILITA IN NICEA DAL SANTO SINODO

Noi crediamo in un Dio solo, Padre onnipotente, creatore delle cose che vediamo e di quelle che non vediamo; ed in un Signore solo Gesù Cristo, Figlio di Dio, che è generato figlio unico dal Padre, cioè dalla sostanza del Padre. Dio di Dio, luce di di luce, Dio vero di Dio vero, che è stato generato e non creato, consustanziale col Padre suo, per cui furono fatte tutte le cose che sono nel cielo e sulla terra, che (p. LVIII) per noi uomini e per la nostra salute è disceso, prese carne, patì e morì e risuscitò nel terzo giorno, e salì al cielo, d'onde verrà a giudicare i vivi ed i morti, e (crediamo) nello Spirito Santo.

Coloro che dicono che egli (il Figlio) è (esiste) un tempo, e non è (non esiste) un altro tempo, perchè prima di essere generato non esiste, od esistette da ciò che non è o da un'altra sostanza o da un' altra essenza, dicendo che il figlio di Dio è mutabile ed alterabile, costoro certamente anatematizza la Chiesa cattolica ed apostolica (p. LIX), fuori di questa fede santa che fu stabilita nella città di Nicea dai nostri padri, che la stabilirono, perchè fosse di luce ai fedeli per conoscere le parole che furono ivi confessate dai vescovi, che erano in numero più di trecento e diciotto, o piuttosto dal sinodo dell'universo.

Secondo poi la fede che fu primieramente stabilita, noi anatematizziamo la fede di Sabellio che dice: lo stesso è Padre e Figlio e Spirito Santo; imperocchè erra dicendo che il Padre è anche Figlio ed il Figlio è anche Padre, e così pure è lo Spirito Santo, cosicchè è una persona sola con tre (p. LX) nomi. Queste cose sono

straniere alla fede. Imperocchè il Padre lo riconosciamo Padre, ed il Figlio è Figlio, e (così) lo Spirito Santo, un regno solo ed un'essenza sola.

Noi poi anatematizziamo anche la (fede) di Fotino dicente, che il Figlio esistette da Maria in poi, ma che prima non esistette, e solo si parlò prima di lui profeticamente nelle Sacre Scritture; dicendo pure che egli esistette da Maria in poi solamente secondo la sua divinità. Queste cose noi riconosciamo straniere alla fede. Imperocchè il Figlio è col Padre suo in ogni tempo; quando fu generato egli era ed era col Padre suo (p. LXI) al modo, che è scritto nelle (Sacre) Scritture. Imperocchè non vi fu un tempo in cui il Figlio non era, ma in ogni tempo ed il Padre è col Figlio suo, ed il Figlio col Padre suo. Imperocchè è impossibile che il Padre sia senza Figlio durante un tempo, e che sia poscia chiamato Padre come per accrescimento; ma il Padre è Padre in ogni tempo, al modo che noi prima dicemmo; imperocchè (il Figlio) non è un compagno, ma quando fu generato era col Padre suo nel modo che prima scrivemmo. Queste cose noi diciamo del Padre e del Figlio. In quanto poi allo Spirito Santo noi crediamo così: egli è uno spirito divino, uno spirito (p. LXII) perfetto, paraclito, increato, inaccessibile, che parlò per la legge coi Profeti e cogli Apostoli, che discese sul Giordano.

In quanto all' umanità del Figlio, noi crediamo in questo modo: egli prese (il corpo) d'uomo perfetto da questa generatrice di Dio, Maria, per opera dello Spirito Santo, e non dal seme dell'uomo, a Dio non piaccia! (ⲙⲏⲅⲉⲛⲟⲓⲧⲟ) ma dallo Spirito Santo nel modo che è scritto nei Vangeli. Portò corpo ed anima in realtà e non in apparenza od in idea. Imperocchè così venne a salvare gli uomini compiutamente. (p. LXIII) Ed inoltre patì, lo vilipesero, (morì) (1) e lo seppellirono e risuscitò al terzo giorno, e salì al cielo e sedette alla destra del Padre, avendo divinizzato l'uomo, che portò al cielo; e verrà a giudicare i vivi ed i morti. Queste cose tutte dice di lui la Scrittura nelle profezie. Imperocchè come si è parlato di una creatura, non avranno afferrato le moltitudini di testimonianze. Ma parlano del Figlio di Dio perfetto, e stabiliscono ciò che deve far intendere la perfezione della sua incarnazione (?).

Noi poi anatematizziamo ancora quelli che non confessano . . .

Il *primo frammento* contiene il principio di una lettera scritta del Concilio di Nicea. Le poche parole che ancora ci rimangono dicono: « Lettera fatta (scritta) in Nicea dal Sinodo santo. » I vescovi poi furono detti essere più di trecento diciotto nel loro numero. Essendo i fratelli venuti . . . .

In questo piccolo frammento la parola ϩⲟⲩⲟ (più) fu aggiunta dopo e scritta, come si vede anche nella mia trascrizione, sul margine; e noi troviamo la spiegazione di questa correzione nella lettera dell'arcivescovo Rufino, conservata in un papiro copto

(1) Il signor Révillout tiene come errata la forma ⲁⲩⲥⲟϣϥ e vi sostituisce ⲁⲩⲁϣϥ che traduce: *il a été crucifié;* ma parmi che possa anche stare la forma ⲁⲩⲥⲟϣϥ e che l'autore copto abbia voluto con questo verbo (ⲥⲱϣ *ignominia afficere, vilipendere*) segnalare meglio gli insulti e la pena ignominiosa inflitta al Divin Salvatore; si concilia inoltre colla sentenza posta in bocca di S. Francesco dal Bossuet: « Giacchè il Signore non ci giudica degni di tanta grazia andiamcene, o fratello, a terminare i nostri giorni nel martirio della penitenza e cerchiamo tal sito ove ci sia concesso bere a lunghi sorsi la ignominia della Croce; » e col « Disonor del Golgota » del nostro Manzoni.

del Museo Vaticano, pubblicata nel catalogo dello Zoega. In questa lettera dopo aver detto, con le stesse parole del nostro frammento (1), che i vescovi che presero parte al Concilio di Nicea erano più di 318, prosegue: « Noi udimmo al tempo del Sinodo « che quando si numeravano i vescovi seduti sui loro troni erano trecento diciotto, « ma numerandoli quando sorgevano in piedi, ne trovavano trecento dicianove, uno « cioè di più. E però non si potè mai in alcun modo verificare quale fosse il loro « vero numero, nè conoscere il nome di quest'ultimo, perchè quando si veniva nel « numerarli a lui, egli prendeva le sembianze del suo vicino. Fu quindi rivelata la « cosa a taluni essere lo Spirito Santo il trecentesimo decimo nono, che li aiutava « a stabilire la fede retta. Per la qual cosa fu detto essere stato il loro numero « più di 318. »

Il *secondo frammento* dice: Parimente un esegesi che pronunziò il padre Atanasio, arcivescovo di Alessandria sulla nascita del nostro Signore Gesù Cristo nel giorno ventinove (del. mese) di ϫⲟⲓⲁⲕ (2).

Questa stessa data è ripetuta nel *terzo frammento* ove si legge che la nascita del nostro Signore Gesù Cristo fu ai ventinove di ϫⲟⲓⲁⲕ, all'ora settima della notte e fu battezzato all'ora decima della notte dell'undici del mese di *Tobe* (il nostro gennaio) da Giovanni Battista, e fu preso dai Giudei il giorno dieci del mese di *Parmouti* (il nostro aprile).

Il *quarto frammento* versa sull'efficacia della preghiera e del digiuno. La parte ancora leggibile dice: (l. 8) o digiuno e preghiera, la tromba che chiama i morti a sorgere; o digiuno e preghiera, la scacciatrice di tutti gli spiriti malvagi, come insegna a noi il Salvatore colla sua dottrina nell'Evangelio allorchè i suoi lo interrogarono sul demonio dicendo: non lo potremo noi respingere?

Rispose il Maestro di verità insegnando a' suoi discepoli in qual modo si possa scacciare questo demone, disse: questa razza (ⲅⲉⲛⲟⲥ) non può cacciarlo se non colla

---

(1) ⲉⲡⲉⲓⲇⲏ ⲁⲩϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ⲛⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲥⲉⲉⲓⲣⲉ ⲛ̄ϩⲟⲩⲟ ⲉϣⲙ̄ⲛⲧϣⲉⲙ̄ⲛⲧϣⲙⲏⲛ ϩⲛ̄ ⲧⲉⲩⲏⲡⲉ. ⲛ̄ⲧⲉⲣⲉ ⲛⲉⲥⲛⲏⲩ ⲇⲉ ⲃⲱⲕ ⲉⲛⲕⲟⲙⲓⲧⲁⲧⲱⲛ ⲛ̄ⲟⲩⲥⲟⲡ ⲁ ϩⲛ̄ⲛⲟϩ ϩⲛ̄ ⲡⲡⲁⲗⲗⲁⲧⲓⲟⲛ ϣⲁϫⲉ ⲙⲛ̄ ⲛⲉⲥⲛⲏⲩ. ϫⲉ ⲁⲛⲥⲱⲧⲙ̄ ϫⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲟⲩⲟⲉⲓϣ ⲛ̄ⲧⲥⲩⲛϩⲟⲇⲟⲥ ⲉⲣϣⲁⲛ ⲛⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲧⲏⲣⲟⲩ ϩⲙⲟⲟⲥ ϩⲓ ⲛⲉⲩⲑⲣⲟⲛⲟⲥ ⲛ̄ⲥⲉⲟⲡⲟⲩ ϣⲁⲩϭⲉⲛ ϣⲙ̄ⲛⲧϣⲉ ⲙ̄ⲛⲧϣⲙⲏⲛ ⲛ̄ⲉⲡⲓⲥⲕⲟⲡⲟⲥ ⲉⲩϩⲙⲟⲟⲥ ϩⲓϫⲛ̄ ⲛⲉⲩⲑⲣⲟⲛⲟⲥ. ⲉⲩϣⲁⲛⲧⲱⲟⲩⲛ ⲇⲉ ⲛ̄ⲥⲉⲁϩⲉⲣⲁⲧⲟⲩ ϣⲁⲩϣⲡ ϣⲙ̄ⲛⲧϣⲉ ⲙ̄ⲛⲧⲯⲓⲥ ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲉⲩⲟ ⲛ̄ϩⲟⲩⲟ ⲛ̄ⲟⲩⲁ. ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁⲓ ⲙⲡⲟⲩⲉϣ ⲛⲉϩ ⲡϩⲱⲃ ⲉⲃⲟⲗ ϫⲉ ⲟⲩⲏⲣ ⲡⲉ ⲡⲉⲩϫⲱⲕ. ⲟⲩⲧⲉ ⲡⲉⲧⲟ ⲛ̄ϩⲟⲩⲟ ⲙ̄ⲡⲟⲩⲉⲓⲙⲉ ⲉⲡⲉϥⲣⲁⲛ. ⲁⲗⲗⲁ ⲉⲩϣⲁⲛⲡⲱϩ ⲉⲣⲟϥ ⲉⲩⲱⲡ ϣⲁϥϫⲓ ⲡⲉⲓⲛⲉ ⲙ̄ⲡⲉⲧϩⲓⲧⲟⲩⲱϥ. ⲙⲛ̄ⲛ̄ⲥⲁ ⲑⲁⲏ ⲇⲉ ⲙ̄ⲡϩⲱⲃ ⲁ ⲡϩⲱⲃ ϭⲱⲗⲡ ⲉⲃⲟⲗ ⲉϩⲟⲓⲛⲉ ϫⲉ ⲡⲉⲡⲛ̄ⲁ ⲉⲧⲟⲩⲁⲁⲃ ⲡⲉ ⲡⲙⲉϩ (ϣⲙ̄ⲛⲧϣⲉ) ⲙ̄ⲛⲧⲯⲓⲥ ⲉϥⲛ̄ⲙ̄ⲙⲁⲩ ⲉϥϯ ⲛ̄ⲧⲟⲟⲧⲟⲩ ⲉⲩⲧⲁϩⲟ ⲉⲣⲁⲧⲥ ⲛ̄ⲧⲡⲓⲥⲧⲓⲥ ⲉⲧⲥⲟⲩⲧⲱⲛ. ⲉⲧⲃⲉ ⲡⲁï ⲁⲩϫⲟⲟⲥ ϫⲉ ϩⲟⲩⲟ ⲉϣⲙ̄ⲛⲧϣⲉ ⲙ̄ⲛⲧϣⲙⲏⲛ. V. Lénormant, *Fragmenta versionis copticae libri synodici de primo Concilio aecumenico Niceno* (p. 19), Parisiis, 1852.

(2) ϫⲟⲓⲁⲕ era il quarto mese dell'anno egizio che cominciava col mese di ⲑⲱⲟⲩⲧ, il cui primo giorno corrispondeva al quarto del nostro mese di settembre e quindi il 29 di *Koiak* ai 25 del nostro dicembre. V. Tukius, *Rudimenta linguae coptae*, p. 391-392.

preghiera e col digiuno; il digiuno e la preghiera aiutano quelli che sono in . . .

. . . .

Cristo in cui ponemmo ogni nostra cura.

A voi pure, o figli miei santi, innanzi ad ogni cosa comando di ricorrere alla preghiera con fede, ed al digiuno che ci ha custoditi in ogni luogo in cui andammo. La preghiera ed il digiuno ci hanno illuminato in mezzo alle tenebre, il digiuno ha aperto le porte della prigione, ci ha condotti a salvezza in mezzo a tutti i popoli. O preghiera e digiuno scudo. . . . .
o preghiera e digiuno, annona a coloro che sono nella famina, la preghiera ed il digiuno hanno vestito i nudi in mezzo al gelo . . . .

Quinto frammento. In questo frammento sono condannati specialmente quei Cristiani che ricorrono ai maghi ed alle loro arti.

Per questo (dice il testo a linea 13), adunque quegli che oserà dare il corpo ed il sangue di Cristo ad un mago, pecca e si fa simile a Giuda. Imperocchè questi avendo fatto ciò che ha fatto, consegnò il nostro Signore Gesù Cristo nelle mani d'uomini peccatori una volta, ed avendo riconosciuto ciò che ha fatto, giudicò se stesso non essere più degno di vivere, e si appese e morì. Ma colui (che ricorre ai maghi) è più malvagio dei demoni, profanatori del corpo di Cristo. Imperocchè i demoni. .

. . . .

Cristo il santo di Dio. Ed essendosi rimproverato . . . .

. . . .

Il mago poi lo conosce e grida al demonio: ubbidiscimi! Nè questo solo, ma si cinge di una veste . . . . per persuadere i semplici a commettere cose abbominevoli. Per questo è maggiormente malvagio ed indegno di venire alla vita . . . .

. . . .

È facile adunque parlare con un'idolatra più che parlare con un mago. Imperocchè quegli se è degno di un dono . . . .

. . . .

Non avere adunque comunione con un'arte odiata da Dio e dagli uomini e non . .

. . . .

Sesto frammento. Di questo frammento ecco quanto potei decifrare: (linea 4) . . Imperocchè (liberati) da simile prigione, la tristezza fuggì, i veementi dolori cessarono, l'agitazione delle onde del mare diminuì, le navi sante approdarono al porto della salute, il provvido pastore raccolse le pecore nel loro sicuro ovile, furono le fiere malvagie inseguite e cacciate, i rettili velenosi si nascosero nelle loro tane, piene di

. . . .

i lupi, dilaniatori delle anime, si nascosero nelle loro dimore tenebrose, i barbari si conturbarono e fuggirono dal re Cristo. . . . .

. . . .

La Chiesa pure fu coronata (ⲁⲥⲥⲧⲉⲫⲁⲛⲟⲩ), i vescovi fecero festa, i sacerdoti si rallegrarono, i diaconi presero fiducia (ⲡⲁⲣϩⲏⲥⲓⲁⲍⲉ), le vergini cantarano i loro inni, i monaci dissero i loro salmi, i vecchi si adunarono nel loro santo Sinedrio, e reci-

tarono le loro odi spirituali, ed il suono si diffuse nella casa santa. La virtù del digiuno, fatta madre della Chiesa, attorniò nella sua danza (ⲁⲥⲭⲟⲣⲉⲩⲉ) i suoi figli. Io scrivo dunque a voi, o miei figli e mie figlie dilette, io mi rallegro nel Signore, e gioisco nel mio spirito, io abbraccio voi tutti in un abbraccio senza fine, pieno di pace; i fratelli tutti che sono con me, vi salutano nel Signore, i cori dei vescovi santi . . . .

[1] *Settimo frammento.* Quest' ultimo frammento contiene due piccoli brani di un testo; nel primo è detto che « essi stessi udirono che il re esigliò (lui) a causa degli Ariani » le altre poche parole che seguono, suonano: « tosto corse a lui, ... abbracciommi. Io poi lo rialzai e lo abbracciai ». . . . .
. . . .

La traduzione del secondo brano è . . . . innanzi a te, o uomo potente nella fede di Cristo, ti conceda la sua pace in ogni luogo, o atleta della verità!

Dicendo poi queste cose il santo uomo, ecco io vedo Cristo parlante colla sua bocca. Poscia mi accolse dentro. Al domani mandò i fratelli chierici al vescovo Gennadio . . . .

INDICE

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

V.° Si stampi:

ARIODANTE FABRETTI, PRESIDENTE

ASCANIO SOBRERO GASPARE GORRESIO	*Segretarii.*